DESCENTE COHOMOLOGIQUE

par

Yves Laszlo

Table des matières

1. Introduction

Le but de ces notes est de donner une présentation de la théorie de la descente cohomologique de Deligne plus détaillée que les notes de Saint-Donat de l'exposé Vbis [**1**]. Ces notes, initialement de nature privée, sont **sans aucune originalité**. Elles sont bien souvent de la transcription pure et simple de *loc. cit.* Disons qu'on espère d'une part que les détails manquants sont explicités et que les quelques obscurités du texte initial sont un peu éclaircies et, d'autre part, que je n'en ai pas rajouté. On explique dans les dernières sections (6.1.8 et s.) comment Gabber prouve que le critère de descente cohomologique (5.1.5) s'adapte dans le cas simplicial strict(1), généralisation bien utile dans l'étude cohomologique des faisceaux lisse-étale sur les champs algébriques.

1.1. Espaces simpliciaux. —

Définition 1.1.1. — *On note $\bar{\Delta}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles*

$$[i] = \{0, \cdots, i\}, i \geq -1$$

et les morphismes les applications croissantes (au sens large). On note Δ la sous catégorie pleine de $\bar{\Delta}$ dont les objets sont les $[i], i \geq 0$.

Notons que $\varnothing = [-1]$ est un (l') objet initial de $\bar{\Delta}$ tandis que Δ n'en a pas. On se donne une catégorie **B** dit des *espaces* dont on suppose qu'elle admet des limites projectives finies ainsi que des coproduits finis (cette dernière condition n'est pas essentielle). Cette hypothèse sera d'ailleurs renforcée à partir de 3.
Des exemples standards de telles catégories sont la catégorie des S-schémas pour S un schéma de base donné ou **B** la catégorie des espaces topologiques. On verra d'autres exemples utiles.

Définition 1.1.2. — *Un* espace simplicial *est un foncteur $\Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{B}$. Plus généralement, si* D *est une (petite) catégorie, un* espace D-simplicial *est un foncteur $\mathrm{D}^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{B}$. Les morphismes sont les foncteurs.*

Dans le cas où $\mathbf{B} = \mathbf{Sch}_{\mathrm{S}}$, on parlera de S-schéma simplicial (schéma simplicial dans le cas absolu).

Exemple 1.1.3. — *On construit l'espace simplicial $\mathrm{X}_\bullet = \mathrm{cosq}(\mathrm{X}_0 \to \mathrm{S})$ par la construction standard où $\mathrm{X}_n = \mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{S}} \cdots \mathrm{X}_0$ avec $n+1$ facteurs, un morphisme $\delta \in \mathrm{Hom}([i],[j])$ définissant $\delta : \mathrm{X}_j \to \mathrm{X}_i$ par la formule $\delta(x_0, \cdots, x_j) = (x_{\delta(0)}, \cdots, x_{\delta(i)})$ pour tout point valué de X_j (Yoneda). L'exemple le plus simple d'espace* D*-simplicial, mais très utile, est sans doute l'espace* D*-simplicial S_{D} de valeur constante $\mathrm{S} \in \mathbf{B}$ (ie $\mathrm{S}_{\mathrm{D}}(i) = \mathrm{S}, \delta = \mathrm{Id}_{\mathrm{S}}$). Les espaces $\mathrm{D}_{/\mathrm{S}}$-simpliciaux s'identifient au morphismes $\mathrm{X} \to \mathrm{S}_{\mathrm{D}}$: on parlera de* D*-espaces simpliciaux sur* S.

(1)Les résultats de la section 6.1.8 sont dus à Gabber et les fautes éventuelles dans les preuves à l'auteur.

1.2. Topos simplicial : le cas étale. — Soit X un schéma simplicial.

Définition 1.2.1. — *Le topos simplicial étale* $X_{\text{ét}}$ *de* X *est la catégorie dont les objets sont les familles* $(F_i \in (X_i)_{\text{ét}},\ i \geq 0)$ *munis de morphismes fonctoriels* $\delta^* F_i \to F_j$ *pour tout* $\delta \in \mathrm{Hom}_\Delta([i],[j])$ *comme plus haut. Les morphismes sont ceux qu'on pense.*

Par exemple, les faisceaux $\mathcal{O}_{X_i}$ s'organisent naturellement en un faisceau simplicial, ce qui au passage est un argument pour le choix du sens des flèches dans la définition. Notons que $X_{\text{ét}}$ est bien un un topos, *ie* une catégorie équivalente à une catégorie de faisceaux sur un site (critère de Giraud [**3**]) ; on peut même expliciter un site qui convient : les ouverts sont les couples $(u : U \to X_n, n)$ avec u étale, les familles couvrantes étant les familles couvrantes qui sont couvrantes à chaque étage.
Pour généraliser ces considérations, on peut interpréter la construction du topos simplicial étale de X comme suit.
On conserve les notations précédentes. On définit un foncteur $\beta : \mathbf{F} \to \mathbf{B}$ comme suit :
-les *objets* de $\mathbf{F}$ sont les couples $\underline{F} = (T, F)$ avec F un faisceau étale sur un schéma T ;
-les *morphismes* $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}}((T,F),(T',F'))$ sont les couples

$$\phi = (f,u) \text{ avec } f \in \mathrm{Hom}(T,T') \text{ et } u \in \mathrm{Hom}_{T_{\text{ét}}}(f^*F',F),$$

les morphismes se composant comme on pense.
-le foncteur $\beta : \mathbf{F} \to \mathbf{B}$ est le foncteur d'oubli du faisceau.

Avec ces notations, si $g \in \mathrm{Hom}(T,T')$ est donnée, on a par par définition[(2)]

$$\mathrm{Hom}_g(\underline{F},\underline{F}') = \{\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}}(\underline{F},\underline{F}') \text{ tels que } \beta(\gamma) = g\}$$

de sorte qu'on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Id}}((F,T),(F',T)) = \mathrm{Hom}_{T_{\text{ét}}}(F',F).$$

Ainsi, la catégorie fibre $\mathbf{F}(T)$ est la **catégorie opposée** à la catégorie des faisceaux étales sur T. Observons que les diagrammes

$$\begin{array}{ccccccc} (T, f^*F') & \xrightarrow{(f,\mathrm{Id})} & (T',F') & \text{ét} & (T,F) & \xrightarrow{(f,\mathrm{adj})} & (T', f_*F) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{f} & T' & & T & \xrightarrow{f} & T' \end{array}$$

sont respectivement cartésiens et cocartésiens (où adj est la flèche d'adjonction $f^*f_*F \to F$), ce qui signifie simplement qu'on a des isomorphismes fonctoriels

$$\mathrm{Hom}_f(F,F') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}(T)}(F, f^*F') = \mathrm{Hom}_{T_{\text{étale}}}(f^*F',F) \tag{1.2.a}$$

[(2)]Attention à ne pas confondre avec la définition duale topologique, comme dans Hodge III par exemple.

d'une part, et, d'autre part

$$\text{(1.2.b)} \qquad \mathrm{Hom}_f(\mathrm{F},\mathrm{F}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}(\mathrm{T}')}(f_*(\mathrm{F}),\mathrm{F}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}'_{\text{étale}}}(\mathrm{F}', f_*(\mathrm{F})),$$

avec des isomorphismes de foncteurs

$$(f\circ g)^* \xrightarrow{\sim} g^*\circ f^* \text{ et } (f\circ g)_* \xrightarrow{\sim} f_*\circ g_*$$

qui permettent de les identifier (cf. [**4**], exposé VI). Remarquons d'ailleurs que les isomorphismes précédents imposent à f^* d'être l'adjoint à gauche de f_* dans $\mathbf{F}(\mathrm{T})^{\mathrm{opp}} = \mathrm{T}_{\text{ét}}$, ce qui d'ailleurs prouve qu'il est exact à droite.
Mais on a plus : en effet, le couple de foncteurs adjoints image directe-image inverse s'identifie au morphisme de topos, encore noté f

$$f = (f_*, f^*) : \mathbf{F}(\mathrm{T})^{\mathrm{opp}} = \mathrm{T}_{\text{étale}} \to \mathrm{T}'_{\text{étale}} = \mathbf{F}(\mathrm{T}')^{\mathrm{opp}}.$$

En ces termes, le topos simplicial $\mathrm{X}_{\text{ét}}$ de X se réinterprète comme étant la catégorie des sections

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{F} \arrow[d, "\beta"] \\ \Delta^{\mathrm{opp}} \arrow[r, "\mathrm{X}"] \arrow[ur, dotted] & \mathbf{B} \end{tikzcd},$$

où l'on voit X comme un foncteur (covariant) $\mathrm{X} : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{B}$
On peut maintenant généraliser en considérant des catégories fibrées de Faisceaux $\beta : \mathbf{F} \to \mathbf{B}$ générales.

1.3. Topos simplicial : le cas général. — On commence par se donner une notion de Faisceau sur les espaces, avec un formalisme d'images directe et inverse.

Définition 1.3.1. — *On dit que $\beta : \mathbf{F} \to \mathbf{B}$ est une catégorie fibrée de Faisceaux sur $\mathbf{B}$ si*
i) Le foncteur β est fibrant (existence d'image inverse).
ii) Le foncteur β est cofibrant (existence d'image directe).
iii) Les catégories opposées $\mathrm{T}_{\mathbf{F}} := \mathbf{F}(\mathrm{T})^{\mathrm{opp}}$ des catégories fibres sont des topos, ie sont équivalentes à des catégories de faisceaux sur un site.
iv) Pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(\mathrm{T},\mathrm{T}')$, le couple de foncteurs adjoints (f_*, f^*) est un morphisme de topos

$$f = (f_*, f^*) : \mathrm{T}_{\mathbf{F}} \to \mathrm{T}'_{\mathbf{F}},$$

autrement dit f^* exact.

Comme précédemment, dire que $\mathbf{F} \to \mathbf{B}$ est une catégorie fibrée de Faisceaux signifie donc simplement qu'on a des isomorphismes fonctoriels

$$\text{(1.3.a)} \qquad \mathrm{Hom}_f(\mathrm{F},\mathrm{F}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}(\mathrm{T})}(\mathrm{F}, f^*\mathrm{F}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}_{\mathbf{F}}}(f^*\mathrm{F}', \mathrm{F})$$

d'une part, et, d'autre part

$$\text{(1.3.b)} \qquad \mathrm{Hom}_f(\mathrm{F},\mathrm{F}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}(\mathrm{T}')}(f_*(\mathrm{F}),\mathrm{F}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}'_{\mathbf{F}}}(\mathrm{F}', f_*(\mathrm{F})),$$

avec des isomorphismes de foncteurs

$$(f\circ g)^* \xrightarrow{\sim} g^*\circ f^* \text{ et } (f\circ g)_* \xrightarrow{\sim} f_*\circ g_*$$

qui permettent de les identifier. (cf. [**4**], exposé VI).
On dira Faisceau de (ou sur) un topos $\mathcal{T}$ pour objet de $\mathcal{T}$ (ce qui est un peu abusif, mais pas trop, car les préfaisceaux représentables de $\mathcal{T}$ sont des faisceaux pour la topologie dite canonique de $\mathcal{T}$).

Remarque 1.3.2. — *Si* S *est un objet de* $\mathbf{B}$*, on récupère une catégorie fibrée de Faisceaux au dessus de* $\mathbf{B}_{/\mathrm{S}}$ *(catégorie des* S*-objets) simplement en prenant l'image inverse de* $\mathbf{F}$ *par le foncteur d'oubli* $\mathbf{B}_{/\mathrm{S}} \to \mathbf{B}$*).*

Comme dans le cas étale, on pose

Définition 1.3.3. — *Soit* $\mathrm{X} : \mathrm{D}^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{B}$ *un espace* D*-simplicial. Un Faisceau sur* X *est une section*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{F} \arrow[d, "\beta"] \\ \Delta^{\mathrm{opp}} \arrow[r, "\mathrm{X}"] \arrow[ur, dotted] & \mathbf{B} \end{tikzcd} .$$

Les morphismes de Faisceaux sont les morphismes de sections.

Explicitement, se donner un Faisceau sur X (relativement à β), c'est se donner pour tout objet i de D un Faisceau, à savoir un objet F_i de $(\mathrm{X}_i)_{\mathbf{F}}$ munis de morphismes

$$\delta^*\mathrm{F}_i \to \mathrm{F}_j$$

pour tout $\delta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}(i,j)$, fonctoriels en δ (on a encore écrit δ pour $\mathrm{X}(\delta)$).
On vérifie grâce au critère de Giraud par exemple que la catégorie $\mathrm{X}_{\mathbf{F}}$ des Faisceaux sur X est bien un topos (*ie* , rappelons le, qu'elle est équivalente à une catégorie de Faisceaux sur un site convenable).

Exemple 1.3.4. — *Un Faisceau sur* S_{D} *est alors simplement un foncteur* ***covariant*** *de* D *dans* $\mathrm{S}_{\mathbf{F}}$ *: on parlera alors de Faisceau* ***cosimplicial*** *sur* S*. De même, on parlera de complexe de Faisceaux cosimpliciaux sur* S*.*

Le topos simplicial est fonctoriel. Expliquons comment. Commençons par une remarque utile. La flèche

$$\text{(1.3.c)} \qquad e_i^* : \begin{cases} \mathrm{X}_{\mathbf{F}} & \to & (\mathrm{X}_i)_{\mathbf{F}} \\ \mathrm{F} & \mapsto & \mathrm{F}_i \end{cases}$$

de « restriction » à X_i commute aux limites projectives (même quelconques) et donc est exact. Il a un adjoint à droite :

$$(e_{i*}G)_j = \prod_{j \xrightarrow{\alpha} i} \alpha_* G. \tag{1.3.d}$$

C'est donc par définition le foncteur image inverse d'un morphisme de topos

$$e_i : (X_i)_{\mathbf{F}} \to X_{\mathbf{F}}. \tag{1.3.e}$$

La famille de ces morphismes est conservative (autrement dit, dire que deux Faisceaux de $X_{\mathbf{F}}$ sont isomorphes, c'est dire que pour tout i que leurs restrictions aux $(X_i)_{\mathbf{F}}$ le sont). Plus généralement, pour tester si une suite de Faisceaux abéliens de $X_{\mathbf{F}}$ est exacte, il suffit de tester (et il faut d'ailleurs) que ses restrictions aux (X_i) le soient.
Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces D-simpliciaux. Si i est un objet de D, on a donc un morphisme, fonctoriel en i

$$f_i : X_i \to Y_i$$

qui induit un morphisme de topos

$$f_i = (f_{i*}, f_i^*) : (X_i)_{\mathbf{F}} \to (Y_i)_{\mathbf{F}}$$

(axiome *iv*) de la définition 1.3.1 d'une catégorie de Faisceaux. Cette famille d'images inverses f_i^* définit un foncteur $f^* : Y_{\mathbf{F}} \to X_{\mathbf{F}}$, exact car $e_i^* \circ f^* = f_i^*$ est exact, d'adjoint à droite la famille f_* des f_{i*}. Ceci permet de définir le morphisme de topos correspondant

$$f = (f_*, f^*) : X_{\mathbf{F}} \to Y_{\mathbf{F}}.$$

1.4. Le morphisme de descente. — Soit S un espace (un objet de **B**) et soit X un D-espace simplicial sur S (1.1.3). Pour des raisons qui apparaîtront bientôt, une telle donnée est notée $f : X_\bullet \to S$ et le morphisme correspondant $X_\bullet \to S_D$ est noté $f_\bullet$.
Le morphisme tautologique $f^* : S_{\mathbf{F}} \to X_{\mathbf{F}}$ qui envoie un Faisceau F sur S sur la famille f_i^*G munis des morphismes tautologiques

$$\delta^* G_i = \delta^* f_i^* G = (f_i \circ \delta)^* G = f_j^* G = G_j$$

pour tout $\delta \in \mathrm{Hom}_D(i, j)$ est exact (restreindre à X_i).Si F est un faisceau sur $X_\bullet$, l'image directe $(f_\bullet)_* F$ est le foncteur $i \mapsto (f_i)_* F_i$. L'adjoint à droite de f^* est défini par

$$f_* F = \varprojlim_{D} f_{i*F_i}.$$

Dans le cas $D = \Delta$, c'est simplement $\ker\big((f_0)_* F_0 \rightrightarrows (f_1)_* F_1\big)$. On a donc défini un morphisme de topos $X_{\mathbf{F}} \to S_{\mathbf{F}}$, fonctoriel en f en un sens évident. Lorsque f est le morphisme tautologique $S_D \to S$, on le note plutôt ϵ. On notera souvent $f : X \to S$ au lieu de $f : X_{\mathbf{F}} \to S_{\mathbf{F}}$.

