SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS-MARIE

1967-1969

GROUPES DE MONODROMIE EN GEOMETRIE ALGEBRIQUE

(SGA 7 I)

Dirigé par A. GROTHENDIECK

avec la collaboration de
M. RAYNAUD et D.S. RIM

INTRODUCTION

Soient S un schéma et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas. Si f est propre et lisse, et que le nombre premier ℓ est inversible sur S, les groupes de cohomologie ℓ-adique $H^i(X_{\bar{s}}, \mathbb{Z}_\ell)$ des fibres géométriques de f forment un système local ℓ-adique sur S. Pour f seulement supposé propre, ces groupes sont les fibres d'un faisceau ℓ-adique $R^i f_* \mathbb{Z}_\ell$ sur S. La théorie des cycles évanescents met en relation la ramification de ce faisceau sur S et les singularités de f.

Nous ne considérerons que le cas où S est un trait hensélien (= spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien). C'est en pratique le cas essentiel. Je renvoie à (I 2.1) pour une description heuristique de la théorie. Soient $S=\mathrm{Spec}(V)$, $k(\bar{\eta})$ une clôture algébrique du corps des fractions $k(\eta)$ de V et $k(\bar{s})$ la clôture algébrique correspondante du corps résiduel $k(s)$ ($k(\bar{s})$ est le corps résiduel du normalisé $\bar{V}$ de V dans $k(\bar{\eta})$). Dans le cas particulier où X est propre et plat sur S, de dimension relative n, et où f ne présente qu'un point de non lissité $x \in X_s$, on définit des $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$-modules ϕ^i, de nature purement locale au voisinage de x, nuls pour $i \notin [0,n]$ (I 4.2), et on construit une suite exacte longue de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$-modules

$$\cdots \longrightarrow H^i(X_{\bar{s}}, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{sp} H^i(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow \phi^i \longrightarrow H^{i+1}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow \cdots$$

(le $\mathrm{Gal}(\bar{s},s)$-module $H^i(X_{\bar{s}}, Z_\ell)$ est regardé comme un $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$-module avec action triviale de l'inertie ; sp est la flèche de spécialisation).
On donne aussi des critères, valables pour l'instant seulement en caractéristique 0, pour que les ϕ^i pour i petits soient nuls (par exemple, si X est de plus localement d'intersection complète, $\phi^i = 0$ pour $i \neq n$ (I. 4.5)).

Le théorème de monodromie affirme que l'action du sous-groupe d'inertie I de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ est quasi-unipotente : pour $T \in I$, il existe des entiers $N > 0$, $M > 0$ tels que l'endomorphisme $(T^M - I)^N$ de $H^i(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}_\ell)$ soit nul. On donne de ce théorème deux démonstrations. La première (I.1.2), de nature arithmétique, s'applique dès que les groupes de cohomologie considérés ont des propriétés de finitude raisonnables. Le point clef est que, lorsque $k(s)$ est de type fini sur son sous-corps premier, l'action de I est quasi-unipotente pour toute représentation ℓ-adique de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$. La seconde démonstration, plus géométrique, requiert la pureté et la résolution des singularités : elle n'est pour l'instant valable qu'en caractéristique 0 ou pour un H^1. Elle apporte de précieuses informations sur l'exposant de nilpotence N ($N \leqslant i+1$ pour un H^i). Ainsi qu'on le verra ultérieurement, elle se prête bien, sur $\mathbb{C}$, à la comparaison avec la théorie transcendante.

Ces résultats, appliqués au H^1 des variétés abéliennes, i.e. à leur module de Tate, permettent d'étudier la réduction mod p de celles-ci. On donne ainsi deux démonstrations du théorème de réduction stable des variétés abéliennes selon lequel, après ramification, la fibre spéciale connexe du modèle de Néron est extension d'une variété abélienne par un tore. La première (I. 6) reprend la méthode de la démonstration arithmétique du théorème de monodromie. La seconde (IX 3.6) s'appuie sur une analyse beaucoup plus fine du modèle de Néron, et de ses propriétés de polarisation.

Les exposés I à V de Grothendieck n'ont pas été rédigés. Ils ont été résumés dans un exposé I . Les résultats énoncés y sont démontrés de façon succinte, mais essentiellement complète.

L'exposé II applique la méthode des pinceaux de Lefschetz et (I 5.3) à l'étude du groupe fondamental. Pour S une surface sur un corps algébriquement clos k, d'exposant caractéristique p, on montre que le groupe profini $\pi_1^{(p)}(S,s)$, complété en dehors de p du groupe fondamental, est de pro-(p)-présentation finie.

Comme expliqué plus haut, les exposés III à V n'existent pas.

L'exposé VI contient, avec quelques compléments, la théorie des déformations de Schlessinger. On y prend soin de tenir compte des automorphismes infinitésimaux des objets qu'on classifie, et de ne pas passer trop brutalement au foncteur des classes d'isomorphie d'objets. On y donne aussi une nouvelle construction des $\underline{\mathrm{Ext}}^i(L_{X/S}, -)$ ($L_{X/S}$ complexe cotangent relatif de X/S). Cet exposé sert dans le reste du séminaire surtout via l'étude qui y est faite des déformations des singularités quadratiques ordinaires.

Les exposés VII et VIII sont consacrés à la théorie des biextensions. Cette théorie joue un rôle essentiel dans l'exposé IX, pour exprimer ce qu'il advient d'une polarisation quand on passe d'une variété abélienne à un modèle de Néron de celle-ci. Cet exposé IX contient la démonstration du théorème de réduction stable des variétés abéliennes, et diverses applications.

La suite de ce séminaire : SGA 7 II, par P. Deligne et N. Katz, paraîtra ultérieurement.

Bures sur Yvette, mai 1972,

P. DELIGNE

Table des Matières

SGA 7

Exposé I

Résumé des premiers exposés de A. Grothendieck

rédigé par P. Deligne

Sommaire

0. Préliminaires

0.0. Terminologie. Rappelons les définitions suivantes :

(0.0.1) trait : spectre d'un anneau de valuation discrète. On note souvent η et s les points génériques et fermés d'un trait.

(0.0.2) strictement local : pour un anneau : local hensélien à corps résiduel séparablement clos. Pour un schéma : spectre d'un tel anneau.

(0.0.3) point géométrique de S (dans cet exposé) : morphisme $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\bar{k}) \longrightarrow S$ d'image $x \in S$, $k(\bar{x}) =_{\mathrm{dfn}} \bar{k}$ étant une clôture séparable de $k(x)$. Pour un trait hensélien $S = \mathrm{Spec}(V)$, on note souvent $\bar{\eta}$ un point géométrique générique (i.e. d'image η) de S. Le corps résiduel de l'anneau de valuation $\bar{V}$ clôture intégrale de V dans $k(\bar{\eta})$ est une extension algébrique séparablement close de $k(s)$ et définit un point géométrique $\bar{s}$ de S localisé en s.

(0.0.4) <u>localisé strict de</u> X <u>en le point géométrique</u> $\bar{x}$: SGA 4 VIII 4.4.

(0.0.5) <u>essentiellement de type fini sur</u> S : pour un S-schéma local (resp. local hensélien, resp. strictement local) : spectre d'un anneau local (resp. de l'hensélisé d'un anneau local, resp. localisé strict) d'un schéma de type fini sur S .

(0.0.6) $F \longmapsto F(n)$: twist à la Tate.

(0.0.7) Un endomorphisme T d'un espace vectoriel de dimension finie est <u>quasi-unipotent</u> si ses valeurs propres sont des racines de l'unité, i.e. s'il existe $N \geqslant 1$ $M \geqslant 1$ tels que $(T^N - 1)^M = 0$.