1.5. Le problème. — Soit $\mathcal{O}$ un anneau de $\mathbf{F}$ (plus précisément une section de β) (constant pour simplifier). Par restriction, il définit un Faisceau d'anneaux sur tout espace D-simplicial de sorte que tous les morphismes de topos associés à des morphismes de B sont annelés. L'objet de la descente cohomologique est d'étudier le morphisme d'adjonction

$$\alpha : \ \mathrm{F} \to \mathrm{R}f_*f^*\mathrm{F} \text{ pour } \mathrm{F} \in \mathrm{D}^+(\mathrm{S}_{\mathbf{F}})$$

où les catégories dérivées considérées sont les catégories dérivées de $\mathcal{O}$-modules. Le plus souvent, on aura $\mathcal{O} = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $n > 1$. Sauf mention expresse du contraire, par Faisceau on entendra Faisceau de $\mathcal{O}$-modules.

Bien entendu, on cherche des conditions assurant que α soit un isomorphisme pour tout F.

Définition 1.5.1. — *Avec les notations précédentes, si le morphisme d'adjonction* $\mathrm{Id} \to \mathrm{R}f_*f^*$ *est un isomorphisme de foncteurs de* $\mathrm{D}^+(\mathrm{S}_{\mathbf{F}})$*, on dit que f est de descente cohomologique.*

Le point est qu'en fait on peut calculer assez explicitement le foncteur $\mathrm{R}f_*$ dans le cas (multi)simplicial (*ie* $\mathrm{D} = \Delta^r$) en termes de résolutions convenables de F. C'est ce qu'on explique dans un premier temps (cf. (2.2) et spécialement (2.3.4)). Ceci permet d'obtenir des suites spectrales (cf. (2.4.1) et 2.4.5) reliant la cohomologie d'un faisceau de $\mathrm{S}_{\mathbf{F}}$ à celles de ses images inverses sur les $(\mathrm{X}_{\bullet i})_{\mathbf{F}}$. C'est la généralisation de le suite spectrale reliant la cohomologie de Cech d'un recouvrement ouvert à celle de l'espace tout entier. Une fois qu'on a ceci, il est assez facile d'obtenir des conditions assurant que α est de descente cohomologique dès lors qu'on dispose d'un théorème de changement de base pour une classe raisonnable de morphismes de $\mathbf{B}$ (cf.2.5.5) qui permet de se ramener au cas de morphismes avec sections (cf. 2.5.4).

Des techniques bisimpliciales, pendant simplicial des doubles complexes, permettent (3.0.6) de montrer que les morphismes $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ de $\mathbf{B}$ tels que $\mathrm{cosq}_0(\mathrm{T}/\mathrm{S}) \to \mathrm{S}$ soit de descente cohomologique, universellement en S, engendrent une topologie dite de la descente (cohomologique universelle).

Le résultat principal 5.1.5 est alors obtenu par approximation successive d'un espace simplicial par ses cosquelettes successifs. La clef pour obtenir ce résultat, (outre la remarque (5.1.3) amenant à la proposition 5.1.2) est la proposition 5.1.5 qui est le seul endroit où l'énoncé d'invariance par homotopie (4.3.1) est utilisé, et donc utilise la structure simpliciale avec non seulement les opérateurs de face mais aussi les opérateurs de dégénérescence.

Remarque 1.5.2. — *Tous les résultats se généralisent mutatis mutandis au cas d'un anneau $\mathcal{O}$ général quitte à faire ça et là des hypothèses de platitude sur les morphismes considérés. On peut aussi faire de la descente pour des catégories de type* $\mathrm{D}_c(\mathcal{O})$ *où c est une sous-catégorie (fibrée) épaisse des Faisceaux abéliens. On n'abordera pas ces points, sans difficultés supplémentaires.*

Notons que essentiellement tous ces résultats sont valables dans le cas simplicial strict (cf. 3.0.8) et (6.1.8)).

1.6. Notation. — Lorsque $X_\bullet$ est un espace D-simplicial, on notera simplement $X_\bullet$ le topos correspondant $(X_\bullet)_{\mathbf{F}}$ (en particulier pour les espaces, cas particulier avec D ponctuelle). De même, on notera souvent de la même manière les morphismes de D-espaces et les morphismes de topos correspondants. On va dans un premier temps donner des critères généraux de descente cohomologiques. On fixe donc une catégorie fibrée $\beta : \mathbf{F} \to \mathbf{B}$ et un anneau (constant) $\mathcal{O}$.

2. La suite spectrale de descente

On se donne un S-espace D-simplicial $f : X_\bullet \to S$. Il se factorise à travers le système simplicial constant $\epsilon : S_D \to S$ en $f_\bullet : X_\bullet \to S_D$. Soit $F_\bullet$ un complexe de Faisceaux sur $X_\bullet$.

2.1. Résolutions injectives privilégiées. — Bien que $\mathrm{Mod}(X_\bullet, \mathcal{O})$ ait assez d'injectifs (Tohoku), il nous sera utile de construire des résolutions injectives particulières. Rappelons (1.3.e) que l'image inverse du morphisme de topos $e_n : X_n \to X$ est le morphisme de restriction à X_n.

Lemme 2.1.1. — *e_n^* commute aux produits infinis de Faisceaux abéliens et transforme injectifs en injectifs.*

Démonstration. — En effet, e_n^* vu comme foncteurs entre catégories de $\mathcal{O}$-Faisceaux, à un adjoint à gauche vérifiant

$$(e_{n!}\mathrm{G})_k = \bigoplus_{[n]\xrightarrow{\alpha}[k]} \alpha^*\mathrm{G}$$

qui visiblement est exact. Par adjonction, le lemme suit. □

Bien entendu, si I_n est injectif, il en est de même de $e_{n*}I_n$ ansi que de n'importe quelle produit $\prod_n e_{n*}I_n$ (adjonction) : on appellera ces derniers les injectifs *privilégiés* .
On a assez d'injectifs privilégiés :

Lemme 2.1.2. — *Tout Faisceau $F_\bullet$ sur $X_\bullet$ se plonge dans un injectif privilégié.*

Démonstration. — Choisissons un plongement dans un injectif $F_n \hookrightarrow I_n$ pour tout n. Alors, le morphisme d'adjonction $F_\bullet \to \prod_n e_{n*}I_n$ se restreint sur X_m en $F_m \to e_m^* \prod_n e_{n*}I_n \overset{2.1.1}{=} \prod_n e_m^* e_{n*}I_n$. Comme $e_m^* e_{m*}I_m$ s'envoie sur I_m et que le composé correspondant $F_m \to I_m$ est l'injection initiale, le lemme suit. □

2.2. Généralités sur les images directes. — L'image directe $f_{\bullet *}F_\bullet$ se calcule terme à terme, la structure simpliciale étant définie par adjonction comme on le pense. Ainsi, le calcul de $\mathrm{R}f_{\bullet *}$ se fait simplement terme à terme en partant d'un complexe à composantes injectives, par exemple *privilégiées* (2.1.1), quasi-isomorphe à $F_\bullet$. Le calcul de $\mathrm{R}\epsilon_*$ est plus délicat.

Sauf mention expresse du contraire, on ne considère désormais que des espaces simpliciaux ($D = \Delta$).

Un Faisceau $H_\bullet$ sur l'espace simplicial constant S_Δ est un foncteur *covariant* $\Delta \to \mathrm{Ab}(S)$. En particulier, tout morphisme de face $\partial^i : [n] \to [n+1], i = 0, \cdots, n+1$ définit un morphisme $\mathrm{d}^i : H_n \to H_{n+1}$. On définit alors un double-complexe à la Cech dont la différentielle horizontale est $\sum(-1)^i \mathrm{d}^i$, la différentielle verticale étant induite par celle de $H_\bullet$. Le complexe simple associé est noté $\mathbf{s}(H_\bullet)$. Bien entendu, $\mathbf{s}$ passe à la catégorie homotopique pour définir un foncteur triangulé.

Lemme 2.2.1. — $\mathbf{s}$ *induit un foncteur triangulé* $D^+(S_\Delta) \to D^+(S)$.

Démonstration. — Il suffit de prouver que $\mathbf{s}$ transforme acyclique en acycliques. Mais la suite spectrale du double complexe associée à la filtration par les lignes vérifie alors $\mathrm{E}_1 = 0$. Comme elle est convergente, le lemme suit. □

2.3. Calcul de $\mathrm{R}\epsilon_*$**.** — Soit G un Faisceau abélien sur $\mathrm{S} = \mathrm{S}_n$. On va montrer

Théorème 2.3.1. — *On a* $\mathrm{R}\epsilon_* = \mathbf{s}$.

Cet énoncé et la formule $\mathrm{R}f_* = \mathrm{R}\epsilon_* \circ \mathrm{R}f_{\bullet *}$ fournissent évidemment une suite spectrale -voire deux- aboutissant $\mathrm{R}f_*\mathrm{G}$. La preuve du théorème et la construction des suites spectrales correspondantes suivent des considérations suivantes.

Lemme 2.3.2. — *On a* $\mathbf{s}(e_{n*}\mathrm{G}) = \mathrm{G}$ *dans la* catégorie homotopique. *Autrement dit,* $s(e_{n*}\mathrm{G})$ *est acyclique en degré* > 0 *et* $\mathrm{H}^0(s(e_{n*}\mathrm{G})) = \mathrm{G}$.

Démonstration. — C'est un calcul. En effet, on a

$$e_{n*}\mathrm{G} = \prod_{[k]\xrightarrow{\alpha}[n]} \alpha_*\mathrm{G} = \prod_{[k]\xrightarrow{\alpha}[n]} \mathrm{G} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{T}_n^k, \mathrm{G})$$

avec $\mathrm{T}_n^k = \mathrm{Hom}([k],[n])$, les différentielles du complexe de chaînes T_n étant données par les formules de Cech. Ce complexe -de chaînes- est *homotope* à $\mathbf{Z}$ par l'augmentation canonique (bien connu). □

Remarque 2.3.3 **(Variante globale de 2.3.2)**. — *Le complexe*

$$\Gamma(\mathrm{S},(e_{n*}\mathrm{G})_0) \xrightarrow{\mathrm{d}^0-\mathrm{d}^1} \Gamma(\mathrm{S},(e_{n*}\mathrm{G})_1)\cdots \xrightarrow{\sum(-1)^i\mathrm{d}^i} \Gamma(\mathrm{S},(e_{n*}\mathrm{G})_k)\cdots$$

est homotope à $\Gamma(\mathrm{S},\mathrm{G})$. *En effet, il est égal comme plus haut à* $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}_n, \Gamma(\mathrm{G}))$.

Corollaire 2.3.4. — *Soit* I *injectif privilégié sur* S_Δ. *Alors, on a une équivalence naturelle* $\epsilon_*\mathrm{I} \to \mathbf{s}(\mathrm{I})$.

Démonstration. — Notons que $\mathbf{s}(\mathrm{I})$ est gradué en degrés ≥ 0 et donc qu'on dispose d'une flèche canonique

$$\epsilon_*\mathrm{I} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{H}^0(\mathbf{s}(\mathrm{I})) \to \mathbf{s}(\mathrm{I})$$

que I soit injectif ou non. Si I est de la forme $e_{n*}\mathrm{I}_n$, c'est une équivalence d'homotopies d'après le lemme. La flèche $\epsilon_*\mathrm{I} \to \mathbf{s}(\mathrm{I})$ commutant au produit, le corollaire suit. □

Preuve du théorème. — Soit

$$\mathrm{I} = (\cdots \mathrm{I}_\bullet^{q-1} \to \mathrm{I}_\bullet^q \to \mathrm{I}_\bullet^{q+1} \cdots)$$

un complexe de S_Δ à composantes I^q injectives et *privilégiées*, nulles en degrés assez petits. On s'intéresse au double complexe I_p^q, de différentielle horizontale simpliciale et verticale définies par les différentielles $\mathrm{I}^q \to \mathrm{I}^{q+1}$. La cohomologie de $\mathbf{s}(\mathrm{I})$ est l'aboutissement de deux suites spectrales suivant qu'on filtre par les lignes ou par les colonnes. Filtrons par les *lignes*. Le terme $\mathrm{E}_0^{p,q}$ est I_p^q, la différentielle est simpliciale uniquement. On a donc $E_1^{p,q} = H^p(I_p^q \to I_{p+1}^q)$. D'après le corollaire, on a donc $E_1^{p,q} = 0$ si $p \neq 0$ et vaut $\epsilon_* I^q$ sinon. La différentielle correspondante étant alors purement verticale. On en déduit que la suite spectrale dégénère et que la flèche naturelle $\epsilon_*(I) \to \mathbf{s}(I)$ est un quasi-isomorphisme. □

2.4. Application : suites spectrales de descente. — On obtient alors des suites spectrales type Cech associées à $f : X_\bullet \to S$ et $F_\bullet \in D^+(X_\bullet)$.

Théorème 2.4.1. — *Avec les notations précédentes, il existe une suite spectrale fonctorielle (en* F*)*

$$E_1^{p,q} = R^q f_{p*} F_p \Rightarrow R^{p+q} f_* F_\bullet.$$

Démonstration. — Choisissons un quasi-isomorphisme $\iota : F \to I$ avec $I \in D^+$ à composantes injectives. On a alors

$$Rf_* F_\bullet = R\epsilon_* \circ Rf_{\bullet *} F = \mathbf{s}(f_{\bullet *} I)$$

d'après ce qui précède. Ainsi, $Rf_* F_\bullet$ est le complexe simple associé au complexe double $f_{p*} I_p^q$, ce complexe étant bien défini à homotopie près -si on veut, on peut prendre un représentant injectif *canonique* de F-. Cette fois-ci, regardons la suite spectrale en filtrant par les *colonnes*. Le terme $E_0^{p,q}$ en $f_{p*} I_p^q$, mais la différentielle est cette fois-ci verticale. Comme e_p^* est exacte et transforme injectifs en injectifs, on a $F_p \to I_p$ est un quasi-isomorphisme et induit un isomorphisme $Rf_{p*} F_p \xrightarrow{\sim} f_{p*} I_p$. Autrement dit, on a

$$E_1^{p,q} = H^q(f_{p*} I_p^\bullet) = R^q f_{p*} K_p.$$

La différentielle $E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ est purement horizontale, ie est définie par la structure simpliciale. La suite spectrale ne dépend pas de I mais uniquement de F (deux résolutions injectives sont homotopes) et la fonctorialité est claire. □

Remarque 2.4.2 **(Compatibilité à l'adjonction)**. — *Par construction, dans le cas* $F = f^* G$, *le composé de la flèche d'adjonction* $G \to f_{0*} f^{0*} G = E_1^{0,0}$ *et de l'inclusion* $E_1^{0,0} \hookrightarrow E_\infty^{0,0} = f_* f^* G$ *est la flèche d'adjonction* $G \to f_* f^* G$. *Ainsi, dire que* $G \to f_{0*} f^{0*} G$ *est un isomorphisme c'est dire que* $d_i^{0,0} = 0$ *pour* $i \geq 2$ *et* $G \to f_* f^* G$ *est un isomorphisme.*

La suite spectrale 2.4.1 est compatible par construction aux morphismes de changement de base (ou, ce qui revient au même, la formation de $Rf_{\bullet *}$ l'est).