0.1. Rappels sur la cohomologie ℓ-adique

Soit X un schéma de type fini sur un corps algébriquement clos k d'exposant caractéristique p et ℓ un nombre premier premier à p .

Les groupes de cohomologie ℓ-adique de X ont été définis dans SGA 4 et SGA 5.

a) $H^i(X,\mathbb{Z}/\ell^n)$ est le $i^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie du site étale X_{et} de X à valeurs dans $\mathbb{Z}/\ell^n$;

b) par définition, $H^i(X,\mathbb{Z}_\ell) = \varprojlim_n H^i(X,\mathbb{Z}/\ell^n)$;

c) par définition, $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell) = H^i(X,\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$.

Les groupes de cohomologie ℓ-adique à supports propres de X sont définis de même à partir des $H^i_c(X,\mathbb{Z}/\ell^n)$ de SGA 4 XVII.

Dans chacun des cas suivants, on sait prouver que ces groupes $H^i(X)$ ont des propriétés de finitude raisonnables :

(0.1.1) en cohomologie à support propre ;

(0.1.2) pour X propre sur k ;

(0.1.3) pour X lisse sur k (grâce à a) et à la dualité de Poincaré SGA 4 XVII

(0.1.4) lorsqu'on dispose de la résolution des singularités à la Hironoka pour les schémas de type fini sur k , de dimension $\leqslant \dim(X)$;

(0.1.5) pour $i = 0, 1$.

Dans tous ces cas, les $H^i(X,\mathbf{Z}/\ell^n)$ sont finis, les $H^i(X,\mathbf{Z}_\ell)$ de type fini, les $H^i(X,\mathbf{Q}_\ell)$ de dimension finie et (sauf peut-être pour (0.1.5)) on dispose de suites exactes courtes scindées

$$0 \longrightarrow H^i(X,\mathbf{Z}_\ell) \otimes \mathbf{Z}/\ell^n \longrightarrow H^i(X,\mathbf{Z}/\ell^n) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(H^{i+1}(X,\mathbf{Z}_\ell),\mathbf{Z}/\ell^n) \longrightarrow 0 .$$

De plus, la démonstration du théorème de finitude fournit chaque fois une démonstration d'un théorème de constructibilité générique : si k est le corps des fractions d'un schéma noethérien intègre S et que X est la fibre générique de $f_1 : X_1 \longrightarrow S$ (de type fini), il existe un ouvert non vide $U \subset S$ tel que, sur U, les $R^i f_* \mathbf{Z}/\ell^n$ soient localement constants de formation compatible à tout changement de base.

0.2. Ne supposons plus k algébriquement clos, et soit $\bar{k}$ une clôture algébrique (ou séparable, cela reviendrait au même) de k. Nous considérerons les groupes de cohomologie "géométriques" $H^i(X_{\bar{k}})$ ($X_{\bar{k}}$ est le schéma déduit de X par extension des scalaires de k à $\bar{k}$). Par transport de structure, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit sur ces groupes. En $\mathbf{Q}_\ell$-cohomologie, lorsqu'on est dans l'un des cas (0.1.1) à (0.1.5), on obtient ainsi des représentations continues de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ dans un groupe linéaire $GL(n,\mathbf{Q}_\ell)$.

0.3. Rappels sur les traits (0.0.1)

Pour les démonstrations, on renvoie à [4]. Soient S un trait hensélien, η, s, V, $\bar{V}$, $\bar{\eta}$, $\bar{s}$ comme en (0.0.1) (0.0.3). On note p l'exposant caractéristique de $k(s)$ et $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ (resp. $\mathrm{Gal}(\bar{s}/s)$) le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k(\bar{\eta})/k(\eta))$ (resp. ...). Par transport de structure, $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ agit sur $k(\bar{s})$, d'où une application de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ dans (en fait sur) $\mathrm{Gal}(\bar{s}/s)$, de noyau le groupe d'inertie I. Le sous-corps de $k(\bar{\eta})$ défini par I est une extension non ramifiée maximale de $k(\eta)$.

Le groupe profini I admet un plus grand sous-groupe P qui soit un pro-p-groupe. Le quotient I/P est le groupe d'inertie modéré. On a canoniquement

$$I/P \simeq \varprojlim_n \mu_n(k(\bar{s})) =_{\mathrm{dfn}} \hat{\mathbf{Z}}(1)(k(\bar{s})) .$$

Si ϕ_n est l'application canonique de I/P dans $\mu_n(\bar{k})$, et que u est un élément de $\bar{V}$ de valuation $1/n$, on a pour $\sigma \in I$

$$\sigma(u) \equiv \phi_n(u).u \qquad \text{(mod. éléments de valuation} > 1/n).$$

En résumé, on a :

(0.3.1) $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta) \supset I \supset P$,

$\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)/I \simeq \mathrm{Gal}(\bar{s}/s)$,

$I/P \simeq \hat{\mathbb{Z}}(1)(k(\bar{s}))$,

P : pro-p-groupe ($\{e\}$ si $p = 1$) ,

et l'action (par automorphismes intérieurs dans $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$) de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)/I$ sur I/P s'identifie à l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\bar{s}/s)$ sur $\hat{\mathbb{Z}}(1)(k(\bar{s}))$.

0.4. Soit plus généralement S strictement local régulier, D un diviseur régulier dans S et p' l'exposant caractéristique du point générique de D . Soient η un point géométrique générique de S et $\bar{s}$ le point géométrique localisé au point ferm s , qui s'en déduit. D'après le lemme d'Abhyankar, le groupe fondamental $\pi_1(S-D,\bar{\eta})$ admet un dévissage analogue à (0.3.1) :

(0.4.1) $\pi_1(S-D,\bar{\eta}) \supset I \supset P$

$\pi_1(S-D,\bar{\eta})/I \simeq \mathrm{Gal}(\bar{s}/s)$

$I/P \simeq \hat{\mathbb{Z}}(1)(k(\bar{s}))$

P : sans quotient d'ordre premier à p' .

L'action par automorphismes intérieurs de $\pi_1(S-D,\bar{\eta})/I$ sur I/P s'identifie à l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\bar{s}/s)$ sur $\hat{\mathbb{Z}}(1)(k(\bar{s}))$.

0.5. <u>La désingularisation de Néron</u>

La méthode de désingularisation de Néron fournit le résultat suivant :

<u>Lemme</u> 0.5.1. <u>Soit</u> $S \longrightarrow S_o$ <u>un morphisme de traits henséliens, avec</u> $S = \mathrm{Spec}(V)$ $S_o = \mathrm{Spec}(V_o)$ <u>et</u> π <u>une uniformisante de</u> V_o . <u>On suppose que</u> π <u>est une uniformisante de</u> V , <u>et que les extensions</u> $k(s)/k(s_o)$ <u>et</u> $k(\eta)/k(\eta_o)$ <u>sont séparables</u>. <u>Alors</u>, V <u>est limite inductive de</u> V_o<u>-algébres henséliennes lisses et essentielleme de type fini</u> B_i <u>sur</u> V_o .

Pour construire les V_o-algèbres voulues, on prend $V_o \subset B \subset V$ avec B de type fini, et on désingularise Spec(B) à la Néron ([1] § 4).

Soit $S = \mathrm{Spec}(V)$ un trait hensélien.

(0.5.2) Si S est d'égale caractéristique, d'uniformisante π, on peut appliquer (0.5.1) pour $S_o = \mathbf{F}_p[\pi]_{(\pi)}$. L'extension s/s_o est séparable car $\mathbf{F}_p$ est parfait, l'extension η/η_o l'est car π, étant une uniformisante, n'est pas une puissance $p^{\text{ième}}$ (si $p \neq 1$) donc fait partie d'une p-base. On trouve que S est limite de spectres de $\mathbf{F}_p[\pi]_{(\pi)}$-algèbre henséliennes lisses essentiellement de type fini.

(0.5.3) Si S est complet, d'inégale caractéristique, à corps résiduel parfait k, V est une extension d'Eisenstein de l'anneau des vecteurs de Witt (= anneau de Cohen) $W(k)$

$$V \simeq W(k)\ [\pi]\ /(\pi^n + \sum_0^{n-1} a_i\ \pi^i) \quad .$$

Si on perturbe un peu les a_i, on trouve une extension isomorphe. On peut donc supposer les a_i dans $W(k')$, avec k' de type fini sur $\mathbf{F}_p$. Soit k_o la clôture parfaite de k' dans k et

$$V_o = W(k_o)\ [\pi]/(\pi^n + \sum_0^{n-1} a_i\ \pi^i) \quad .$$

Le lemme 0.5.1 s'applique à V/V_o, et le corps résiduel de V_o est une extension radicielle d'un corps de type fini sur $\mathbf{F}_p$.

1. Démonstration arithmétique du théorème de monodromie

Le lecteur trouvera dans [5], Appendice, une démonstration du résultat suivant de A. Grothendieck.

Proposition 1.1. Soient S un trait hensélien, ℓ un nombre premier premier à l'exposant caractéristique p de $k(s)$ et ρ une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ dans $GL(n, \mathbf{Q}_\ell)$. On suppose remplie la condition suivante :

($*_\ell$) Aucune extension finie de $k(s)$ ne contient toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de ℓ.

Alors, il existe un sous-groupe ouvert I_1 du groupe d'inertie I tel que $\rho(\sigma)$ soit unipotent pour $\sigma \in I_1$.

La condition $(\star_\ell)$ est automatiquement vérifiée pour $k(s)$ de type fini sur le corps premier (ou radiciel sur un tel corps).

Le théorème suivant résulte aussitôt de 1.1.

Théorème de monodromie 1.2. Avec les notations précédentes, soit X un schéma de type fini sur η et H un espace de cohomologie de $X_{\bar\eta}$, à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$, de l'un des types (1.1.1) à (1.1.5). Si la condition $(\star_\ell)$ est vérifiée, l'action d'un quelconque élément de I sur H est quasi-unipotente.

Les résultats de passage à la limite 0.5 permettent de se débarasser de l'hypothèse $(\star_\ell)$.

Variante 1.3. La condition $(\star_\ell)$ dans 1.2 est superflue.

Soit H'_o un espace de $\mathbb{Z}_\ell$-cohomologie de $X_{\bar\eta}$ qui donne naissance à H, et $H_o = H'_o/\text{torsion}$. On a par hypothèse $H = H_o \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$, et l'action de $\mathrm{Gal}(\bar\eta/\eta)$ se déduit de

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar\eta/\eta) \longrightarrow GL(H_o) \quad .$$

Soit $I_{\ell'}$ le plus grand sous-groupe premier à ℓ de I. Son image dans $GL(H_o)$ es un groupe de Lie ℓ-adique premier à ℓ, donc est finie.

Procédons à une extension de trait $S' \longrightarrow S$. Ceci ne change pas H_o (SGA 4 XVI 6.6) et $\rho(I')$ est d'indice fini dans $\rho(I)$, car I'/P' est d'indice fini dans I/P et ce qui précède. Il suffit donc de prouver le théorème sur S' : on peut supposer que

a) $\mathrm{Gal}(\bar\eta/\eta)$ agit trivialement sur $H_o/\ell H_o$;

b) si S est d'inégale caractéristique, S est complet à corps résiduel parfait (EGA 0_{III} 10.3.1).

Posons $S = \mathrm{Spec}(V)$, définissons V_o comme en (0.5.2) et (0.5.3) et appliquons (0.5.1). On a

$$V = \varinjlim B_i$$

avec $S_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ essentiellement lisse de type fini sur V_o . Soit $D_i \subset S_i$ d'équation $\pi = 0$. Pour i assez grand, H_o provient d'un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau constant tordu $\mathcal{H}_i$ sur $S_i - D_i$ (d'après la "constructibilité générique" (0.1)) et $\mathcal{H}_i/\ell\mathcal{H}_i$ est constant.

Les dévissages (0.3.1) et (0.4.1) donnent lieu à des diagrammes commutatifs :

(1.3.1)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta) \arrow[d] & \supset & I \arrow[d] & \supset & P \arrow[d] \\ \pi_1(S_i - D_i, \bar{\eta}) & \supset & I_i & \supset & P_i \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} I/P \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \hat{\mathbb{Z}}(1) \arrow[d, equal] \\ I_i/P_i \arrow[r, "\sim"] & \hat{\mathbb{Z}}(1) \end{tikzcd}$$

et la représentation H_o de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ se déduit d'une action de $\pi_1(S_i - D_i, \bar{\eta})$ sur H_o , triviale sur $H_o/\ell H_o$. Le groupe $\mathrm{Ker}(GL(H) \longrightarrow GL(H/\ell H))$ est un pro-ℓ-groupe ; P_i agit donc trivialement, et on applique la variante suivante de 1.1.

Variante 1.4. Reprenons les notations de 0.4 et soit ρ une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ dans $\mathrm{Gal}(n, \mathbb{Q}_\ell)$. On suppose que $k(s)$ vérifie $(\star_\ell)$ et que $\rho(P)$ est fini. Alors, l'action de I est quasi-unipotente.

2. Cycles évanescents

2.1. Soit S un trait strictement local, et reprenons les notations de 0.3. Par hypothèse, on a ici $s = \bar{s}$. Soit $f : X \longrightarrow S$ un schéma de type fini sur S . Le formalisme des cycles évanescents est un outil pour étudier la relation entre les cohomologies de X_s et de $X_{\bar{\eta}}$, et l'action du groupe d'inertie sur celle de $X_{\bar{\eta}}$, à partir d'informations locales (sur X) sur le morphisme f .

Un résultat clef de ce type est le théorème de spécialisation SGA 4 XVI 2.2, selon lequel pour f propre et lisse X_s et $X_{\bar{\eta}}$ ont même cohomologie.

Dans la théorie transcendante, si $f : X \longrightarrow D$ est un morphisme propre d'un espace analytique X dans le disque D , les cycles évanescents apparaissent comme suit :

a) Quitte à rapetisser D , on peut supposer que X est un fibré topologique au-dessus du disque épointé $D^\star$ (théorème d'isotopie de Thom). Les fibres

X_t ($t \in D^*$) sont en particulier toutes isomorphes.

b) Il n'est pas déraisonnable de se représenter la fibre spéciale X_s comme déduite de "la" fibre générale X_t par contraction de polyèdres dans X_t : on aurait $\pi : X_t \longrightarrow X_s$. La méthode des cycles évanescents consiste alors à étudier la différence entre les cohomologies de X_s et X_t à l'aide de la suite spectrale de Leray de π .

La théorie géométrique expliquée ci-dessous est très proche de cette théorie transcendante ; il faut remplacer le point général $t \in D$ par $\bar{\eta}$, le point géométrique générique de S . Inversement, on peut calquer la théorie transcendance sur la théorie géométrique, en remplaçant t ou $\bar{\eta}$ par le revêtement universel $\tilde{D}^*$ de D^* , et X_t ou $X_{\bar{\eta}}$ par $X \times_D \tilde{D}^*$. Ce faisant, on se débarasse de nombreux ε et η , mais on perd parfois de l'information.