Corollaire 2.4.3. — *Soit* $S' \to S$ *un morphisme de* $\mathbf{B}$ *et* $X'_\bullet \to S'$ *l'espace simplicial déduit par changement de base. Si la formation de* Rf_{i*} *commute à* $S' \to S$, *il en est de même de celle de* Rf_*.

Exemple 2.4.4. — *Supposons que* $\mathbf{F} \to \mathbf{B}$ *est la catégorie fibrée des faisceaux étales sur les schémas et* $\mathcal{O} = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ *et soit* f *comme plus haut. Alors, la formation de* Rf_* *commute au changement de base étale. Si* f *est propre , la formation de* $Rf_* F$ *commute à tout changement de base. Si* f *est quasi-compact et quasi-séparé et* n *inversible sur* S, *la formation de* Rf_* *commute au changement de* *base lisse (théorèmes de changement de base* par *un morphisme lisse ou* pour *un morphisme propre (SGA4)).*

***Théorème 2.4.5* (Variante globale).** — *Avec les notations précédentes, il existe une suite spectrale fonctorielle*

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_p, \mathrm{F}_p) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{X}_\bullet, \mathrm{F}_\bullet).$$

Démonstration. — On a

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{X}_\bullet}\mathrm{F}_\bullet = \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{S}_\Delta}(\mathbf{s}(f_{\bullet *}\mathrm{I})).$$

Mais, les composantes de $\mathbf{s}(f_{\bullet *}\mathrm{I})$ sont *flasques* comme chaque $f_{p*}\mathrm{I}^q$ et donc

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{S}_\Delta}(\mathbf{s}(f_{\bullet *}\mathrm{I})) = \Gamma_{\mathrm{S}_\Delta}(\mathbf{s}(f_{\bullet *}\mathrm{I})) = \mathbf{s}(\Gamma_{\mathrm{S}_\Delta}((f_{\bullet *}\mathrm{I})) = \mathbf{s}(\Gamma(\mathrm{X}_\bullet, \mathrm{I})).$$

La suite spectrale du complexe double filtré par les colonnes donne le résultat comme précédemment.

□

2.5. Descente cohomologique : motivation. — Pour tout $\mathrm{G} \in \mathrm{D}^+(\mathrm{S})$, on a un morphisme d'adjonction $a_\mathrm{G} : \mathrm{G} \to \mathrm{R}f_*f^*\mathrm{G}$.

Définition 2.5.1. — *On dit que* $f : \mathrm{X}_\bullet \to \mathrm{S}$ *est un morphisme de* descente cohomologique *si* a_G *est un isomorphisme pour tout* G*, de* descente cohomologique universelle *si* $f' : \mathrm{X}'_\bullet \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{X}_\bullet \times_\mathrm{S} \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$ *est de descente cohomologique pour tout changement de base* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Remarque 2.5.2. — *On devrait dire* f *de descente cohomologique pour la catégorie fibrée des* $\mathcal{O}$*-Faisceaux (relativement à* β*). Notons que pour tester que* a_G *est un isomorphisme pour tout* G*, il suffit de le faire pour tout* Faisceau *(dévissage).*

Lorsque f est de descente cohomologique, les suite spectrales 2.4.1 et 2.4.5 deviennent, en notant $\mathrm{G}_p = f_p^*\mathrm{G}$,

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{R}^q f_*\mathrm{G}_p \Rightarrow \mathrm{G}^{p+q} \text{ et } \mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_p, \mathrm{G}_p) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{S}, \mathrm{G}).$$

Exemple 2.5.3. — *Le morphisme* $\epsilon : \mathrm{S}_\Delta \to \mathrm{S}$ *est descente cohomologique universelle. En effet, pour* F *Faisceau sur* S*, on a dans ce cas*

$$\mathrm{R}\epsilon_*\epsilon^*\mathrm{F} = \mathrm{F} \otimes (\mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{\pm 1} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \cdots).$$

Comme $\mathbf{Z}[0] \to (\mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{\pm 1} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \cdots)$ *est une équivalence d'homotopies, le résultat suit.*

Le résultat suivant est fondamental. On va en donner une démonstration simple[(3)] « à la main », qui est une version dégradée, au niveau de la cohomologie, d'un résultat plus fort, au niveau des

[(3)]Reprise de notes non publiées de B. Conrad catégories dérivées de « l'invariance par homotopie simpliciale ». Toutefois, ce dernier résultat semble mal s'adapter au cas simplicial strict

Lemme 2.5.4. — *Soit* $f_0 : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{S}$ *un morphisme de* $\mathbf{B}$ *ayant une section* σ *et* $f : \mathrm{X}_\bullet = \mathrm{cosq}(\mathrm{X}_0/\mathrm{S}) \to \mathrm{S}$. *Alors* f *est de descente cohomologique universelle.*

Démonstration. — La suite spectrale 2.4.1 définit des complexes

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{R}^q f_{p*} f^{p^*}\mathrm{G}, p \geq -1$$

pour tout $q \geq 0$ (différentielles de Cech). Montrons que ces complexes sont acycliques, en fait homotopes à zéro. On procède comme dans la descente des faisceaux cohérents en définissant des S-morphismes

$$h_p : \mathrm{X}_p \to \mathrm{X}_{p+1}$$

par la formule $h_p(x) = (\sigma(x), x)$. Comme h_p est S-linéaire, on a $f_{p+1} \circ h_p = f_p$ induisant une identication

$$h_p^* f_{p+1}^* \mathrm{G} = f_p^* \mathrm{G}. \tag{2.5.a}$$

On vérifie alors les formules

$$h_{p-1} \circ \partial^j = \partial^{j+1} \circ h_p \text{ si } 0 \leq j \leq p \text{ et } p \geq 1$$

tandis qu'on a

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{X}_p} = \partial^0 \circ h_p \text{ si } p \geq 0.$$

On définit alors une homotopie (vérifier !) entre l'identité et 0 par la formule

$$\mathrm{E}_1^{p+1,q} = \mathrm{R}^q f_{p+1*} f_{p+1}^* \mathrm{G} \xrightarrow{h_p^*} \mathrm{R}^q f_{p*} h_p^* f_{p+1}^* \mathrm{G} \overset{2.5.a}{=} \mathrm{R}^q f_{p*} f_p^* \mathrm{G} = \mathrm{E}_1^{p,q}.$$

On déduit déjà que la suite spectrale $\mathrm{E}_1^{p,q}, p, q \geq 0$ dégénère en E_2, et $\mathrm{R}^i f_* f^* \mathrm{G} = 0$ si $i > 0$ puis que $\mathrm{G} = f_* f^* \mathrm{G}$ d'après la remarque 2.4.2. □

Corollaire 2.5.5. — *Soit* $f_0 : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{S}$ *un morphisme surjectif de schémas. Si* $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *est localement une immersions ouverte (resp. propre, resp. lisse), alors* f *est de descente cohomologique universelle pour la catégorie fibrée des faisceaux étales (resp. étales de torsion, resp. étales de torsion inversible sur* S*).*

Démonstration. — Il suffit de prouver que f est un morphisme de descente. D'après 2.4.3 et les théorèmes de changements de bas *par* un morphisme qui est localement une immersion ouverte ou lisse, ou *pour* un morphisme propre, il suffit de prouver l'énoncé après tout changement de base surjectif, donc par exemple après le changement de base... $\mathrm{X}_0 \to \mathrm{S}$. Mais alors, f_0 devient une projection $\mathrm{X}_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{X}_0 \to \mathrm{X}_0$, qui a une section : la diagonale (on pourrait aussi tester sur les points géométriques de S ce qui supprime -le cache en fait- l'argument de section précédent). □

2.6. Fonctorialité en X de la suite spectrale de descente. — On considère un diagramme commutatif d'Espaces D-simpliciaux

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{Y} \arrow[dl, "g"] \\ & \mathrm{S}_{\mathrm{D}} & \end{tikzcd}$$

(sans hypothèses sur D pour le moment). On a d'une part
dés

$$\mathrm{R}g_*g^* = \mathrm{R}\epsilon_*\mathrm{R}g_*g^*\epsilon^* \text{ et } \mathrm{R}f_*f^* = \mathrm{R}\epsilon_*\mathrm{R}f_*f^*\epsilon^* = \mathrm{R}\epsilon_*\mathrm{R}g_*\mathrm{R}t_*t^*g^*\epsilon^*$$

La flèche d'adjonction

$$\mathrm{Id} \to \mathrm{R}t_*t^*$$

de foncteurs de $\mathrm{D}^+(\mathrm{S})$ induit donc une flèche

$$\eta_t : \ \mathrm{R}g_*g^* \to \mathrm{R}f_*f^*.$$

De même, on a des flèches

$$\eta_{t_p} : \mathrm{R}g_{p*}g_p^* \to \mathrm{R}f_{p*}f_p^*.$$

La fontorialité de la flèche d'adjonction assure que η_t dépend fonctoriellement de t. Montrons que η_t est compatible avec la suite spectrale de descente 2.4.1.

Lemme 2.6.1. — *On a un morphisme de suites spectrales de descente tel que*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}^q f_{p*}f_p^*\mathrm{G} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{R}^{p+q}f_*f^*\mathrm{G} \\ \mathrm{R}^q g_{p*}g_p^*\mathrm{G} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, "\eta_{t_p}"] & \mathrm{R}^{p+q}f_*f^*\mathrm{G} \arrow[u, "\eta_t"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Décrivons η_t dans un premier temps en remontant les flèches t_p au niveau des complexes calculant $\mathrm{R}f_*f^*$. Soit $[0 \to 1]$ la catégorie ayant pour objets $0, 1$ et une seule flèche non triviale disons c entre 0 et 1. On note D la catégorie $\Delta \times [0 \to 1]$. On construit l'Espace D-simplicial XtY défini par

$$\mathrm{X}t\mathrm{Y} :_{(m,0)} \mapsto \mathrm{Y}_m,_{(n,1)} \mapsto \mathrm{X}_n$$

et bien entendu, pour $\delta \in \mathrm{Hom}([m],[n])$, l'image de

$$(\delta, c) = (\delta, \mathrm{Id}_1) \circ (\mathrm{Id}_m, c) = (\mathrm{Id}_n, c) \circ (\delta, \mathrm{Id}_0) \in \mathrm{Hom}(_{(m,0)},_{(n,1)})$$

dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_m)$ est

$$t_m \circ \delta = \delta \circ t_n.$$

On a naturellement un Faisceau simplicial $\mathrm{G}t\mathrm{G}$ sur $\mathrm{X}t\mathrm{Y}$ qui vaut

$$g_m^*\mathrm{G} \text{ sur } \mathrm{Y}_m = \mathrm{X}t\mathrm{Y}_{(m,0)} \text{ et } f_n^*\mathrm{G} \text{ sur } \mathrm{X}_n = \mathrm{X}t\mathrm{Y}_{(n,1)}$$

avec pour seule flèche simpliciale « non évidente » la flèche canonique

$$(\delta, c)^*\mathrm{G}t\mathrm{G}_{(m,0)} = \delta^* t_m^* g_m^*\mathrm{G} = \delta^* f_m^*\mathrm{G} = f_n^*\mathrm{G} = \mathrm{G}t\mathrm{G}_{(n,1)}.$$

Choisissons une résolution $\mathrm{I}t\mathrm{J}$ à composantes injectives (par exemple privilégiée) de $\mathrm{G}t\mathrm{G}$ (2.1.2). On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} t_n^* g_n^*\mathrm{G} = t_n^*\mathrm{G}t\mathrm{G}_{(n,0)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & t_n^*\mathrm{I}t\mathrm{J}_{(n,0)} \arrow[d] \\ f_n^*\mathrm{G} = \mathrm{G}t\mathrm{G}_{(n,1)} \arrow[r] & \mathrm{I}t\mathrm{J}_{(n,1)} \end{tikzcd}.$$

Ceci fournit donc une résolution $\mathrm{I} = (\mathrm{I}t\mathrm{J}_{(n,1)})_n$ à composantes injectives (2.2) de $f^*\mathrm{G}$ et une résolution $\mathrm{J} = (\mathrm{I}t\mathrm{J}_{(n,0)})_n$ à composantes injectives de $g^*\mathrm{G}$ *et* un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} t^* g^*\mathrm{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & t^*\mathrm{J} \arrow[d] \\ f^*\mathrm{G} \arrow[r] & \mathrm{I} \end{tikzcd}.$$

Par application de f_*, on a une flèche

(2.6.a) $$\tau : \ g_*\mathrm{J} \xrightarrow{\text{adjonction}} g_* t_* t^*\mathrm{J} = f_* t^*\mathrm{J} \to f_*\mathrm{I}$$

et on a par construction (cf. 2.3.4)

$$\mathbf{s}_\Delta(\tau) = \eta_t.$$

Le lemme suit. □

2.7. Variantes bisimpliciales. — On a des variantes multisimpliciales, ie pour des espaces Δ^r-simpliciaux avec $r > 1$. Le foncteur complexe simple associé à un r-complexe définit encore un morphisme $\mathbf{s}_r : \mathrm{D}^+(\mathrm{S}_{\Delta^r}) \to \mathrm{D}(\mathrm{S})$ qui calcule $\mathrm{R}\epsilon_*$. En écrivant $\Delta_r = \Delta \times \Delta_{r-1}$, on peut écrire, un peu abusivement, $\mathbf{s}_r = \mathbf{s}_1 \circ \mathbf{s}_{r-1}$. Soit alors $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ un D-espace simplicial et notons $f_p : \mathrm{X}_{p,\bullet} \to \mathrm{S}$ le Δ_{r-1}-espace simplicial $i \mapsto \mathrm{X}_{p,i}$. L'analogue de la suite spectrale 2.4.1 est alors

(2.7.a) $$\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{R}^q f_{p*} f_p^*\mathrm{F}_p \Rightarrow \mathrm{R}^{p+q} f_*\mathrm{F}_\bullet$$

pour $\mathrm{F} \in \mathrm{D}^+(\mathrm{S}_{\Delta^r})$ avec F_p est la restriction de $\mathrm{F}_\bullet$ à $\mathrm{X}_p = \mathrm{X}_{p,\bullet}$. On aurait une autre suite spectrale du même type en écrivant par exemple $\Delta^r = \Delta^{r-1} \times \Delta$. Bien entendu, on a compatibilité à l'adjonction de ces suites spectrales au sens de 2.4.2 et fonctorialité en X comme dans le cas simplicial (2.6.1). Dans le cas bisimplicial, on parlera de suites spectrales des lignes ou colonnes.

2.8. Équivalences. — Soit $t : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de S-espaces simpliciaux (voire multisimpliciaux) comme plus haut.

Définition 2.8.1. — *On dira que t est une équivalence pour la descente cohomologique si η_t est un isomorphisme.*

Si on veut préciser S, on dira qu'on a une équivalence de S-descente cohomologique. Notons que c'est bien une relation d'équivalence.

Remarque 2.8.2. — *En particulier, appliquant cette au diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[rr, "f_\bullet"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{S}_\Delta \arrow[dl, "\epsilon"] \\ & \mathrm{S} & \end{tikzcd} ,$$

(2.5.3) entraîne que $f_\bullet$ est une équivalence de S*-descente cohomologique si et seulement si f est de descente cohomologique.*

Lemme 2.8.3. — *Soit $t : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme de* S*-espaces bisimpliciaux. On suppose que pour tout $p \geq 0$, le morphisme de* S*-espaces $t_p : \mathrm{X}_{p,\bullet} \to \mathrm{Y}_{p,\bullet}$ est une équivalence de* S*-descente cohomologique. Alors, t est une équivalence de* S*-descente cohomologique.*

Démonstration. — C'est une application immédiate de la fonctorialité de la suite spectrale des lignes de descente (2.7.a) et de sa compatibilité à l'adjonction (2.4.2). □

Si $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est morphisme de schémas simpliciaux, $\mathrm{cosq}_0(\mathrm{X}/\mathrm{Y})$ on identifie (cf. 1.1.3 ou plus généralement 4.4) au schéma bisimplicial dont l'image de (n, m) est le produit fibré

$$\mathrm{X}_n \times_{\mathrm{Y}_n} \cdots \times_{\mathrm{Y}_n} \mathrm{X}_n \ (m+1 \text{ facteurs})$$

-on pourrait intervertir n, m, ce qui ne changerait essentiellement rien-.
Commençons par un lemme trivial, mais utile.