2.2. Fixons un anneau de torsion Λ dans lequel p soit inversible (par exemple $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$, ℓ premier à p). Soient les morphismes :

$$\begin{tikzcd}
X_s \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_s"] & X \arrow[d, "f"] & & X_{\bar{\eta}} \arrow[ll, "\bar{j}"'] \arrow[d, "f_{\bar{\eta}}"] \\
s \arrow[r] & S & \eta \arrow[l] & \bar{\eta} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Les faisceaux de cycles évanescents ψ_i sur X_s sont les

(2.2.1) $$\psi^i = i^* R^i \bar{j}_* \Lambda \quad .$$

Si f est propre, on a (SGA 4 XII 5.5)

(2.2.2) $$i^* \ : \ H^p(X, R^q \bar{j}_* \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^p(X_s, i^* R^q j_* \Lambda) \quad ,$$

et la suite spectrale de Leray pour $\bar{j}$ se récrit

(2.2.3) $$H^p(X_s, \psi^q) \Longrightarrow H^{p+q}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \quad .$$

Lorsque rien ne se passe à l'infini, on peut parfois obtenir cette suite spectrale sans hypothèse de propreté. Qu'il faille quelque hypothèse à l'infini se voit déjà sur le cas trivial $X_s = \emptyset$.

On tire aussitôt des définitions :

Proposition 2.3. *Soient* $\bar{x}$ *un point géométrique de* X_s *(par exemple un point fermé)* $X_{(\bar{x})}$ *l'henselisé strict de* X *en* $\bar{x}$ *et* $X_{(\bar{x})\bar{\eta}}$ *la fibre géométrique générique de la projection de* $X_{(\bar{x})}$ *sur* S . *On a*

$$\psi^i = H^i(X_{(\bar{x})\bar{\eta}}, \Lambda)$$

Corollaire 2.4. *Là où* f *est lisse,* $\psi^i = 0$ *pour* $i > 0$ *et* $\psi^\circ = \Lambda$.

C'est SGA 4 XV 2.1.

Le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ (égal par hypothèse au groupe d'inertie) agit par transport de structure sur les ψ^i , et

Scholie 2.5. *La suite spectrale* 2.2.3 *est* $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$*-équivariante.*

Variante 2.6. Soient $\bar{S} = \mathrm{Spec}(\bar{V})$ et $\bar{X} = X \times_S \bar{S}$. $X_{\bar{\eta}}$ est le complément de $X_s = X_{\bar{s}}$ dans $\bar{X}$. Posons

$$\phi^i = \underline{H}^{i+1}_{X_s}(\bar{X}, \Lambda)$$

(faisceaux de cohomologie à support). On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \phi^{-1} \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \psi^\circ \longrightarrow \phi^\circ \longrightarrow 0$$

et, pour $i > 0$, des isomorphismes $\psi^i \xrightarrow{\sim} \phi^i$. Pour f lisse, les ϕ^i sont nuls.

Posons $\phi^i_{gl} = H^i_{X_s}(\bar{X}, \Lambda)$ (analogue global des ϕ^i). On dispose d'une suite spectrale

(2.6.1) $$H^p(X_s, \phi^q) \Longrightarrow \phi^{p+q}_{gl}$$

et d'une suite exacte longue de cohomologie qui, pour f propre, se récrit

(2.6.2) $$\cdots \longrightarrow H^i(X_s, \Lambda) \longrightarrow H^i(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \longrightarrow \phi^i_{gl} \longrightarrow \cdots$$

Variante 2.7. Soit K_t l'extension modérément ramifiée maximale de K dans $\bar{K}$. On pose $X_t = X \times_S \mathrm{Spec}(K_t)$. Soit $\bar{j}_t$ la projection de X_t dans X . On définit des variantes modérées ("tame") des ψ^i en posant

$$\psi_t^i = R^i \bar{j}_{t*} \Lambda$$

Utilisant que P est un pro-p-groupe, avec p inversible dans Λ , on trouve que

(2.7.1) $$H^*(X_t, \Lambda) = H^*(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)^P ,$$

(2.7.2) $$\psi_t^i = \psi^{iP} .$$

Pour f propre, la suite spectrale de Leray de $\bar{j}_t$ se déduit de **2**.2.3 par passage aux P-invariants :

(2.7.3) $$H^p(X_s, \psi_t^q) \Longrightarrow H^{p+q}(X_t, \Lambda) = H^{p+q}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda)^P .$$

3. Démonstration géométrique du théorème de monodromie

Soit Λ comme en 2.2.

Conjecture 3.1 (pureté). Soient A un anneau excellent strictement local (0.2) régulier et D un diviseur régulier de $\mathrm{Spec}(A)$ défini par un paramètre x . Soit $U = \mathrm{Spec}(A) - D = \mathrm{Spec}(A[1/X])$. On a

(3.1.1) $$H^q(U, \Lambda) = \begin{cases} \Lambda & \text{pour } q = 0 \\ \Lambda(-1) & \text{pour } q = 1 \text{ (notation (0.0.6))} \\ 0 & \text{pour } q > 1 \end{cases}$$

Voici des cas où cette conjecture est connue (SGA 4 XIX) :

pour $q = 0$ ou 1 , pour A de caractéristique 0 , pour A d'égale caractéristique p lorsqu'on dispose de la résolution des singularités en dimension $\leq \dim(A)$ et en caractéristique p , ou pour $(\mathrm{Spec}(A), D)$ un couple lisse (théorème de pureté relatif SGA 4 XVI 3.7).

Lorsqu'on dispose de la pureté, et que $D = \sum_{i \in B} D_i$ est un diviseur à croisements normaux dans $\mathrm{Spec}\ A$, défini par une partie d'un système régulier de paramètre, la cohomologie de $U = \mathrm{Spec}(A) - D$ est donnée par

$$
(3.1.2) \qquad
\begin{aligned}
H^o(U,\Lambda) &= \Lambda \\
H^1(U,\Lambda) &= \Lambda(-1)^B \\
H^q(U,\Lambda) &= \overset{q}{\Lambda}\, H^1(U,\Lambda) \qquad \text{(donné par le cup-produit)}
\end{aligned}
$$

Ces formules sont identiques à celles qui, sur $\mathbb{C}$, donnent la cohomologie de $D^{*B} \times D^k$.

3.2. Soit S un trait strictement local. On garde les notations (0.0.1) (0.0.3). Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de type fini. On suppose que X est régulier, que X_η est lisse et que X_s est un diviseur à croisements normaux dans X . On supposera que ce diviseur est (globalement, et non seulement localement pour la topologie étale) somme de diviseurs réguliers : $(X_s)_{red} = \sum_{i\in B} D_i$ (le cas général peut se récupérer par localisation). Notons m_i leurs multiplicités : $X_s = \sum_{i\in B} m_i\, D_i$.