Lemme 2.8.4. — *Soit $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ un* S*-espace et $t : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de* T*-espaces simpliciaux. Alors, si t est une équivalence de* T*-descente, t est une équivalence de* S*-descente.*

Démonstration. — Fixons les notations comme dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "a"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \mathrm{Y} \arrow[dl, "b"'] \arrow[ddl, bend left, "\beta"] \\ & \mathrm{T} \arrow[d, "\pi"] & \\ & \mathrm{S} & \end{tikzcd}$$

Soit G un Faisceau sur S. Le morphisme t induit des identifications $\mathrm{R}a_*a^*\pi^*\mathrm{G} = \mathrm{R}b_*\pi_*\mathrm{G}$ car t est de T-descente. Tenant compte de

$$\pi \circ a = \alpha, \pi \circ b = \beta,$$

on obtient en poussant par $\mathrm{R}\pi_*$ l'égalité

$$\mathrm{R}\alpha_*\alpha^*\mathrm{G} = \mathrm{R}\beta_*\beta^*\mathrm{G}.$$

$\square$

Proposition 2.8.5. — *Soit* $t : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de* S-*espaces simpliciaux. Supposons que pour tout* n *la flèche*

$$t_n : \mathrm{X}_n \to \mathrm{Y}_n$$

est de descente cohomologique. Alors, le morphisme de S-*espaces bisimpliciaux*

$$t = \mathrm{cosq}_0(f) : \mathrm{cosq}_0(\mathrm{X}/\mathrm{Y}) \to \mathrm{cosq}_0(\mathrm{Y}/\mathrm{Y})$$

est une équivalence de S-*descente cohomologique.*

Démonstration. — La ligne d'indice n de t est simplement $t_n : \mathrm{cosq}_0(\mathrm{X}_n/\mathrm{Y}_n) \to \mathrm{Y}_{n,\Delta}$ qui est une équivalence de Y_n-descente par hypothèse (cf. 2.8.2) donc de S-descente (2.8.4). On conclut grâce à 2.8.3 $\square$

Ce résultat est utile car on sait caractériser Y/S tel que $\mathrm{cosq}_0(\mathrm{Y}/\mathrm{Y})$ de descente cohomologique :

Lemme 2.8.6. — *Soit* Y *un* S-*espace simplicial. Alors,* Y *est de* S-*descente cohomologique si et seulement si l'espace bisimplicial* $\mathrm{cosq}_0(\mathrm{Y}/\mathrm{Y})$ *est de* S-*descente cohomologique.*

Démonstration. — On a $\mathrm{cosq}_0(\mathrm{Y}/\mathrm{Y})_{(n,m)} = \mathrm{Y}_n$ pour tout n, m de sorte que les colonnes de $\mathrm{cosq}_0(\mathrm{Y}/\mathrm{Y})$ s'identifient à Y. D'après (2.7.a) -et sa compatibilité à l'adjonction-, si Y est descente cohomologique, il en est de même de $\mathrm{cosq}_0(\mathrm{Y}/\mathrm{Y})$, donnant la partie directe.
Inversement, si (I^n) est une résolution privilégiée de $g^*\mathrm{G}$ (g est le morphisme canonique $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ et F un Faisceau de $\mathrm{S}_{\mathbf{F}}$), on obtient une résolution privilégiée de $f^*\mathrm{F}$ (avec f morphisme canonique $\mathrm{cosq}_0(\mathrm{Y}/\mathrm{Y}) \to \mathrm{S}$) simplement en posant

$$\mathrm{I}_{n,m} = \mathrm{I}_n \text{ sur } \mathrm{cosq}_0(\mathrm{Y}/\mathrm{Y})_{(n,m)} = \mathrm{Y}_n$$

le morphismes de fonctorialité se déduisant du premier facteur. On regarde alors le complexe triple calculant $\mathrm{R}f_*f^*\mathrm{G}$ comme le complexe double associé à $\mathbf{s}([\mathrm{I}^i_{n,m}]_{n,i})$. La différentielle à $n+i$ fixé est l'identité ou 0 suivant la parité de m (cf. 2.5.3). La suite spectrale du complexe double dégénère en E_2 donc la cohomologie est celle de $\mathbf{s}(\mathrm{I}_n)$. Ceci donne la réciproque. $\square$

2.9. Une application des techniques bisimpliciales. —

Lemme 2.9.1. — *Soient* X, Y *deux espaces* S*-simpliciaux. On suppose que* Y *est de* S*-descente cohomologique universelle. Alors, si* $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}(m)$ *est de* $\mathrm{Y}(m)$*-descente cohomologique pour tout* $m \geq 0$*, on a* X *de* S*-descente cohomologique.*

Démonstration. — D'après 2.8.6, l'espace bisimplicial $\mathrm{cosq}_0(\mathrm{Y}/\mathrm{Y})$ (de valeur en $\mathrm{cosq}_0(\mathrm{Y}/\mathrm{Y})_{(n,m)} = \mathrm{Y}_n$) est de S-descente cohomologique comme Y. Utilisant l'isomorphisme de $\Delta \times \Delta$ défini par $(n, m) \mapsto (m, n)$, on en déduit que l'Espace bisimplicial défini par $\mathcal{Y}_{(n,m)} = \mathrm{Y}_m$ est de S-descente cohomologique puisque Y l'est. On a un diagramme d'objets bisimpliciaux

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "d"] & \\ \mathrm{cosq}_0(\mathrm{X}/\mathrm{X}) & & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

de sorte qu'il s'agit de prouver que g et d sont des équivalences de descente cohomologiques.
-Pour g, on regarde les lignes, *ie* n fixé et m variable. Dans ce cas, $g_{n,\bullet}$ est le morphisme d'espaces simpliciaux

$$\mathrm{X}_n \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y} \to (\mathrm{X}_n)_\Delta$$

déduit de $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}_\Delta$ qui est une équivalence par hypothèse sur Y d'après (2.8.3).
-Pour d, on regarde les colonnes, *ie* m fixé et n variable. Mais d_m est le morphisme d'espaces simpliciaux

$$\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}_m \to (\mathrm{Y}_m)_\Delta$$

qui est une équivalence par hypothèse. Ainsi, $\mathrm{cosq}_0(\mathrm{X}/\mathrm{X})$ est de descente cohomologique comme $\mathcal{Y}$, et on conclut par (2.8.6). □

Corollaire 2.9.2. — *Soit* $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}, g : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *des morphismes de* **B**. *On suppose* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *de descente cohomologique universelle. Alors,* f *de descente cohomologique (resp. de descente cohomologique universelle) si et seulement si elle le devient après changement de base par* g.

Démonstration. — La partie directe est tautologique.
Posons $\mathrm{X} = \mathrm{cosq}_0(\mathrm{T}/\mathrm{S})$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{cosq}_0(\mathrm{S}'/\mathrm{S})$ de sorte que $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ est de descente cohomologique et supposons $\mathrm{T}' = \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$ de descente cohomologique universelle. Montrons que $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}_m$ est de Y_m descente ce qui montrera d'après 2.9.1 que X est de S-descente. Mais,

$$\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}_m = \mathrm{cosq}_0(\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}_m/\mathrm{Y}_m) = \mathrm{cosq}_0(\mathrm{T}' \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{Y}_m/\mathrm{Y}_m)$$

où $\mathrm{Y}_m = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \cdots \mathrm{S}', m+1$ facteurs est un S′-espace via la première projection et donc est de descente cohomologique. Les hypothèses étant invariantes par changement de base $\Sigma \to \mathrm{S}$, le résultat suit. □

Montrons alors comment 2.9.2 permet d'obtenir les résultats de stabilité suivant.

Proposition 2.9.3. — *Soient* $f : \mathrm{R} \to \mathrm{S}, g : \mathrm{S} \to \mathrm{T}$ *deux morphismes de* $\mathbf{B}$*.*

i) Si $h = g \circ f$ *est de descente cohomologique universelle, il en est de même de* g*.*

ii) Si f, g *de descente cohomologique universelle, il en est de même de* $h = g \circ f$*.*

iii) Si $\mathrm{T}, \mathrm{T}' \to \mathrm{S}$ *sont de descente cohomologiques universelles, il en est de même de* $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}' \to \mathrm{S}$*.*

iv) Si $\mathrm{X}_i \to \mathrm{Y}_i, i = 1, 2$ *sont des* S*-morphismes de descente cohomologique universelle, il en est de même de* $\mathrm{X}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_2 \to \mathrm{Y}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}_2$*.*

Démonstration. — Regardons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{S} \arrow[r, "\hbar"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{S} \arrow[d, "g"] \\ \mathrm{R} \arrow[r, "h"] & \mathrm{T} \end{tikzcd}$$

Prouvons i). D'après 2.9.2, il suffit que l'image inverse γ de g par h (application graphe) est de descente cohomologique (les hypothèses sont invariantes par changement de base). Comme $s = (\mathrm{Id}, f)$ est une section de γ, ce dernier est donc de descente cohomologique d'après 2.5.4.

Prouvons ii). Le composé $\hbar \circ s$ est f, qui est de descente cohomologique universelle. Le point i) assure que $\hbar$ est de descente cohomologique (universelle). En regardant le diagramme précédent, vu comme diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{S} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\hbar"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{R} \arrow[d, "h"] \\ \mathrm{S} \arrow[r, "g"] & \mathrm{T} \end{tikzcd} ,$$

on conclut alors grâce à 2.9.2 que h est descente cohomologique universelle puisque g est de descente cohomologique universelle.

Prouvons iii). Il suffit de factoriser $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}' \to \mathrm{S}$ en

$$\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}' \to \mathrm{T} \to \mathrm{S}$$

et d'invoquer (2.9.2) et ii).

Prouvons iv). On factorise le morphisme produit en $\mathrm{X}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_2 \to \mathrm{Y}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}_2$ en

$$\mathrm{X}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_2 \to\to \mathrm{Y}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}_2 \to \mathrm{Y}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}_2$$

et on invoque -deux fois- (2.9.2) et ii). □

Remarque 2.9.4. — *Plus généralement, supposons qu'on ait un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
X'_1 \arrow[dr] \arrow[dd] & & X'_2 \arrow[dl] \arrow[dd] \\
& S' \arrow[dd] & \\
X_1 \arrow[dr] & & X_2 \arrow[dl] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont de descente cohomologiques universelles, alors

$$X'_1 \times_{S'} X'_2 \to X_1 \times_S X_2$$

est de descente cohomologique universelle. En effet, il suffit de remarquer que le carré

$$\begin{tikzcd}
X'_1 \times_{S'} X'_2 \arrow[r] \arrow[d] & S' \arrow[d] \\
X'_1 \times_S X'_2 \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

est cartésien pour conclure grâce à 2.9.3 que la flèche en question est le composé de deux flèches de descente cohomologiques universelles, à savoir

$$X'_1 \times_{S'} X'_2 \to X'_1 \times_S X'_2 \to X_1 \times_S X_2.$$

3. La topologie de la descente

Pour définir la topologie de la descente, on fera les hypothèses supplémentaires suivantes, l'une sur $\mathbf{B}$, l'autre sur les catégories $\mathbf{F}$ de faisceaux sur des objets de $\mathbf{B}$ (cf. 1.5).

-On suppose que $\mathbf{B}$ des coproduits quelconques et que ces coproduits sont disjoints et universels. Rappelons qu'une somme est disjointe si les morphismes canoniques $\mathrm{S}_i \to \coprod \mathrm{S}_i$ sont des monomorphismes et si les produits $\mathrm{S}_i \times_{\coprod \mathrm{S}_i} \mathrm{S}_j$ sont vides, *ie* initiaux, dès que $i \neq j$. On demande donc aux coproduits d'êtres disjoints, et ce universellement.

-On suppose que la flèche naturelle

$$\mathbf{F}(\coprod \mathrm{S}_i) \to \prod \mathbf{F}(\mathrm{S}_i)$$

est une équivalence de catégories.

Bien entendu, ces conditions sont trivialement vérifiées dans la pratique.

Définition 3.0.5. — *On dit qu'une famille de morphismes* $(\mathrm{S}_i \to \mathrm{S})_{i\in \mathrm{I}}$ *de* $\mathbf{B}$ *est couvrante si le morphisme*

$$\coprod \mathrm{S}_i \to \mathrm{S}$$

est de descente cohomologique universelle.

La terminologie est justifiée par le résultat fondamental suivant.

Théorème 3.0.6. — *Les familles couvrantes* $(\mathrm{S}_i \to \mathrm{S})_{i\in \mathrm{I}}$ *au sens de (3.0.5) engendrent une topologie de Grothendieck sur* $\mathbf{B}$*, dite de la* descente cohomologique universelle*, dont elles sont les seules familles couvrantes.*

Démonstration. —

-L'identité de S est couvrante (2.5.3) et, partant, de même pour tout isomorphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Soit alors $(\mathrm{S}_i \to \mathrm{S})_{i\in \mathrm{I}}$ une famille couvrante de S.

-Stabilité par changement de base. Soit $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme de $\mathbf{B}$. Par hypothèse, le morphisme $(\coprod \mathrm{S}_i) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$ est couvrant. Mais on a supposé que les coproduits sont universels, de sorte que $(\coprod \mathrm{S}_i) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ s'identifie à $\coprod \mathrm{S}_i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ prouvant bien que la famille $(\mathrm{S}_i \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}')_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille couvrante de S'.

-Stabilité par raffinement. Pour tout i, soit $(\mathrm{S}_{i,j})_{j\in \mathrm{J}(i)}$ une famille couvrante de S_i. On doit vérifier que la famille

$$\coprod_{\substack{i\in \mathrm{I}\\ j\in \mathrm{J}(i)}} \mathrm{S}_{i,j} \to \mathrm{S}$$

est couvrante. La famille

$$\coprod_{\substack{i\in \mathrm{I}\\ j\in \mathrm{J}(i)}} \mathrm{S}_{i,j} \to \mathrm{S}$$

se factorise en

$$\coprod_{i\in \mathrm{I}}\coprod_{j\in \mathrm{J}(i)} \mathrm{S}_{i,j} \to \coprod_i \mathrm{S}_i \to \mathrm{S}.$$

Les coproduits étant universels, on est ramené grâce à 2.9.3 à prouver le lemme suivant.