Soient x un point de X_s , $\bar{x}$ un point géométrique de X localisé en x (par exemple x fermé, $x = \bar{x}$) , $C = \{i \mid x \in D_i\}$ et K le complexe concentré en degrés 0 et -1

$$K : \mathbb{Z}^C \xrightarrow{\ d\ } \mathbb{Z} : d((n_j)) = \sum_j m_j\, n_j \quad .$$

Théorème 3.3. (utilise la pureté). Les groupes de cycles évanescents modérés $\psi^i_{t\bar{x}}$ sont les suivants :

(i) On a un isomorphisme canonique de Λ-algèbres graduées

$$\psi^*_{t\,\bar{x}} \simeq \overset{*}{\bigwedge}(H_1(K) \otimes \Lambda(-1)) \otimes_\Lambda \psi^o_{t\bar{x}} \quad .$$

(ii) $\psi^o_{t\,\bar{x}}$ est une Λ-algèbre Λ^E , pour E un ensemble sur lequel le groupe d'inertie modéré $I_t = I/P = \hat{\mathbb{Z}}(1)(k(s))$ agit transitivement, de nombre d'éléments le plus grand diviseur premier à p de $\# H_o(K)$.

Voici la méthode de démonstration.

a) Soient $X_{(\bar{x})}$ le localisé strict de X en $\bar{x}$, $U = X_{(\bar{x})} - X_{(\bar{x})s}$ (le complément d'un diviseur à croisements normaux), t_j une équation locale de D_j , $X_n = X_{(x)}[(t_j^{1/n})]$ (pour $(n,p) = 1$; c'est un schéma régulier) et U_n l'image réciproque de U dans X_n . D'après 3.1.2, on a $H^q(U_n,\Lambda) = \overset{q}{\bigwedge}(\Lambda(-1)^C)$; pour $m = x\,d$, l'application "image réciproque" de $H^q(U_n,\Lambda)$ dans $H^q(U_m,\Lambda)$ est la multiplication par d^q. Posant $\widehat{U} = \varprojlim_{(n,p)=1} U_n$, on a donc

$$(3.3.1) \qquad \begin{cases} H^o(\widehat{U},\Lambda) = \Lambda \\ H^q(\widehat{U},\Lambda) = \varinjlim_n H^q(U_n,\Lambda) = 0 \quad \text{pour} \quad q \neq 0 \ . \end{cases}$$

b) $\widetilde{U}$ est un prorevêtement de U de groupe $\widehat{\mathbf{Z}}(1)(k(s))^C$. Par définition, on a $\psi_t{}^*_{\bar{x}} = H^*(U_{n_t},\Lambda)$; $\widetilde{U}$ est un prorevêtement de groupe $H_1(K) \otimes \widehat{\mathbf{Z}}(1)(k(s))$ de chacune des composantes connexes de U_{n_t}, et celles-ci sont permutées transitivement par le groupe d'inertie modéré. De (3.3.1) et de la suite spectrale d'Hochschild-Serre on tire alors les formules 3.3.

En termes imagés, on peut dire que $U_{\bar{\eta}}$ est la fibre d'un morphisme δ d'un $K(\widehat{\mathbf{Z}}(1)(k(s))^C,1)$ cohomologique U dans le $K(\widehat{\mathbf{Z}}(1)(k(s)),1)$ cohomologique η, ce morphisme δ induisant $d = \Sigma\, m_j\, n_j : \widehat{\mathbf{Z}}(1)(k(s))^C \longrightarrow \widehat{\mathbf{Z}}(1)(k(s))$.

Corollaire 3.4. (utilise la pureté). Supposons f propre. Soit N le plus petit commun multiple des multiplicités m_j ($j \in B$). Soit $q \geq 0$, et q' la borne inférieure de q et du nombre maximum de diviseurs D_j passant par un même point. Pour T dans le groupe d'inertie modéré $I_t = I/P$, on a

$$(T^N - I)^{q'} = 0 \ \ \text{sur} \ \ H^q(X_{\bar{\eta}},\Lambda)^P \ .$$

Résulte aussitôt de 3.3 et de la variante 2.7 de 2.5.

Les résultats de pureté requis sont disponibles pour les H^1, en caractéristique 0, ou pour S essentiellement de type fini sur un corps.

Théorème 3.5. Soit C une courbe projective et lisse sur le corps des fractions $k(\eta)$ d'un anneau de valuation discrète V. Le groupe d'inertie I agit sur $H^1(C_{\bar{\eta}},\mathbf{Q}_\ell)$ par automorphismes quasi-unipotents d'échelon 2 : il existe N tel que, pour $T \in I$, on ait

$$(T^N - I)^2 = 0 \quad \text{sur} \quad H^1(C_{\bar{\eta}},\mathbf{Q}_\ell) \ .$$

On se ramène à supposer V strictement local. L'assertion est qu'il existe un sous-groupe ouvert I_1 de I tel que $(T - I)^2 = 0$ sur H^1 pour $T \in I_1$.

Il nous est loisible d'étendre les scalaires de $k(\eta)$ à une extension finie (remplacer V par son normalisé dans cette extension). Puisque l'image du pro-p-groupe P dans un groupe de Lie ℓ-adique $GL(n,Q_\ell)$ est finie, on peut en particulier supposer que P agit trivialement.

Soit C_o un modèle minimal de C sur V (pour l'existence de C_o, basée sur le théorème d'Abhyankar, cf. la discussion dans [3] § 2, p. 87 ; on pourrait ici se ramener au cas V excellent en passant au complété de V : invoquer SGA 4 XVI 1.6). Soit C_1 un modèle régulier de C, déduit de C_o par éclatements, de fibre spéciale un diviseur à croisements normaux. Les arguments 3.3, 3.4 s'appliquent à C_1, ψ_t^o, ψ_t^1 et $H^1(C_{\bar\eta},\mathbf{Z}/\ell^n)^P = H^1(C_{\bar\eta},\mathbf{Z}/\ell^n)$ avec N indépendant de n, et 3.5 en résulte.

<u>Remarque</u> 3.6. Soit A une variété abélienne sur $k(\eta)$. Puisque A est quotient d'une jacobienne, on trouve encore que l'action de I sur $H^1(A_\eta,\mathbf{Q}_\ell)$ ou $T_\ell(A)$ est quasi-unipotente d'échelon 2.

<u>Remarque</u> 3.7. L'action de I sur $H^1(X_{\bar\eta},\mathbf{Q})$ est en fait quasi-unipotente d'échelon 2 pour tout schéma X de type fini sur η.

Le théorème 3.5 (ou 3.6) est à la base de la démonstration du théorème de réduction stable pour les variétés abéliennes qui sera donnée dans l'exposé IX § 3.

3.8. Il est clair que lorsqu'on dispose de la pureté et de la résolution des singularités (par exemple en caractéristique 0) la méthode précédente démontre le théorème de monodromie, et fournit des bornes pour l'exposant de nilpotence. Ainsi, en égale caractéristique 0, on trouve que pour X propre et lisse sur η et T dans un sous-groupe ouvert de I, on a

$$(T-1)^{q+1} = 0 \quad \text{sur} \quad H^q(X_{\bar\eta}, \mathbf{Z}_\ell) \qquad (T \in I_1 \subset I).$$

4. <u>Critères de nullité pour les faisceaux de cycles évanescents</u>

4.1. Soient S un trait strictement local et $f : X \longrightarrow S$ un schéma de type fini sur S. Posons $n = \dim(X_\eta)$.

Si X' est l'adhérence schématique de X_η dans X, on a :

a) Sur $X_s - X'_s$, $\phi^{-1} = \Lambda$ et les autres ϕ^i sont nuls ;

b) sur X'_s , les ϕ^i et ψ^i relatifs à X/S ou à X'/S coïncident, et $\phi^{-1} = 0$

Puisque X' est plat sur S , ceci permet souvent de se ramener au cas X est plat sur S .

Théorème 4.2.

(i) On a $\psi^i = 0$ pour $i > n$.