Lemme 3.0.7. — *Soit* $(u_i : \mathrm{T}_i \to \mathrm{S}_i)$ *une famille de morphismes de* $\mathbf{B}$. *On suppose que chaque morphisme de la famille est de descente cohomologique. Alors, il en est de même de*

$$u = \coprod u_i : \coprod \mathrm{T}_i \to \coprod \mathrm{S}_i.$$

Démonstration. — Maintenant, comme les Faisceaux sur le coproduit des S_i s'identifient aux familles de faisceaux sur les S_i, on obtient une résolution privilégiée sur le coproduit simplement en choisissant une résolution privilégiée de chacun des facteurs. Le complexe calculant $\mathrm{R}u_*$ comme dans 2.3.4 est alors simplement la famille des complexes $\mathrm{R}u_{i*}$ obtenus sur chaque facteur, ce qui prouve le lemme. Rappelons qu'un morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$ est couvrant pour la topologie engendrée s'il l'est localement, autrement dit s'il existe une famille $(\mathrm{S}_i \to \mathrm{S})$ couvrante tel que pour tout i le morphisme $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S} \to \mathrm{S}_i$ est couvrant. Du corollaire 2.9.2 et de la proposition 2.9.3, on déduit immédiatement que les morphismes couvrants pour la topologie de la descente cohomologique universelle sont exactement les morphismes de descente cohomologique universelle, ce qui justifie *a posteriori* la terminologie. □

□

Remarque 3.0.8. — *On remarquera que tous les résultats obtenus jusqu'à maintenant sont valables mutatis mutandis dans le cas simplicial strict, ılorsqu'on remplace* Δ *par la sous-catégorie de* Δ *dont les morphismes sont les* injections *croissantes. Comme* $\mathrm{R}\epsilon_*$ *se calcule tant dans le cas simplicial que dans le cas simplicial en utilisant uniquement la structure stricte, les calculs d'image directes* $\mathrm{R}f_*$ *coïncident pour un schéma simplicial et sa restriction en espace simplicial strict. L'invariance par homotopie qui suit ne semble pas subsister. Comme on le verra en (6), on peut en fait s'en passer pour l'essentiel des applications (cf. (6.1.8)).*

4. Invariance par homotopie

Dans tout ce qui suit, on se fixe implicitement une base S de **B**. Les espaces simpliciaux (stricts) considérés seront au-dessus de S, à savoir des foncteurs contravariants $\Delta \to \mathbf{B}_{/\mathrm{S}}$ et les produits seront des produits fibrés sur S. De même, les limites projectives sont implicitement calculées dans $\mathbf{B}_{/\mathrm{S}}$.

4.1. Homotopies simpliciales. — Avant d'aller plus loin, rappelons la notion d'**homotopie** d'objets simpliciaux, cosimpliciaux. On se donne une catégorie A, et, pour simplifier, on suppose qu'on a des produits et coproduits finis dans A. Un objet simplicial (resp. cosimplicial) à valeurs dans A est simplement un foncteur contravariant (resp. covariant) $\Delta \to \mathrm{A}$. On identifie tout objet $[n]$ de Δ à un ensemble simplicial (lemme de Yoneda) en posant

$$[n](k) = \mathrm{Hom}_\Delta([k],[n]).$$

Comme A admet des coproduits finis, le produit $a \times \mathrm{F} = \coprod_\mathrm{F} a$ est défini ainsi que $a^\mathrm{I} = \prod_\mathrm{I} a$.

a) Homotopies simpliciales. —

Définition 4.1.1. — *Soient* X, Y *deux objets simpliciaux à valeurs dans* A *et* $n \in \mathbf{N}$*..*
- *L'objet simplicial* $\mathrm{X} \times [n]$ *est défini par* $(\mathrm{X} \times [n])_k = \coprod_{\mathrm{Hom}([k],[n])} \mathrm{X}_k$ *et les applications de fonctorialité évidentes.*
- *Une morphisme simplicial* $h : \mathrm{X} \times [1] \to \mathrm{Y}$ *est appelé une homotopie de* X *dans* Y*.*

Géométriquement, $\mathrm{X} \times [1]$ est le préfaisceau $(\mathbf{B} \times \Delta)^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ens}$ produit des préfaisceaux

$$(\mathbf{B} \times \Delta)^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{B}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ens}$$

(défini par X) et

$$(\mathbf{B} \times \Delta)^{\mathrm{opp}} \to \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ens}$$

(défini par [1] -Yoneda-). Ainsi, l'ensemble simplicial [1] joue le rôle de l'intervalle $[0,1]$ en théorie de l'homotopie usuelle. Explicitement, on se donne des morphismes $h(\xi) : \mathrm{X}_n \to \mathrm{Y}_n, \xi \in \mathrm{Hom}([n],[1])$ faisant commuter les diagrammes

(4.1.a)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X}_m & \xrightarrow{h(\xi\circ u)} & \mathrm{Y}_m \\ {\scriptstyle u}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle u} \\ \mathrm{X}_n & \xrightarrow{h(\xi)} & \mathrm{Y}_n \end{array}$$

pour tout $u \in \mathrm{Hom}([m],[n])$.
Notons que X est canoniquement isomorphe à $\mathrm{X} \times [0]$. Les deux applications r_0, r_1 de $\mathrm{Hom}_\Delta([0],[1])$ induisent par fonctorialité deux morphismes $(0),(1) : \mathrm{X} = \mathrm{X} \times [0] \to \mathrm{X} \times [1]$. En particulier, $h(0), h(1)$ ont une grande vertu : ce sont des morphismes d'objets simpliciaux.

Définition 4.1.2. — *Deux morphismes* $e, e' : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *d'objets simpliciaux à valeurs dans* A *sont dits homotopes s'il existe une homotopie* h *de* X *dans* Y *telle que* $h(0) = e$ *et* $h(1) = e'$.

b) Homotopies cosimpliciales. — Supposons que I, I' sont des objets cosimpliciaux à valeurs dans A. On note $\mathrm{I}^{\mathrm{opp}}, \mathrm{I}'^{\mathrm{opp}}$ les objets simpliciaux correspondants à I, I' en les considérant comme des objets simpliciaux à valeurs dans $\mathrm{A}^{\mathrm{opp}}$. Une homotopie

$$h' : \mathrm{I}'^{\mathrm{opp}} \times_{\mathrm{A}'} [1] \to \mathrm{I}^{\mathrm{opp}}$$

d'objets simpliciaux à valeurs dans A' s'identifie à un morphisme (co)simplicial

$$h : \mathrm{I} \to \mathrm{I}'^{[1]}$$

où $\mathrm{I}'^{[1]}$ est l'objet cosimplicial défini par

$$(\mathrm{I}'^{[1]})_k = \mathrm{I}'^{\mathrm{Hom}([k],[1])}_k$$

et les applications de fonctorialité évidentes. Les morphismes $r_0, r_1 \in \mathrm{Hom}_\Delta([0],[1])$ définissent des morphismes

$$\pi_0, \pi_1 : \mathrm{I}'^{[1]} \to \mathrm{I}'^{[0]} = \mathrm{I}'.$$

On note alors -très abusivement ici- $h(0) = h'(0) = \pi_0 \circ h$ et $h'(1) = h'(1) = \pi_1 \circ h$ qui sont des morphismes d'objets cosimpliciaux.
Explicitement, on se donne des morphismes $h(\xi) : \mathrm{I}_n \to \mathrm{I}'_n, \xi \in \mathrm{Hom}([n],[1])$ -qu'on devrait plutôt noter h_ξ- faisant commuter les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I}_m \arrow[r, "h(\xi\circ u)"] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{I}'_m \arrow[d, "u"] \\ \mathrm{I}_n \arrow[r, "h(\xi)"] & \mathrm{I}'_n \end{tikzcd} \tag{4.1.b}$$

pour tout $u \in \mathrm{Hom}([m],[n])$. On pose alors la définitions suivante

Définition 4.1.3. — *Soient* I, I' *deux objets cosimpliciaux à valeurs dans* A *et* $n \in \mathbf{N}$..
– *L'objet simplicial* $\mathrm{I}'^{[n]}$ *est défini par* $(\mathrm{I}'^{[n]})_k = \prod_{\mathrm{Hom}([k],[n])} \mathrm{I}'_k$ *et les applications de fonctorialité évidentes.*
– *Une morphisme simplicial* $h : \mathrm{I} \to \mathrm{I}'^{[1]}$ *est appelé une homotopie de* I *dans* I'.
– *Deux morphismes* $e, e' : \mathrm{I} \to \mathrm{I}'$ *sont dits homotopes s'il existe une homotopie* h *de* I *dans* I' *telle que* $h(0) = e$ *et* $h(1) = e'$.

4.2. Homotopies de Faisceaux de $\mathrm{S}_{\Delta,\mathbf{F}}$. — Soient I, I' deux complexes de Faisceaux abéliens sur S_Δ : ce sont des objets *cosimpliciaux* à valeurs dans la catégorie A des complexes de Faisceaux (abéliens) de $\mathrm{S}_\mathbf{F}$. On se donne deux morphismes $\tau, \tau' \in \mathrm{Hom}(\mathrm{I}, \mathrm{I}')$ qui sont *homotopes*.
Explicitant la définition 4.1.3, ceci signifie l'existence pour tout $\xi \in \mathrm{Hom}([n],[1])$, de $h(\xi) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{I}_n, \mathrm{I'}_n)$ tel que $h(1) = \tau, h(0) = \tau'$ vérifiant (4.1.b).
L'intérêt pour nous de cette notion est le lemme classique suivant (conséquence plus ou moins formelle de la correspondance de Dold-Puppe entre Faisceaux cosimpliciaux et complexes de cochaînes nuls en degré < 0).

Lemme 4.2.1. — *Si τ, τ' sont homotopes, $f = \mathbf{s}(\tau)$ et $g = \mathbf{s}(\tau')$ induisent des applications homotopes entres complexes simples $\mathrm{F} = \mathbf{s}(\mathrm{I})$ et $\mathrm{G} = \mathbf{s}(\mathrm{I}')$.*

Démonstration. — On note

$$e^i : [n] \to [1], i = -1, \cdots, n$$

l'application qui est nulle sur $\{0, \cdots, i\}$ et qui vaut 1 sur $\{i+1, \cdots, n\}$. Ainsi, e^{-1} est l'application constante (1) tandis que e^n est (0) (conformément à l'usage simplicial, on note un peu abusivement e^i en omettant la référence à la source $[n]$ de cette application, qui sera claire dans le contexte) .
Faisons d'abord le calcul dans le cas où I et I′ sont simplement concentrés en degré 0 (pas de différentielle). On expliquera ensuite les changements mineurs à apporter dans le cas général.
Rappelons que la différentielle simpliciale est définie sur $\mathbf{s}(\mathrm{I})^n = \mathrm{I}_n$ par

$$\mathrm{d} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \partial^j$$

où $\partial^j : [n] \to [n+1]$ est le j-ème opérateur de face.
On a alors

$$(f, g) = (h(e^{-1}), h(e^n)).$$

Pour définir l'homotopie de complexes H, on a besoin des opérateurs de dégénérescence $s^i, i = 0, \cdots, n$ définis par

$$s^i : \begin{cases} [n+1] & \to & [n] \\ j & \mapsto & \begin{cases} j \text{ si } j \leq i \\ j-1 \text{ sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

(s^i est l'application croissante surjective telle que $s^i(i) = s^i(i+1)$). Posons alors

$$\mathrm{H} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j s^j \circ h(e^j).$$

On a

(4.2.a) $$\mathrm{H}\circ \mathrm{d}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{i+j}s^j\circ h(e^j)\circ\partial^i$$

et

$$\mathrm{d}\circ\mathrm{H}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{i+j}\partial^i\circ s^j\circ h(e^j).$$

On réécrit (4.2.a) tenant compte de (4.1.b) :

(4.2.b) $$\mathrm{H}\circ \mathrm{d}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{i+j}s^j\circ\partial^i\circ h(e^j\circ\partial^i)$$

et on découpe la somme suivant que $i<j, i=j, j+1$ et $i>j+1$.
-Si $i<j$, on a $e^j\circ\partial^i=e^{j-1}$ et $s^j\circ\partial^i=\partial^i\circ s^{j-1}$. Ainsi, on a

$$\sum_{i<j}=\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\partial^i\circ s^{j-1}\circ h(e^{j-1})=-\sum_{i\leq j}(-1)^{i+j}\partial^i\circ s^j\circ h(e^j)$$

-Si $i=j,j+1$, on a $s^j\circ\partial^i=\mathrm{Id}$ alors que $e^j\circ\partial^j=e^{j-1}$ et $e^j\circ\partial^{j+1}=e^j$ pour tout $j>0$. Ainsi, on a

$$\sum_{i=j,j+1}=\sum_{j=0}^{n}h(e^{j-1})-\sum_{j=0}^{n}h(e^j)=h(e^{-1})-h(e^n).$$

-Si $i>j+1$, on a $e^j\circ d^i=e^j$ et $s^j\circ\partial^i=\partial^{i-1}\circ s^j$. Ainsi, on a

$$\sum_{i>j+1}=\sum_{i>j+1}(-1)^{i+j}\partial^{i-1}\circ s^j\circ h(e^j)=-\sum_{i>j}(-1)^{i+j}\partial^i\circ s^j\circ h(e^j).$$

Au final, on obtient

(4.2.c) $$\mathrm{H}\circ\mathrm{d}+\mathrm{d}\circ\mathrm{H}=h(e^{-1})-h(e^n).$$

Variante. Si maintenant $h:\mathrm{I}\to\mathrm{I}'$ est une homotopie de *complexes* cosimpliciaux de différentielles δ_p^q sur $\mathrm{I}_p^q,\mathrm{I}'^q_p$ (p indice cosimplicial, q exposant cohomologique), on a les complexes simples

$$\mathbf{s}(\mathrm{I})^n=\bigoplus_{p+q=n}\mathrm{I}_p^q \text{ét} \mathbf{s}(\mathrm{I}')^n=\bigoplus_{p+q=n}\mathrm{I}'^q_p$$

avec les différentielles

$$\mathrm{d}^n_{|\mathrm{I}_p^q}=\delta_p^q+(-1)^p\mathrm{d}_p^q.$$

Bien entendu, $\mathbf{s}(\tau),\mathbf{s}(\tau')$ sont des morphismes de complexes simples et sont encore homotopes. Si $h^q=(h_p^q)$ est l'homotopie précédente du Faisceau cosimplicial $\mathrm{I}^q=(\mathrm{I}_p^q)$, on vérifie que la famille des $(-1)^{p-1}h_p^q$ est une homotopie. □

4.3. Invariance par homotopie. — On se donne donc deux S-morphismes d'espaces simpliciaux

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[rr, shift left, "t"] \arrow[rr, shift right, "t'"'] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{Y} \arrow[dl, "g"] \\ & \mathrm{S} & \end{tikzcd} .$$

On veut comparer η_t et $\eta_{t'}$ (2.8.1) dans le cas où t, t' sont homotopes (4.1.2).
Explicitement (4.1.a) ceci signifie qu'il existe pour tout $\xi \in \mathrm{Hom}([n], [1])$ des S-morphismes

$$h_n(\xi) : \ \mathrm{X}_n \to \mathrm{Y}_n$$

vérifiant (4.2.a) avec $h_n(0) = t_n, h'_n(1) = t'_n$

Proposition 4.3.1. — *Supposons* $\mathrm{D} = \Delta$*. Si* t, t' *sont homotopes, alors* $\eta_t = \eta_{t'}$*.*

Démonstration. — Il suffit de prouver l'égalité $\eta_t(\mathrm{G}) = \eta_{t'}(\mathrm{G})$ lorsque G est un Faisceau (compatibilité de η avec les triangles). On raffine les méthodes utilisées pour calculer η_t en (2.6.1) afin de relever l'homotopie d'espaces simpliciaux au niveau des complexes. On définit ici D comme étant la catégorie suivante
-les objets sont à nouveau les couples $(m, 0), (n, 1), n, m \in \mathbf{N}$;
- on met plus de morphismes que précédemment (pour tenir compte de h) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}((m, 0), (n, 0)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}((m, 1), (n, 1)) = \mathrm{Hom}_{\Delta}([m], [n])$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}((n, 0), (n, 1)) = \mathrm{Hom}_{\Delta}([n], [1]),$$

la composition étant induite par celle de Δ. De même que plus haut, une homotopie $h : \mathrm{X} \times [1] \to \mathrm{Y}$ permet définir un schéma D-simplicial $\mathrm{X}h\mathrm{Y}$ qui à $(n, 1)$ associe X_n, à $(m, 0)$ associe Y_m et à

$$\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}((m, 0), (n, 1)) = \mathrm{Hom}_{\Delta}([n], [1]) \text{ associe } h_n(\xi).$$

Comme plus haut, on définit un faisceau $(\mathrm{G}h\mathrm{G})$ sur $\mathrm{X}h\mathrm{Y}$ qui vaut

$$g_m^*\mathrm{G} \text{ sur } \mathrm{Y}_m = \mathrm{X}h\mathrm{Y}_{(m,0)} \ \text{ et } f_n^*\mathrm{G} \text{ sur } \mathrm{X}_n = \mathrm{X}h\mathrm{Y}_{(n,1)},$$

l'application de fonctorialité associée à ξ étant déduite comme précédemment de l'identité

$$g_n \circ h_n(\xi) = f_n$$

(rappelons que $h_n(\xi)$ est un S-morphisme par hypothèse). Choisissons une résolution privilégiée $\mathcal{K}$ de $(\mathrm{G}h\mathrm{G})$ et posons encore $\mathrm{I} = \mathcal{K}_{(\bullet,1)}$ et $\mathrm{I}' = \mathcal{K}_{(p,0)}$. On a en particulier pour tout $\xi \in \mathrm{Hom}([n], [1])$ un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} h_n(\xi)^*\mathrm{I}'_n \arrow[r] & \mathrm{I}_n \\ h_n(\xi)^*g_n^*\mathrm{G} \arrow[r] \arrow[u] & f_n^*\mathrm{G} \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

Comme précédemment, par application de f_n*, on a une flèche

$$h_n(\xi):\ g_{n*}\mathrm{I}'_n \xrightarrow{adjonction} g_{n*}h_n(\xi)_*h_n(\xi)^*\mathrm{I}'_n = f_{n*}h_n(\xi)^*\mathrm{I}'_n \to f_{n*}\mathrm{I}_n$$

avec $h(0) = \mathbf{s}(\tau')$ et $h(1) = \mathbf{s}(\tau)$. Bien entendu, les $h_n(\xi)$ définissent une homotopie (cosimpliciale) entre $h(0), h(1) \in \mathrm{Hom}(f_*\mathrm{I}, g_*\mathrm{I}')$. La proposition résulte alors de 2.6.a et de 4.2.1. $\square$

Corollaire 4.3.2. — *Soit f un morphisme de* S*-espaces simpliciaux qui a un inverse à homotopie près. Alors, f est une équivalence de* S*-descente cohomologique.*

4.4. Cosquelettes. — On va d'abord faire quelques rappels simpliciaux.
Soit X est un S-espace simplicial (au dessus de S donc), le squelette $\mathrm{sq}_n(\mathrm{X})$ est la restriction de X à Δ_n.

Définition 4.4.1. — *L'adjoint à droite du foncteur (n-)squelette* sq_n *est le foncteur (n-)cosquelette* cosq_n.

Pour $n = 0$, on retrouve (1.1.3). On a ainsi une identification fonctorielle en X, Y

(4.4.a) $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{sq}_n(\mathrm{X}), \mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{cosq}_n(\mathrm{Y})).$$

Il est facile d'expliciter le foncteur cosquelette en termes de limite projective. On a simplement

(4.4.b) $$\mathrm{cosq}_n(\mathrm{Y})_p = \varprojlim_{\substack{[q]\to[p] \\ q\leq n}} \mathrm{Y}_q$$

Si $p \leq n$, la catégorie d'indices a un élément final : l'identité de $[p]$ de sorte qu'on a $\mathrm{sq}_m\mathrm{cosq}_n = \mathrm{sq}_m$ si $m \leq n$.
En fait, dans le calcul précédent de limite, on peut se limiter aux *injections* croissantes pour calculer cette limite projective. Plus précisément, la flèche de projection

(4.4.c) $$\mathrm{cosq}_n(\mathrm{Y})_p = \varprojlim_{\substack{[q]\to[p] \\ q\leq n}} \mathrm{Y}_q \to \varprojlim_{\substack{[q]\hookrightarrow[p] \\ q\leq n}} \mathrm{Y}_q$$

est un isomorphisme.

Remarque 4.4.2. — *Fixons $p, n \geq -1$. La catégorie des* injections $[q] \hookrightarrow [p]$ *avec $q \leq n$ s'identifie à l'ensemble ordonné (vu comme catégorie discrète) par l'inclusion des parties* Q *de* $[p]$ *de cardinal* $\leq n+1$. *Posant* $\mathrm{X_Q} = \mathrm{X_{card(Q)-1}}$, *la formule 4.4.c devient alors*

$$\mathrm{cosq}_n(\mathrm{Y})_p = \varprojlim_{\substack{\mathrm{Q}\subset[p]\\ \mathrm{card(Q)}\leq n+1}} \mathrm{Y_Q}.$$

On notera simplement cosq_n, abusivement, le foncteur composé $\mathrm{cosq}_n\mathrm{sq}_n$.
Si $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme de schémas simpliciaux, $\mathrm{cosq}_0(\mathrm{X/Y})$ (calculé dans la catégorie des espaces simpliciaux sur Y) s'identifie au schéma bisimplicial dont l'image de (n, m) est le produit fibré

$$\mathrm{X}(m) \times_{\mathrm{Y}(m)} \cdots \times_{\mathrm{Y}(m)} \mathrm{X}(m) \ (n+1 \text{ facteurs.}).$$

Bien entendu, on a $\mathrm{sq}_n\mathrm{cosq}_m(\mathrm{X}) = \mathrm{sq}_n(\mathrm{X})$ si $m \geq n$ qui conduit formellement à

$$\mathrm{cosq}_m\mathrm{cosq}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X}) \text{ si } m \geq n. \tag{4.4.d}$$

La formule suivante sera utile.

Lemme 4.4.3. — *Soit* $\mathrm{X}_i \to \mathrm{Y}, i = 1, 2$ *deux morphismes de* S*-espaces simpliciaux. Alors, on a*

$$\mathrm{cosq}_n(\mathrm{X}_1 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_2) = \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X}_1) \times_{\mathrm{cosq}_n(\mathrm{Y})} \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X}_2).$$

Démonstration. — Preuve formelle par adjonction à partir de la formule tautologique

$$\mathrm{sq}_n(\mathrm{X}_1 \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}_2) = \mathrm{sq}_n(\mathrm{X}_1) \times_{\mathrm{sq}_n(\mathrm{Y})} \mathrm{sq}_n(\mathrm{X}_2).$$

□

4.5. Le lemme fondamental. — La remarque clef qui conduira à la preuve du critère 5.1.5 est l'énoncé suivant. C'est le seul endroit où l'invariance par homotopie est utilisée de façon cruciale.

Proposition 4.5.1. — *Soient* $f, g : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *des morphismes de* S*-schémas simpliciaux n-tronqués. Si $f_p = g_p$ pour $p < n$, les morphismes* $\mathrm{cosq}_n(f)$ *et* $\mathrm{cosq}_n(g)$ *sont homotopes et en particulier $\eta_f = \eta_g$. En particulier, si f a une section s,* $\mathrm{cosq}_n(f)$ *est une équivalence de* S*-descente cohomologique universelle.*

Démonstration. — Le dernier point résulte du premier et de 4.3.2 car $\mathrm{cosq}_n(s)$ est un inverse à homotopie près de $\mathrm{cosq}_n f$. Pour le second, on écrit explicitement l'homotopie $h_p(\xi) : \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})_p \to \mathrm{cosq}_p(\mathrm{Y})_p$ pour $\xi \in \mathrm{Hom}([p], 1)$ de la manière suivante. Si $p \leq n$, on $\mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})_p = \mathrm{X}_p$ et $\mathrm{cosq}_n(\mathrm{Y})_p = \mathrm{Y}_p$ et on pose $h_p(\xi) = f_p = g_p$ pour $p < n$. Pour $p = n$, on envoie $(0) \in \mathrm{Hom}([n], [1])$ sur f_n et les autres sur g_n. Pour $k > n$, on observe que la flèche

$$\mathrm{Hom}([k], [1]) \to \varprojlim_{\substack{[q]\to[k]\\ q\leq n}} \mathrm{Hom}([q], [1]) = \varprojlim_{\substack{[q]\hookrightarrow[k]\\ q\leq n}} \mathrm{Hom}([q], [1])$$

est bijective (le membre de droits s'identifie aux applications des parties à n éléments de $[k]$ dans $[1]$ compatibles sur les sous parties : en fait, on à montrer un isomorphisme d'ensemble simpliciaux $[1] \rightarrow \operatorname{cosq}_n([1])$). Ceci permet grâce à (4.4.b) de définir les $h_k, k > n$ à partir des $h_k, k \leq n$. Si maintenant s a une section, on a d'abord $\operatorname{cosq}_n(t)\operatorname{cosq}_n(s) = \operatorname{Id}$ (fonctorialité) et $\operatorname{cosq}_n(s)\operatorname{cosq}_n(t)$ homotope à l'identité de $\operatorname{cosq}_n(\mathrm{X})$ d'après le premier point. On conclut grâce à 4.3.1. $\square$

5. Le critère de descente

On va prouver donner un critère (5.1.5) très commode assurant qu'un S-espace simplicial est de descente cohomologique.

5.1. Approximation d'un morphisme par des cosquelettes.— Commençons par un lemme utile. On reprend notre morphisme $t : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ de S-espaces simpliciaux donnant lieu au diagramme de topos noté abusivement :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{Y} \arrow[dl, "g"] \\ & \mathrm{S} & \end{tikzcd} .$$

Lemme 5.1.1. — *Supposons que $t_p : \mathrm{X}_p \to \mathrm{Y}_p$ soit un isomorphisme pour $p \leq n$. Alors, pour tout Faisceau* F *de* $\mathrm{S}_{\mathbf{F}}$, *et a_t induit un isomorphisme*

$$\tau_{<n}\mathrm{R}g_*g^*\mathrm{F} \xrightarrow{\sim} \tau_{<n}\mathrm{R}f_*f^*\mathrm{F}.$$

Démonstration. — Conséquence immédiate de la fonctorialité (2.6.1) de la suite spectrale de descente (2.4.1). □

Ici, on s'intéresse avant tout à $t = f_\bullet : \mathrm{X}_\bullet \to \mathrm{S}_\Delta$. On va approximer t de proche en proche : on a une factorisation

$$\mathrm{X} \cdots \to \mathrm{cosq}_{n+1}(\mathrm{X}) \to \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X}) \cdots \to \mathrm{cosq}_{-1}(\mathrm{X}) = \mathrm{S}_\Delta.$$

Rappelons (4.4.d) qu'on a une identification

$$\mathrm{cosq}_m \circ \mathrm{cosq}_n = \mathrm{cosq}_n \text{ pour } m \geq n.$$

La flèche $\mathrm{cosq}_{n+1}(\mathrm{X}) \to \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})$ s'interprète alors comme une flèche

$$\tau : \ \mathrm{cosq}_{n+1}(\mathrm{X}) \to \mathrm{cosq}_{n+1}(\tilde{\mathrm{X}})$$

où l'on a posé $\tilde{\mathrm{X}} = \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})$. Remarquons que τ_p est un isomorphisme si $p \leq n$, cette flèche s'identifiant à l'identité de

$$\mathrm{cosq}_{n+1}(\mathrm{X})_p = \mathrm{X}_p \to \mathrm{cosq}_{n+1}(\tilde{\mathrm{X}})_p = \tilde{\mathrm{X}}_p = \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})_p = \mathrm{X}_p.$$

Le morphisme τ_{n+1} s'identifie quant à lui à la flèche canonique

$$\mathrm{X}_{n+1} \to \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})_{n+1}.$$

Le résultat crucial est le suivant :

Proposition 5.1.2. — *Soit n un entier ≥ -1 et $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \tilde{\mathrm{X}})$. On suppose que τ_p est un isomorphisme si $p \leq n$ et τ_{n+1} est un morphisme de descente cohomologique universelle. Alors, pour tout p, la flèche*

$$\mathrm{cosq}_{n+1}(\mathrm{X})_p \to \mathrm{cosq}_{n+1}(\tilde{\mathrm{X}})_p$$

est un morphisme de descente cohomologique universelle.

Démonstration. — On peut supposer $p > n+1$. On écrit alors

$$\mathrm{cosq}_{n+1}(\mathrm{X})_p = \varprojlim_{\substack{[q]\to[p]\\ q\leq n+1}} \mathrm{X}_q$$

comme le noyau de la double flèche

$$\Pi\mathrm{X} = \prod_{\substack{[q]\to[p]\\ q\leq n+1}} \mathrm{X}_q \rightrightarrows \prod_{\substack{[i]\overset{\alpha}{\hookrightarrow}[j]\\ \searrow\ \swarrow\\ [p]\\ j\leq n+1}} \mathrm{X}_i \overset{\text{déf}}{=} \Xi\mathrm{X}$$

où la composante α_{X} d'indice $\alpha \in \mathrm{Hom}_{[p]}([i],[j])$ de la double flèche est la double flèche formée d'une part du morphisme

$$\Pi\mathrm{X} \to \mathrm{X}_i$$

de projection d'indice $[i] \to [p]$ et, d'autre part, du morphisme

$$\Pi\mathrm{X} \to \mathrm{X}_j \to \mathrm{X}_i,$$

composé de la projection d'indice $[j] \to [p]$ et de $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathrm{X}_j, \mathrm{X}_i)$.

Lemme 5.1.3. — *Soit p un entier naturel. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{cosq}_{n+1}(\mathrm{X})_p \arrow[r] \arrow[d] & \Pi\mathrm{X} \arrow[d] \\ \mathrm{cosq}_{n+1}(\tilde{\mathrm{X}})_p \arrow[r] & \Pi\tilde{\mathrm{X}} \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Démonstration. — D'après la description précédente, on doit prouver que pour toute *injection* $\alpha \in \mathrm{Hom}_{[p]}([i],[j])$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \ker(\alpha_{\mathrm{X}} : \Pi\mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{X}_i) \arrow[r] \arrow[d] & \Pi\mathrm{X} \arrow[d] \\ \ker(\alpha_{\tilde{\mathrm{X}}} : \Pi\tilde{\mathrm{X}} \rightrightarrows \tilde{\mathrm{X}}_i) \arrow[r] & \Pi\tilde{\mathrm{X}} \end{tikzcd}$$

est cartésien. Mais si $i = n+1$, alors $\alpha : [i] \hookrightarrow [j]$ est l'identité de $[n+1]$: les doubles flèches n'imposent alors pas de condition. Les noyaux respectifs sont $\Pi\mathrm{X}$ et $\Pi\tilde{\mathrm{X}}$, ce qui traite ce cas. Sinon, on a $i < n+1$

et $\mathrm{X}_i \to \tilde{\mathrm{X}}_i$ est un isomorphisme, de sorte que le diagramme est cartésien aussi dans ce cas (tester une égalité dans X_i ou $\tilde{\mathrm{X}}_i$ revient au même). □

La proposition suit car $\Pi\mathrm{X} \to \Pi\tilde{\mathrm{X}}$ est de descente cohomologique universelle (2.9.3). □

Le résultat permettant de comparer $\mathrm{Y}' = \mathrm{cosq}_{n+1}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{cosq}_{n+1}(\tilde{\mathrm{X}})$ est le suivant.

Lemme 5.1.4. — *Soit* $f : \mathrm{Y}'_\bullet \to \mathrm{Y}_\bullet$ *un* S-*morphisme d'espaces simpliciaux tel que* $\mathrm{sq}_n(f)$ *isomorphisme. On suppose que les flèches* $\mathrm{Y}_\bullet \to \mathrm{cosq}_{n+1}(\mathrm{Y}_\bullet), \mathrm{Y}'_\bullet \to \mathrm{cosq}_{n+1}(\mathrm{Y}'_\bullet)$ *sont des isomorphismes et* f_p *de descente cohomologique pour tout* $p \geq 0$. *Alors, si* $\mathrm{Y}_\bullet$ *est de* S-*descente cohomologique, il en est de même de* $\mathrm{Y}'_\bullet$.