(ii) Plus précisément, pour x un point de X_s dont l'adhérence soit de dimension k (k = deg tr(k(x)/k(s))) et pour $\bar{x}$ un point géométrique localisé x , on a

$$\psi^i_{\bar{x}} = 0 \quad \text{pour} \quad i > n-k \text{ , i.e.}$$

$$d(\psi^i) \leqslant n-i \qquad \text{(notation de SGA 4 XIV 2.1).}$$

On a $\psi^i_{\bar{x}} = H^i(X_{(\bar{x})\bar{\eta}}, \Lambda)$, et $X_{(\bar{x})\bar{\eta}}$ est limite projective de schémas affines de dimension $\leqslant n$ sur $k(\bar{\eta})$. L'assertion (i) résulte donc du théorème de Lefschetz affine (SGA 4 XIV 3.2) par passage à la limite.

Pour prouver (ii), on peut supposer que X est plat sur S (4.1) et qu existe un S-morphisme quasi-fini et plat $g : X \longrightarrow \mathbb{A}^k_S$ tel que g(x) soit le p générique de $\mathbb{A}^k_s$. Soit S' le trait localisé strict de $\mathbb{A}^k_S$ en $\bar{x}$. On a

a) $S'_{\bar{\eta}}$ est le spectre d'un corps, et $\mathrm{Gal}(\overline{\eta'}/s'_{\bar{\eta}})$ est un p-groupe Q .

b) D'après (i) pour g , on a $H^i(X_{(x)\overline{\eta'}},\Lambda) = 0$ pour $i > n-k$.

c) On a $H^i(X_{(x)\bar{\eta}},\Lambda) = H^i(X_{(x)\overline{\eta'}},\Lambda)^Q$, d'où le théorème.

Corollaire 4.3. Si f est propre et plat et que la dimension du lieu de non liss de f dans X_s est $\leqslant d$, le morphisme de spécialisation $H^i(X_s) \longrightarrow H^i(X_{\bar{\eta}})$ es un isomorphisme pour $i > n+d+1$ et un épimorphisme pour $i = n+d+1$.

4.4. Pour prouver, dans certains cas, que les ϕ^i pour i petit sont nuls, on s'appuyera sur la théorie de la dualité locale (directement ou via des théorèmes de Lefschetz locaux de SGA 2 XIV). Cet outil n'est disponible qu'en caractéristique 0 (ou en égale caractéristique p lorsqu'on dispose de la résolution des singularités à la Hironaka dans les dimensions considérées).

Théorème 4.5. *Supposons* S *de caractéristique* 0 . *Soient* $f : X \longrightarrow S$ *un morphisme de type fini et* x *un point fermé de* X_s . *On suppose que*

(a) x *est un point de non lissité isolé dans sa fibre*

(b) X *est de profondeur géométrique relative* $\geqslant n$ *en* x : *au voisinage de* x , X *s'identifie à un sous-schéma défini par* k *équations dans un schéma lisse de dimension relative* N *en* x , *avec* $n \leqslant N-k$.

Alors $\phi_x^i = 0$ *pour* $i < n$.

Soit X_x le localisé strict de X en x et $V = X_x - \{x\}$. Pour tout trait S' fini sur S , soient de même $X'_x = X_x \times_S S'$ et $V' = V \times_S S'$. Pour $\bar{S}$ le normalisé de S dans $\bar{\eta}$, soient $\bar{X}_x = X_x \times_S \bar{S}$, $\bar{V} = V \times_S \bar{S}$. On a

(1) Si $\phi^i = 0$ sur $(X_x)_s$ (i.e. en toute générisation de x dans X_s) pour $i \leqslant m$, alors

$$H^{i-1}_{\{x\}}(\bar{X}_x) = \tilde{H}^i(\bar{V}) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}^i(\bar{V}_{\bar{\eta}}) = \phi^i \qquad \text{pour } i \leqslant m .$$

Les ϕ^i sont en effet des faisceaux de cohomologie à support dans V_s de $\bar{V}$; sous les hypothèses de 4.5, (a) est d'application pour $m = \infty$ (SGA 4 XV 2.1).

(2) L'hypothèse (b) de 4.5 est stable par changement de base. D'après SGA 2 XIV 5.6, elle implique que

$$\tilde{H}^i(V') = H^{i-1}_{\{x\}}(X'_x) = 0 \qquad \text{pour } i < n ;$$

on conclut en notant que $\tilde{H}^i(\bar{V})$ est limite inductive des $\tilde{H}^i(V')$.

D'après 4.2. et 4.5, on a

Corollaire 4.6. *Pour* S *un trait hensélien de caractéristique* 0 , X/S *une intersection complète relative de dimension relative* n *et* $x \in X_s$ *un point de non lissité isolé dans sa fibre, on a* $\phi_x^i = 0$ *pour* $i \neq n$.

Corollaire 4.7. *Sous les hypothèses de* 4.6, ϕ_x^n *est un* Λ*-module plat.*

Pour Λ' une Λ-algèbre finie, un general non sense (SGA 4 XVII 5.2.11) fournit en effet, pour les ϕ_Λ^i , relatifs à Λ' ,

$$\phi^{n-i}_{\Lambda'} = \mathrm{Tor}^{\Lambda}_{i}(\Lambda', \phi^{n}_{\Lambda})$$

et on applique 4.6 à Λ' .

Variante 4.8. Dans 4.5, supprimons la condition (a) et soit Z le lieu de non de f . On peut encore conclure

$$\phi^{i}_{x} = 0 \quad \text{pour } i < n - \dim Z_s \quad .$$

On procède par récurrence descendante sur $\dim \overline{\{x\}}$. L'hypothèse de récurrence perme d'appliquer 4.5 (1) avec $m = n - \dim Z_s$, et on achève la démonstration comme précédemment.

4.9. Il est possible d'obtenir un critère de nullité utilisant seulement des informations sur les fibres géométriques de f . Dans le cas des intersections complètes, le résultat est toutefois d'une unité moins bon que 4.5.

Proposition 4.10. Sous les hypothèses générales de 4.5, supposons que

(a) x est un point de non lissité isolé dans sa fibre.

(b) Pour tout point y de $X_{\bar\eta}$, d'adhérence dans $X_{\bar\eta}$ de dimension $d(y)$, qui soit une générisation de x , on a $\mathrm{prof\ et}_y(X_{\bar\eta}) \geq n - d(g)$, i.e. $H^i_{\{y\}}(X_{\bar\eta}) = 0$ pour $i \leq n - d(g)$

(c) $\mathrm{prof\ et}_x(X_s) \geq n$,

Alors, $\phi^i_x = 0$ pour $i < n-1$.

Gardons les notations de 4.5 ; on peut appliquer 4.5 (1) avec $m = \infty$. D'après le théorème de Lefschetz local (SGA 2 XIV), l'hypothèse (b) fournit

$$H^i(V') \xrightarrow{\sim} H^i(V_s) \qquad (\ i < n-1\ )$$

$$H^i(V') \hookrightarrow H^i(V_s) \qquad (\ i = n-1\ )$$

et on conclut par (c) que $H^i(\bar V) = \varinjlim H^i(V') = 0$ pour $i \leq n-1$, d'où 4.10.

4.11. Comme en 4.8, on peut donner de 4.10 une variante ne supposant pas (a).

5. Action de la monodromie sur les π_1

Dans cet § (= exposé de Grothendieck du 19/11/1968), nous ferons usage du théorème de réduction semi-stable pour les courbes. Artin et Winters [2] ont donné une démonstration directe de ce théorème, qu'on peut aussi déduire [3] du théorème analogue pour les variétés abéliennes (IX § 3, utilisant 3.6). Nous utiliserons aussi la théorie de Schlessinger (exposé VI de Rim).