Démonstration. — On regarde le diagramme cartésien (changement de base par π)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y}'_{\bullet\bullet} = \mathrm{cosq}_0(\mathrm{Y}'_\bullet \times_{\mathrm{Y}_\bullet} \mathrm{Y}'_\bullet/\mathrm{Y}'_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Y}'_\bullet \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Y}_{\bullet\bullet} = \mathrm{cosq}_0(\mathrm{Y}'_\bullet/\mathrm{Y}_\bullet) \arrow[r] & \mathrm{Y}_\bullet
\end{tikzcd}$$

qu'on factorise en

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y}'_{\bullet\bullet} \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & \mathrm{Y}'_{\bullet\Delta} \arrow[r, "\epsilon_{\mathrm{Y}'}"] & \mathrm{Y}'_\bullet \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Y}_{\bullet\bullet} \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Y}_{\bullet\Delta} \arrow[r, "\epsilon_{\mathrm{Y}}"] & \mathrm{Y}_\bullet
\end{tikzcd} .$$

Il suffit de se convaincre que $\tilde{f}, \tilde{\pi}, \pi$ sont des équivalences de S-descente cohomologique.

Observons que pour tout $p \geq 0$ tant $\mathrm{Y}'_p \to \mathrm{Y}_p$ (par définition) que $(\mathrm{Y}'_\bullet \times_{\mathrm{Y}_\bullet} \mathrm{Y}'_\bullet)_p \to \mathrm{Y}'_p$ (puisqu'il a une section, cf. 2.5.4) sont de descente cohomologique. D'après (2.8.5), π et $\tilde{\pi}$ sont des équivalences de S-descente cohomologiques. Passons à $\tilde{f}$. D'après (2.8.3), il suffit de prouver que les morphismes d'espaces simpliciaux obtenus en regardant chaque ligne d'indice $p \geq 0$ sont des équivalences. Ce morphisme est la première projection $\varphi^p : (\mathrm{Y}'_\bullet)^{p+1} \to (\mathrm{Y}'_\bullet)^p$ où le produit est pris sur Y. D'après (4.4.3), $(\mathrm{Y}'_\bullet)^{p+1}$ et $(\mathrm{Y}'_\bullet)^p$ sont leur propre $n+1$-cosquelettes. Par ailleurs, comme Y' et Y coïncident en degré $\leq n$, le morphisme $\mathrm{sq}_n(\varphi_p)$ est un isomorphisme. Mais alors (4.5.1), la section diagonale de $\varphi^p = \mathrm{cosq}_{n+1}(\varphi^p)$ est un inverse à homotopie près. On conclut alors que $\tilde{f}$ est une équivalence grâce à 4.3.2. □

Théorème 5.1.5. — *Supposons que pour tout* n, *les flèches*

$$\mathrm{X}_{n+1} \to \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})_{n+1}$$

soient de S-*descente cohomologique universelle. Alors,* $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *est de descente cohomologique universelle.*

Démonstration. — En effet, d'après 5.1.2, les flèches

$$\mathrm{cosq}_{n+1}(\mathrm{X})_p \to \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})_p$$

sont des équivalences de descente cohomologique pour tout p. Comme $\mathrm{cosq}_{-1}(\mathrm{X}) = \mathrm{S}_\Delta \to \mathrm{S}$ est de descente cohomologique universelle, on déduit (5.1.4) que $\mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})$ est de S-descente cohomologique universelle.Il suffit alors d'invoquer 5.1.1. □

5.2. Variante relative. — Soit $t : \mathrm{X} \to \Sigma$ un morphisme de S-espaces simpliciaux. On veut donner un critère assurant que t est un morphisme de S-descente : le cas précédent est celui où $\Sigma = \mathrm{S}_\Delta$. On s'intéresse donc aux espaces S-simpliciaux au dessus de Σ. On définit alors le foncteur cosq_n^Σ par la formule

$$\mathrm{cosq}_n^\Sigma(\mathrm{X}) = \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X}) \times_{\mathrm{cosq}_n(\Sigma)} \Sigma \tag{5.2.a}$$

de sorte qu'on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{sq}_n(\Sigma)}(\mathrm{sq}_n(\mathrm{X}), \mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}_\Sigma(\mathrm{X}, \mathrm{cosq}_n(\mathrm{Y})). \tag{5.2.b}$$

On a alors le résultat suivant (cf. [**2**], 5.3.5.1).

Théorème 5.2.1. — *Supposons que pour tout n, les flèches*

$$\mathrm{X}_{n+1} \to \mathrm{cosq}_n^\Sigma(\mathrm{X})_{n+1}$$

soient de S*-descente cohomologique universelle. Alors,* $\mathrm{X} \to \Sigma$ *est de une équivalence de* S*-descente cohomologique universelle.*

La preuve est essentiellement la même que celle de 5.1.5. Donnons la trame, et les modifications (mineures) à apporter. On factorise

$$\mathrm{X} \cdots \to \mathrm{cosq}_{n+1}^\Sigma(\mathrm{X}) \to \mathrm{cosq}_n^\Sigma(\mathrm{X}) \cdots \to \mathrm{cosq}_{-1}^\Sigma(\mathrm{X}) = \Sigma.$$

Comme précédemment, il s'agit grâce à (5.1.1) de prouver que les morphismes (au dessus de Σ)

$$f : \mathrm{Y}'_\bullet = \mathrm{cosq}_{n+1}^\Sigma(\mathrm{X}) \to \mathrm{cosq}_n^\Sigma(\mathrm{X}) = \mathrm{cosq}_{n+1}^\Sigma(\mathrm{cosq}_n^\Sigma(\mathrm{X})) = \mathrm{Y}_\bullet$$

sont des équivalences.

On a encore $f_p = q_p$ si $p \leq n$ et f_{n+1} morphisme de S-descente cohomologique universelle. Comme dans la proposition 5.1.2, on constate tous les $f_p, p \geq 0$ sont de S-descente cohomologique universelle (en observant comme dans la preuve de 5.1.3, dont on garde les notations) que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{cosq}_{n+1}^\Sigma(\mathrm{X})_p & \longrightarrow & \Pi\mathrm{X} \times \mathrm{Y}_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{cosq}_{n+1}^\Sigma(\tilde{\mathrm{X}})_p & \longrightarrow & \Pi\tilde{\mathrm{X}} \times \mathrm{Y}_p \end{array}$$

est cartésien). On invoque alors de même 2.9.3, *iv)*.

Il s'agit alors de prouver l'analogue de (5.1.4), les cosquelettes cosq devenant des cosquelettes relatifs cosq^{Σ}. La preuve est la même (changement de base par $\mathrm{cos}_0(\mathrm{Y}'_\bullet/\mathrm{Y}_\bullet)$ -noter qu'on a pour $n = 0$ l'identité $\mathrm{cosq}_0 = \mathrm{cosq}^{\Sigma}$- car la variante relative du lemme 4.5.1 est trivialement vérifiée.

Tout ceci amène (cf. [**2**], 5.3.5) à poser la définition suivante.

Définition 5.2.2. — *Un morphisme* $\mathrm{X} \to \Sigma$ *de* S-*espaces simpliciaux est un hyperrecouvrement si les flèches* $\mathrm{X}_{n+1} \to \mathrm{cosq}_n^{\Sigma}(\mathrm{X})_{n+1}, n \geq -1$ *sont de* S-*descente cohomologique universelle. Dans le cas* $\Sigma = \mathrm{S}^{\Delta}$, *on dit que* X *est un hyperrecouvrement de* S.

6. Le cas simplicial strict, d'après Gabber

Cette partie est due à Gabber qui m'a expliqué pourquoi mes espoirs étaient fondés, à savoir que le critère de descente cohomologique 5.1.5 devait être vrai dans le cadre simplicial strict. Précisément, il ramène la preuve de 5.1.5 dans le cadre *simplicial strict* au cas simplicial. Voyons comment adapter. L'idée est de « remplacer » un espace simplicial strict n-tronqué $\mathrm{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})$ par un espace simplicial de proche en proche. Pour ce faire, on construit d'abord les dégénérescences à l'étage 0, puis à l'étage 1...

6.1. Le lemme d'adjonction fondamental. — Soient $0 \leq m \leq n$ deux entiers. On s'intéresse à la sous-catégorie pleine des S-schémas simpliciaux (ou simpliciaux stricts) X tels que $\mathrm{X} \to \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})$ soit un isomorphisme.

Remarque 6.1.1. — *La notation* $\mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})$ *désigne plusieurs choses suivant que* X *est un schéma simplicial, simplicial n-tronqué, strictement simplicial. Le premier abus de langage a déjà été utilisé. Ces abus ne peuvent prêter à confusion : si* X *est simplicial, schéma simplicial strict* $\mathrm{cosq}_n^+(\mathrm{X})$ *déduit de* X *par oubli coïncide avec* $\mathrm{cosq}_n(\mathrm{X}^+)$*, cosquelette du schéma simplicial strict* X^+ *déduit de* X *par oubli (cf.4.4.c).*

Le foncteur sq_n identifie cette catégorie à la catégorie des espaces simpliciaux n-tronqués. Soit $\mathrm{C}(n,m)$ la catégorie des S-espaces simpliciaux stricts n-tronqués dont le m-squelette est muni d'une structure simpliciale (compatible avec la structure stricte) : autrement dit, on a des opérateurs de face $\mathrm{X}_i \to \mathrm{X}_{i-1}$ pour $0 \leq i \leq n$ et des dégénérescences $\mathrm{X}_i \to \mathrm{X}_{i+1}$ pour $0 \leq i < m$. Ainsi, $\mathrm{C}(n,0)$ est la catégorie des S-espaces simpliciaux (n-tronqués) stricts tandis que $\mathrm{C}(n,n)$ est la catégorie des S-espaces simpliciaux (n-tronqués). On écrira cosq_m pour $\mathrm{sq}_n \circ \mathrm{cosq}_m$, adjoint à droite de l'oubli $\mathrm{C}(m,m) \to \mathrm{C}(n,n)$.
Le lemme clef est le suivant.

Proposition 6.1.2. — *Soit* $0 \leq m < n$ *des entiers. Le foncteur d'oubli* $u : \mathrm{C}(n,m+1) \to \mathrm{C}(n,m)$ *a un adjoint à droite* R *vérifiant*

$$(\mathrm{RX})_i = \mathrm{X}_i \times_{\mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})_{m+1}^{\mathrm{Hom}([m+1],[i])}} \mathrm{X}_{m+1}^{\mathrm{Hom}([m+1],[i])} \text{ si } i \leq m. \tag{6.1.a}$$

Démonstration. — Précisons d'abord la flèche $\mathrm{X}_i \to \mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})_{m+1}^{\mathrm{Hom}([m+1],[i])}$, *ie* les flèches

$$\rho_\alpha : \mathrm{X}_i \to \mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})_{m+1}, \text{avec } i \leq m \text{ et } \alpha \in \mathrm{Hom}([m+1],[i]).$$

Comme $\mathrm{sq}_m(\mathrm{X})$ a une structure simpliciale, il en de même de $\mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})$. On définit alors ρ_α comme le composé

$$\mathrm{X}_i \to \mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})_i \xrightarrow{\alpha} \mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})_{m+1}.$$

Les $(\mathrm{RX})_i, i \leq m$ s'organisent de manière évidente un espace simplicial m-tronqué noté $\mathrm{sq}_m(\mathrm{RX})$. Les premières projections $(\mathrm{RX})_i \to \mathrm{X}_i$ définissent un morphisme d'espaces simpliciaux tronqués

$$r : \mathrm{sq}_m(\mathrm{RX}) \to \mathrm{sq}_m(\mathrm{X})$$

et donc un morphisme d'espaces n-simpliciaux tronqués

$$\mathrm{cosq}_m(r) : \mathrm{cosq}_m(\mathrm{RX}) \to \mathrm{cosq}_m(\mathrm{X}).$$

On pose alors

$$\mathrm{RX} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})} \mathrm{cosq}_m(\mathrm{RX}) \tag{6.1.b}$$

et $\pi : \mathrm{RX} \to \mathrm{X}$ la première projection. On a $\mathrm{RX} \xrightarrow{\sim} \mathrm{cosq}_n(\mathrm{RX})$ car $n \geq m$ (et cosq_n commute aux limites projectives) de sorte que RX vit au moins dans $\mathrm{C}(n, m)$. Montrons que RX est muni d'une structure de $(m+1)$-espace simplicial tronqué, autrement dit construisons les flèches de dégénérescence associées à $\alpha \in \mathrm{Hom}([m+1], i)$ pour $i \leq m$. Notons π_α la projection d'indice α :

$$\pi_\alpha : (\mathrm{RX})_i = (\mathrm{X}_i \times_{\mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})_{m+1}^{\mathrm{Hom}([m+1],[i])}} \mathrm{X}_{m+1}^{\mathrm{Hom}([m+1],[i])}) \to \mathrm{X}_{m+1}.$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{RX})_i \arrow[r] \arrow[d, "\pi_\alpha"'] & (\mathrm{cosq}_m(\mathrm{RX}))_i \arrow[r, "\alpha"] & (\mathrm{cosq}_m(\mathrm{RX}))_{m+1} \arrow[d, "\mathrm{cosq}_m(r)_{m+1}"] \\
\mathrm{X}_{m+1} \arrow[rr] & & \mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})_{m+1}
\end{tikzcd}$$

commute et donc (6.1.b) définit $\alpha : (\mathrm{RX})_i \to (\mathrm{RX})_{m+1}$ (là encore, le point est que $\mathrm{cosq}_m(\mathrm{RX})$ a une structure simpliciale).
Ces morphismes font de $(\mathrm{RX})_i, i \leq m+1$ un S-*espace simplicial* $(m+1)$-*tronqué* $\mathrm{sq}_{m+1}(\mathrm{RX})$ sorte que R définit un foncteur

$$\mathrm{R} : \mathrm{C}(n, m) \to \mathrm{C}(n, m+1).$$

Notons que la première projection définit une flèche fonctorielle

$$u(\mathrm{RX}) \to \mathrm{X} \text{ pour tout } \mathrm{X} \in \mathrm{C}(n, m).$$

Reste à vérifier la propriété d'adjonction. Partons d'un morphisme de $\mathrm{Y} \to \mathrm{RX}$ dans $\mathrm{C}(n, m+1)$. Alors, le composé $u(\mathrm{Y}) \to u(\mathrm{RX}) \to \mathrm{X}$ vit dans $\mathrm{Hom}(u(\mathrm{Y}), \mathrm{X})$. Inversement, partons de $u(\mathrm{Y}) \to \mathrm{X}$. Définissons d'abord $\mathrm{Y}_i \to (\mathrm{RX})_i$ pour $i \leq m$. Comme Y a une structure simpliciale $(m+1)$-tronquée, on a pour $\alpha \in \mathrm{Hom}([m+1], [i])$ un morphisme composé

$$\mathrm{Y}_i \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Y}_{m+1} \to \mathrm{X}_{m+1}$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}_i \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{X}_{m+1} \arrow[d] \\ \mathrm{X}_i \arrow[r] & \mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})_{m+1} \end{tikzcd}.$$

On en déduit (6.1.a) un unique morphisme $\mathrm{Y}_i \to (\mathrm{RX})_i, i \leq m$ induisant un morphisme *d'espaces simpliciaux m-tronqués*

$$\mathrm{sq}_m(\mathrm{Y}) \to \mathrm{sq}_m(\mathrm{RX}).$$

Ce dernier induit un morphisme $\mathrm{cosq}_m(\mathrm{Y}) \to \mathrm{cosq}_m(\mathrm{RX})$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{cosq}_m(\mathrm{Y}) \arrow[r] & \mathrm{cosq}_m(\mathrm{RX}) \arrow[r] & \mathrm{cosq}_m(\mathrm{X}) \\ & \mathrm{X} \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

et donc définit (6.1.b) une flèche $\mathrm{Y} \to \mathrm{RX}$.
On devrait vérifier que ces constructions sont inverses l'une de l'autre, ce qui ne pose visiblement aucun problème. □

Notons que, en termes de cosquelettes relatifs, on a $\mathrm{RX} = \mathrm{cosq}_m^{\mathrm{X}}(\mathrm{RX})$. Prouvons un lemme facile, mais qui sera utile.