5.1. Soient k un corps algébriquement clos, C une courbe projective sur k et $x_1 \dots x_n$ un ensemble fini de points fermés de C. On dit que $X = (C\ ;\ x_1,\dots,x_n)$ est stable si

(a) C est réduite et ses seules singularités sont des points doubles à tangentes distinctes ;

(b) les x_i sont distincts, et des points lisses de C ;

(c) si C_1 est une composante irréductible de C, et que E est l'ensemble des points de la normalisée C_1' de C_1 au-dessus d'un point singulier de C_1 ou d'un des x_i, alors, si C_1' est de genre 0 (resp. 1), E a au moins 3 (resp 1) éléments.

La condition (c) équivaut à chacune des suivantes :

(c') X n'a pas d'automorphismes infinitésimaux non triviaux.

(c") Si ω est le faisceau inversible dualisant, le faisceau inversible $\omega' = \omega(\Sigma\, x_i)$ est ample.

Un S-schéma C, muni de sections $x_1, \dots, x_n$ est une courbe stable sur S si ses fibres géométriques sont des courbes stables. Dans [3] §§ 1,2, seul le cas $n = 0$ est considéré. L'extension des résultats de loc. cit. au cas général est triviale :

(1) Pour X/k stable, $H^1(C,\omega'^{\otimes n}) = 0$ pour $n \geq 2$ et $\omega'^{\otimes n}$ est très ample pour $n \geq 3$ (cf. [3] 1.2).

(2) Le schéma formel M des modules de X est lisse, et C reste singulier au-dessus d'un diviseur à croisements normaux de M.

(3) Pour X et Y stables sur S, $\underline{\mathrm{Isom}}_S(X,Y)$ est fini et non ramifié sur S (isomorphismes compatibles aux points marqués).

(4) Pour X/k stable, $\mathrm{Aut}_k(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}_k \mathrm{Pic}^\circ(C)$ est injectif.

On a enfin

Proposition 5.1.1. Soit $X_\eta = (C_\eta ; x_1, \dots, x_n)$ stable sur le point générique η d'un trait S, avec C_η lisse. Il existe une extension finie séparable η' de η et une courbe stable X' sur le normalisé S' de S dans η telle que $X' \otimes_{S'} \eta' = X_\eta \otimes_\eta \eta'$.

Cela résulte du théorème de réduction semi-stable habituel qui permet de prendre η' tel que la fibre spéciale géométrique du modèle minimal C'' de $C_{\eta'}$ sur S' vérifie (a). On éclate ensuite, de façon itérée s'il le faut, des points lisses de C'' pour que (b) soit vérifiée. On contracte alors les chaînes de compo-santes rationelles lisses de self intersection deux ne contenant aucun $\bar{x}_i$ de la f bre spéciale et on obtient C' (cf. [3], preuve de 2.3 p. 88).

On peut vérifier comme dans loc. cit. que C' existe dès que la jacobien de C_η a réduction stable. L'hypothèse de lissité sur C_η est par ailleurs superfl

5.2. Soit X_η un schéma géométriquement connexe de type fini sur le corps des fra tions d'un trait strictement local S. Pour ξ un point géométrique de $X_{\bar{\eta}}$ on a suite exacte

$$(5.2.1) \qquad 0 \longrightarrow \pi_1(X_{\bar{\eta}},\xi) \longrightarrow \pi_1(X,\xi) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta) \longrightarrow 0 \quad ,$$

d'où un homomorphisme de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ dans le groupe des automorphismes extérieurs de $\pi_1(X_{\bar{\eta}})$. Passant au plus grand quotient premier à p $\pi_1^{(p)}(X_{\bar{\eta}})$ de $\pi_1(X_{\bar{\eta}})$, on trouve

$$(5.2.2) \qquad \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta) \longrightarrow \mathrm{Aut\ ext}\,(\pi_1^{(p)}(X_{\bar{\eta}})) \ .$$

Supposons que X_η ait un point rationnel x, et soit $\bar{x}$ le point géomé trique $\bar{\eta} \longrightarrow \eta \xrightarrow{x} X_\eta$. Pour $\xi = \bar{x}$, la suite exacte (5.2.2) splitte canonique ment, d'où

$$(5.2.3) \qquad [x] : \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\pi_1(X_{\bar{\eta}},\bar{x})) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\pi_1^{(p)}(X_{\bar{\eta}},\bar{x})) \quad .$$

Théorème 5.3. *L'image de* P *par* 5.2.2 (*ou* 5.2.3, *cela revient au même*) *est finie*.

5.3.1. *Réduction au cas où* X_η *est géométriquement normal et intègre*.

Soient X'_η le normalisé de X_η , $(X'_{i\eta})_i$ la famille des composantes connexes de X'_η , $X''_\eta = X'_\eta \times_{X_\eta} X'_\eta$ et $(X''_{j\eta})_j$ les composantes connexes de X''_η . Quitte à passer à une extension finie de $k(\eta)$, on peut supposer que les $X'_{i\eta}$ sont géométriquement normaux et intègres, avec un point rationnel x_i , et que les $X''_{j\eta}$ sont géométriquement connexes, avec un point rationnel y_j . Pour $k = 1$ ou 2 et $p_k(y_j) \in X'_{i\eta}$, choisissons une classe de chemins ℓ_{kij} de $pr_k(\bar{y}_j)$ à $\bar{x}_i$: c'est un élément d'un torseur sous $\pi_1(X'_{i\bar{\eta}},\bar{x}_i)$. Soit $\bar{\ell}_{kij}$ le chemin "premier à p " correspondant (le même modulo $\mathrm{Ker}(\pi \longrightarrow \pi^{(p)})$. On peut prendre $\bar{\ell}_{kij}$ invariant par P : l'ensemble des chemins premiers à p est $\varprojlim$ d'ensembles finis d'ordre premier à p sur lesquels le pro-p-groupe P agit.

Dès lors, si un sous-groupe d'indice fini P' de P agit trivialement sur les $\pi_1^{(p)}(X'_{i\bar{\eta}},\bar{x}_i)$, il résulte des formules de Van Kampen (i.e. de ce que $X'_{i\bar{\eta}} \longrightarrow X_{i\bar{\eta}}$ est de descente effective pour les revêtements étales) que P' agit trivialement sur $\pi_1^{(p)}(X_{\bar{\eta}},\bar{x})$.

5.3.2. Pour $X_{\bar{\eta}}$ normal et U un ouvert, $\pi_1(U)$ s'envoie sur $\pi_1(X_{\bar{\eta}})$; on peut donc supposer $X_{\bar{\eta}}$ lisse et affine. Coupant par les sections hyperplanes *génériques* (ceci remplace S par le localisé strict de S au point générique de la fibre spéciale d'un $\mathbb{A}^n_S$) et appliquant Bertini, on se ramène à supposer que X_η est *lisse, géométriquement connexe et de dimension un*. Quitte à passer à une extension finie de $k(\eta)$, on peut supposer que X_η est le complément dans une courbe projective et lisse $\bar{X}_\eta$ d'un ensemble fini de points rationnels x_i ,(dont il nous est loisible d'augmenter le nombre. Appliquant le théorème de réduction semi-stable (5.1.1), on se ramène à supposer qu'il existe une courbe stable $X = (C\ ;\ x_1\ ,\dots,\ x_n)$ sur S telle que $X_\eta = C_\eta - \{x_1\ ,\dots,\ x_n\}$. On applique alors le résultat suivant

Théorème 5.4. Soient S un schéma strictement local, $f : \bar{X} \longrightarrow S$ un morphisme propre et plat, de fibre spéciale une courbe dont les seuls points de non lissité sont des points doubles ordinaires et Y un sous-schéma de $\bar{X}$, réunion d'un nombre fini de sections disjointes contenues dans l'ouvert de lissité. Soit x un point rationnel de $X = \bar{X} - Y$. Soit U l'ouvert de S au-dessus duquel X est lisse, et ξ un point géométrique de U. Alors l'image de $\pi_1(U,\xi)$ dans $\mathrm{Aut}(\pi_1^{(p)}(X_\xi, x\xi))$ est abélienne et première à p.