Lemme 6.1.3. — *Soit* $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ *des* S-*espaces,* $\mathrm{I} \to \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$ *une application avec* I *ensemble fini munissant* X *d'une structure de* Z^{J} *espace pour tout* $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$. *Alors, si* $\mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *de descente cohomologique universelle, le morphisme naturel*

$$\mathrm{X} \times_{\mathrm{Z}^{\mathrm{I}}} \mathrm{Y}^{\mathrm{I}} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{Z}^{\mathrm{J}}} \mathrm{Y}^{\mathrm{J}}$$

est de descente cohomologique universelle pour tout $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$. *En particulier, si* X *est un hyperrecouvrement,* $\mathrm{RX}_i \to \mathrm{X}_i$ *est de descente cohomologique universelle pour tout n.*

Démonstration. — Soit $\bar{\mathrm{J}} = \mathrm{I} - \mathrm{J}$ le complémentaire de J. La première projection fait de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Z}^{\mathrm{J}}} \mathrm{Y}^{\mathrm{J}}$ un X et donc un $\mathrm{Z}^{\bar{\mathrm{J}}}$-espace. Par ailleurs, on a

$$\mathrm{X} \times_{\mathrm{Z}^{\mathrm{I}}} \mathrm{Y}^{\mathrm{I}} = (\mathrm{X} \times_{\mathrm{Z}^{\mathrm{J}}} \mathrm{Y}^{\mathrm{J}}) \times_{\mathrm{Z}^{\bar{\mathrm{J}}}} \mathrm{Y}^{\bar{\mathrm{J}}}$$

de sorte qu'on a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \times_{\mathrm{Z}^{\mathrm{I}}} \mathrm{Y}^{\mathrm{I}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Y}^{\bar{\mathrm{J}}} \arrow[d] \\ \mathrm{X} \times_{\mathrm{Z}^{\mathrm{J}}} \mathrm{Y}^{\mathrm{J}} \arrow[r] & \mathrm{Z}^{\bar{\mathrm{J}}} \end{tikzcd}.$$

D'après 2.9.3, $\mathrm{Y}^{\bar{\mathrm{J}}} \to \mathrm{Z}^{\bar{\mathrm{J}}}$ est de descente cohomologique universelle, ce qui entraîne le lemme d'après *loc.cit.*. Pour le dernier point, on peut supposer $i < n$. On applique le lemme à $\mathrm{I} = \mathrm{Hom}([m+1],[i]), \mathrm{J} = \emptyset$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{X}_{m+1}, \mathrm{Z} = \mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})_{m+1}, \mathrm{Y} = \mathrm{X}_i$. □

Proposition 6.1.4. — *Si* X *est un hyperrecouvrement de* S, RX → X *est hyperrecouvrement et donc* RX *est un hyperrecouvrement de* S.

Démonstration. — On doit prouver que

$$(\mathrm{RX})_{i+1} \to \mathrm{cosq}_i^{\mathrm{X}}(\mathrm{RX})_{i+1} = \mathrm{cosq}_i(\mathrm{RX})_{i+1} \times_{\mathrm{cosq}_i(\mathrm{X})_{i+1}} \mathrm{X}_{i+1}$$

est une équivalence de descente cohomologique universelle. Si $i \geq j$, c'est un isomorphisme. Supposons donc $i < j$ et calculons $\mathrm{cosq}_i^{\mathrm{X}}(\mathrm{RX})_{i+1} = \mathrm{cosq}_i(\mathrm{RX})_{i+1} \times_{\mathrm{cosq}_i(\mathrm{X})_{i+1}} \mathrm{X}_{i+1}$. grâce à 4.4.2. On pose donc $\mathrm{X}_\mathrm{J} = \mathrm{X}_{\mathrm{card}(\mathrm{J})-1}$ pour tout $\mathrm{J} \subset [i]$. On notera simplement $x \mapsto \tilde{x}$ le morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{cosq}_j(\mathrm{X})$. Un point (valué) de $\mathrm{cosq}_i^{\mathrm{X}}(\mathrm{RX})_{i+1}$ s'écrit (Ξ, x_{i+1}) où Ξ est une collection compatible

$$\Xi = (x_\mathrm{J}, x_{j+1}^\beta), \mathrm{J} \subset [i+1], \mathrm{card}(\mathrm{J}) \leq i+1, \beta \in \mathrm{Hom}([j+1],\mathrm{J}) \text{ et } x_{i+1} \in \mathrm{X}_{i+1}$$

avec $x_\mathrm{J} \in \mathrm{X}_\mathrm{J}, x_{j+1}^\beta \in \mathrm{X}_{j+1}$ de sorte que

1. Ξ et x_{i+1} ont même image dans $\varprojlim\limits_{\substack{\mathrm{J}\subset[i+1] \\ \mathrm{card}(\mathrm{J})\leq i+1}} \mathrm{X}_\mathrm{J}$.
2. $\tilde{x}_{j+1}^\beta = \beta(\tilde{x}_\mathrm{J})$, égalité dans dans $\mathrm{cosq}_j(\mathrm{X})_{j+1}$.

La dernière condition signifie précisément que l'image x_{i+1}^J de x_{i+1} dans X_J est x_J pour tout $\mathrm{J} \subset [i+1]$ de cardinal $\leq i+1$. Ainsi, ces points s'identifient aux collections compatibles

$$(x_{i+1}, x_{j+1}^\beta), \mathrm{card}(\mathrm{J}) \leq i+1, \beta \in \mathrm{Hom}([j+1],\mathrm{J}) \text{ et } x_{i+1} \in \mathrm{X}_{i+1}$$

telles que x_{i+1}^J et x_{j+1}^β ont même image dans $\mathrm{cosq}_j(\mathrm{X})_{j+1}$. La condition de compatibilité signifie que dès qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{J}' \arrow[d, hook] \\ {[j+1]} \arrow[ur, "\beta'"] \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{J} \end{tikzcd}$$

on a $x_{j+1}^\beta = x_{j+1}^{\beta'}$, autrement dit x_{j+1}^β dépend seulement du composé $\gamma : [j+1] \to \mathrm{J} \hookrightarrow [i+1]$ et pas de J : on la note x_{j+1}^γ. Soit alors $\mathrm{Hom}_\circ([j+1],[i+1]) \subset \mathrm{Hom}([j+1],[i+1])$ le sous-ensemble des γ d'image de cardinal $\leq i+1$. Finalement, les points de $\mathrm{cosq}_i(\mathrm{RX})_{i+1}$ s'identifient aux collections compatibles

$$(x_{i+1}, x_{j+1}^\gamma), \gamma \in \mathrm{Hom}_\circ([j+1],[i+1]) \text{ et } \gamma(\tilde{x}_{n+1}) = \tilde{(}x_{j+1}^\gamma).$$

Ce qui prouve

$$\mathrm{cosq}_i(\mathrm{RX})_{i+1} = \mathrm{X}_{i+1} \times_{(\mathrm{cosq}_j(\mathrm{X})_{j+1})^{\mathrm{Hom}_\circ([j+1],[i+1])}} (\mathrm{X}_{j+1})^{\mathrm{Hom}_\circ([j+1],[i+1])}.$$

La flèche $(\mathrm{RX})_{i+1} \to \mathrm{cosq}_i(\mathrm{RX})_{i+1}$ est déduite de l'inclusion

$$\mathrm{Hom}_\circ([j+1],[i+1]) \subset \mathrm{Hom}_\circ([j+1],[i+1])$$

de sorte qu'il suffit d'invoquer (6.1.3) pour conclure. Le fait que RX soit un hyperrecouvrement en découle formellement grâce au diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{cosq}_i^{\mathrm{X}}(\mathrm{RX})_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{X}_{i+1} \arrow[d] \\
\mathrm{cosq}_i(\mathrm{RX})_{i+1} \arrow[r] & \mathrm{cosq}_i(\mathrm{X})_{i+1}
\end{tikzcd}$$

de (la partie facile de) (2.9.2). $\square$

Remarque 6.1.5. — *Le résultat précédent, 6.1.3 (et aussi 2.9.3 pour la flèche* $\mathrm{cosq}_i(\mathrm{RX})_{i+1} \to \mathrm{cosq}_i(\mathrm{X})_{i+1}$*) assurent que si* X *est un hyperrecouvrement, alors toutes les flèches du diagramme commutatif (à carré cartésien)*

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{RX})_{i+1} \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \mathrm{cosq}_i^{\mathrm{X}}(\mathrm{RX})_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{X}_{i+1} \arrow[d] \\
& \mathrm{cosq}_i(\mathrm{RX})_{i+1} \arrow[r] & \mathrm{cosq}_i(\mathrm{X})_{i+1}
\end{tikzcd}$$

sont de descente cohomologique universelles. Notons également que la preuve précédente s'adapte immédiatement pour donner que le morphisme $\mathrm{RX} \to \mathrm{cosq}_i^{\mathrm{X}}(\mathrm{RX})$ *est en tout degré de descente cohomologique universelle (et pas seulement en degré* $i+1$*).*

Le comportement de R vis à vis du produit est excellent :

Proposition 6.1.6. — *Soit* X *un objet de* $\mathrm{C}(n,m), m < n$ *et* k *un entier* > 0*. Alors, chacun des produits itérés* k*-fois* $(\mathrm{RX})^k$ *de* RX *sur* X

– *admet (au moins)* k *structures d'espace* $(m+1)$*-simplicial tronqué ;*

– *est un hyperrecouvrement de* S *si* X *est de plus un hyperrecouvrement de* S.

Démonstration. — Regardons le premier point. Soit $j \in [1,k]$ un entier. On procède comme dans la preuve de (6.1.2) dont on garde les notations. Soit $i \leq m$ et $\alpha \in \mathrm{Hom}([m+1],[i])$. On a (6.1.a)

$$(\mathrm{RX})_i^k = \mathrm{X}_i \times_{[(\mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})_{m+1})^{\mathrm{Hom}([m+1],[i])}]^k} [\mathrm{X}_{m+1}^{\mathrm{Hom}([m+1],[i])}]^k$$

et (6.1.b)

$$(\mathrm{RX})^k_{m+1} = \mathrm{X}_{m+1} \times_{(\mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})_{m+1})^k} \mathrm{cosq}_m(\mathrm{RX})^k. \tag{6.1.c}$$

Notons p_j la j-ème projection

$$p_j : [\mathrm{X}_{m+1}^{\mathrm{Hom}([m+1],[i])}]^k \to \mathrm{X}_{m+1}^{\mathrm{Hom}([m+1],[i])}$$

et $\pi_{\alpha,j}$ le composé

$$\pi_{\alpha,j} : (\mathrm{RX})^k_{m+1} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} [\mathrm{X}_{m+1}^{\mathrm{Hom}([m+1],[i])}]^k \xrightarrow{p_j} \mathrm{X}_{m+1}^{\mathrm{Hom}([m+1],[i])} \xrightarrow{\pi_\alpha} \mathrm{X}_{m+1}.$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{RX})^k_i \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{\alpha,j}"'] & \mathrm{cosq}_m(\mathrm{RX})^k_i \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{cosq}_m(\mathrm{RX})^k_{m+1} \arrow[d, "\mathrm{cosq}_m(r)^k_{m+1}"] \\
\mathrm{X}_{m+1} \arrow[rr] & & (\mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})_{m+1})^k
\end{tikzcd}$$

commute et donc (6.1.c) définit $\alpha : (\mathrm{RX})^k_i \to (\mathrm{RX})^k_{m+1}$. Le second point découle immédiatement de 2.9.4. □

Comme dans le cas simplicial, pour se ramener l'étude des espaces simpliciaux au cas tronqué, on a

Lemme 6.1.7. — *Soit* X *un hyperrecouvrement et* $n \geq -1$. *Alors,* $\Gamma = \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})$ *est un hyperrecouvrement.*

Démonstration. — On a $\mathrm{cosq}_m \mathrm{cosq}_n = \mathrm{cosq}_{\inf(n,m)}$. Si $m \geq n$, la flèche $\Gamma_{m+1} \to \mathrm{cosq}_m(\Gamma)_{m+1}$ s'identifie donc à l'identité de $\mathrm{cosq}_m(\Gamma)_{m+1}$, qui est de descente cohomologique.
Si $m < n$, on a $\mathrm{cosq}_m(\Gamma) = \mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})$ et le composé

$$\mathrm{X}_{m+1} \to \Gamma_{m+1} \to \mathrm{cosq}_m(\Gamma)_{m+1} = \mathrm{cosq}_m(\mathrm{X})_{m+1}$$

est de descente cohomologique universelle et on conclut grâce à 2.9.3. □

On est en mesure de prouver la généralisation, due à Gabber rappelons-le, de (5.1.4) :

Théorème 6.1.8. — *Soit* X *un espace simplicial strict. Si* X *est un hyperrecouvrement de* S, *alors* $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *est une équivalence de descente cohomologique.*

Démonstration. — D'après (5.1.1) et (6.1.7), on peut supposer qu'il existe $n \geq 0$ tel que $\mathrm{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{cosq}_n(\mathrm{X})$, autrement dit X objet de $\mathrm{C}(n, 0)$. Si X est en fait dans $\mathrm{C}(n, n)$, on conclut par (5.1.5) car le calcul de $\mathrm{R}f_* f^*$ ne dépend que de la structure simpliciale stricte et donc que l'isomorphisme déduit de la structure simpliciale induit bien un isomorphisme pour les Faisceaux strictement simpliciaux. Supposons (récurrence) que le résultat a été prouvé pour les hyperrecouvrements de $\mathrm{C}(n, m+1), m+1 \leq n$, et prouvons le pour X hyperrecouvrement de $\mathrm{C}(n, m)$. Comme $(\mathrm{RX})_i \to \mathrm{X}_i$ est de descente cohomologique universelle (6.1.5), $\mathrm{cosq}_0(\mathrm{RX}/\mathrm{X}) \to \mathrm{X}_\Delta$ est une équivalence de S-descente cohomologique universelle

(2.8.5). Il s'agit donc de montrer que $\operatorname{cosq}_0(\mathrm{RX}/\mathrm{X}) \to \mathrm{S}_{\Delta\times\Delta}$ est une équivalence de S-descente universelle (2.8.6). Montrons pour cela que les lignes de ce morphisme sont des équivalences de S-descente, ce qui suffit d'après (2.8.5). Or, ces lignes sont les projections $(\mathrm{RX})^k \to \mathrm{S}_\Delta, k > 0$. Mais chaque $(\mathrm{RX})^k$ peut-être vu comme un objet de $\mathrm{C}(n, m+1)$ (6.1.6), qui de surcroit est un hyperrecouvrement de S (6.1.4) : on conclut grâce à l'hypothèse de récurrence. $\square$

***Remarque 6.1.9* (du rédacteur).** — *Il ne semble guère plausible que la version relative évidente soit vraie en général. On peut peut-être espérer un résultat positif (simplement en remplaçant les cosquelettes par des cosquelettes relatifs) dans le cas d'un hyperrecouvrement* $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *où* Y *est* X *est simplicial strict mais où* Y *est simplicial. Je n'ai pas vérifié.*

Références

[1] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2.* Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270.

[2] Pierre Deligne. Théorie de Hodge. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (44) :5–77, 1974.

[3] Jean Giraud. *Cohomologie non abélienne.* Springer-Verlag, Berlin, 1971. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179.

[4] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971. Lectures Notes in Math., 224.

Yves Laszlo, École polytechnique, CMLS, F-91128 Palaiseau Cedex • *E-mail :* `laszlo@math.polytechnique.fr`