On prendra garde qu'on ne peut faire agir $\pi_1(U,\xi)$ sur $\pi_1^{(p)}(X_\xi,x\xi)$ que parce que les $\pi_1^{(p)}$ vérifient le théorème de spécialisation.

On se ramène au cas S complet, puis au cas universel où S est un schéma formel de modules pour la fibre spéciale, munie de ses sections. S est alors un anneau de séries formelles sur un anneau de Cohen : $S = \mathrm{Spec}(W[[t_1 \ldots t_n]])$ et U est le complément d'un diviseur à croisements normaux d'équation $t_1 \ldots t_m = 0$. Dans ce cas universel, d'après le lemme d'Abhyankar, $\pi_1(U,\xi)$ est abélien et premier à p, d'où le théorème.

Remarque 5.5. On peut démontrer un résultat analogue à 5.4 en dimension relative quelconque en considérant une section plane générique de dimension un et en appliquant Bertini.

6. Appendice : démonstration arithmétique du théorème de réduction stable (par P. Deligne)

Soient S un trait et A_η une variété abélienne sur $k(\eta)$, de dimension $d \neq 0$. Pour $S' \longrightarrow S$ un morphisme local de traits, on note $A_{\eta'}$ la variété abélienne sur $k(\eta')$ déduite de A_η par extension des scalaires. Soient $\mathcal{A}_{S'}$ le modèle de Néron de $A_{\eta'}$ sur S', $\mathcal{A}_{S's'}$ sa fibre spéciale et $\mathcal{A}^\circ_{S's'}$ la composante neutre de $\mathcal{A}_{S's'}$. Le théorème de réduction stable est le suivant.

Théorème 6.1. *Pour S' convenable, $A_{\eta'}$ a réduction stable, i.e. $\mathcal{A}^{\circ}_{S's'}$ est extension d'une variété abélienne par un tore.*

Il résulte assez facilement de 6.1. qu'on peut prendre S' tel que $k(\eta')$ soit une extension séparable finie de $k(\eta)$. Supposons tout d'abord que le corps résiduel de S est de type fini sur le corps premier (le même argument marcherait pour $k(s)$ radiciel sur un tel corps).

Soient ℓ un nombre premier premier à l'exposant caractéristique résiduel p, $T_\ell(A)$ le module de Tate, $V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ et $\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta) \longrightarrow GL(T_\ell(A))$ la représentation naturelle. Une extension des scalaires préliminaire nous ramène au cas où le groupe d'inertie I agit de façon unipotente (1.2) donc à travers son plus grand pro-ℓ-groupe quotient $\mathbb{Z}_\ell(1)$ (0.3). Soient T l'image dans $GL(T_\ell(A))$ d'un générateur de $\mathbb{Z}_\ell(1)$ et r le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $(T-1)^r \neq 0$. On a :

Lemme 6.2. *L'application*

$$\sigma \in I\ ,\ v \in V_\ell(A) \longmapsto (\rho(\sigma)-1)^r\,(v)$$

induit des morphisme et isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} V_\ell(A)_I \otimes \mathbb{Q}_\ell(r) & \xrightarrow{\quad M \quad} & V_\ell(A)^I \\ \downarrow & & \uparrow \\ V_\ell(A)/\mathrm{Ker}(T-1)^r \otimes \mathbb{Q}_\ell(r) & \xrightarrow{\quad \sim \quad} & \mathrm{Im}(T-1)^r \end{array} \qquad (6.2.1)$$

$V_\ell(A)_I$ et $V_\ell(A)^I$ sont des $\mathrm{Gal}(\bar{s}/s)$-modules et M est galoisien.

6.3. On dit qu'une représentation ℓ-adique $\tau : \mathrm{Gal}(\bar{s}/s) \longrightarrow GL(V)$ est de poids n ($n \in \mathbb{Z}$) si la condition suivante est vérifiée :

(*) Pour un modèle convenable X de $k(s)$ (X = une variété irréductible de type fini sur le corps premier, avec $k(s) = k(X)$), τ se factorise par $\pi_1(X,\bar{s})$ et pour x un point fermé de X, les valeurs propres de $\tau(F_x)$ sont des nombres algébriques dont les conjugués complexes sont tous de valeur absolue $|k(x)|^{n/2}$ (F_x désigne le Frobenius géométrique ϕ_x^{-1}).

Si V (resp. W) est de poids n (resp. m) et que $n \neq m$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}}(V,W) = 0$.

6.4. Il résulte de la propriété universelle du modèle de Néron que $V_\ell(A)^I = V_\ell(\mathcal{A}^\circ_{S,s})$. Si a est la dimension du plus grand quotient abélien de $\mathcal{A}^\circ_{S,s}$ et m la dimension de la partie multiplicative de $\mathcal{A}^\circ_{S,s}$, d'après Weil, $V_\ell(A)^I$ est donc extension d'une représentation de dimension $2a$ et poids -1 par une représentation de dimension m et poids -2.

6.5. Soit A^* la variété abélienne duale de A. Rappelons que $V_\ell(A^*)$ et $V_\ell(A)$ (donc $V_\ell(A^*)^I$ et $V_\ell(A)_I$ sont en dualité à valeurs dans $\mathbb{Q}_\ell(1)$. Si a^* et m^* sont définis pour A^* comme a et m pour A, il résulte de 6.4 que $V_\ell(A)_I$ est extension d'une représentation de dimension m^* et de poids 0 par une représentation de dimension $2a^*$ et de poids -1.

6.6. Le module galoisien $\mathbb{Q}_\ell(r)$ est de poids $-2r$. Puisque $\mathrm{Im}(T-1)^r \neq 0$, on déduit de 6.4, 6.5 et de l'isomorphisme 6.2 que $r \leqslant 1$. Si $r = 0$, on a

$$\begin{cases} a + m \leqslant d \\ 2a + m = 2d, \end{cases}$$

donc $m = 0$, $a = d$ et A_η a bonne réduction. Supposons que $r = 1$. On tire alors de 6.2 que $\mathrm{Im}(T-1)$ est de poids -2 et que $V_\ell(A)/V_\ell(A)^I$ est de poids 0 ; ces espaces ont même dimension $m_1 \leqslant m$.

On a alors

$$\dim V_\ell(A)^I = 2d - m_1 = 2a + m ,$$

$$2 \dim \mathcal{A}_{S,s} \geqslant 2\,(a + m) \geqslant 2\,a + m + m_1 = 2\,d = 2 \dim \mathcal{A}_{S,s} ,$$

de sorte que A_η a réduction stable $(\dim \mathcal{A}_{S,s} = a + m)$. On a obtenu en même temps que $m_1 = m$, i.e. que $\mathrm{Im}(T-1) \subset V_\ell(A)^I \simeq V_\ell(\mathcal{A}^\circ_{S,s})$ est le V_ℓ de la partie multiplicative de $\mathcal{A}^\circ_{S,s}$.

6.7. Pour traiter le cas général, nous utiliserons (0.5) (cf. 1.3). On se ramène à supposer que

(a) les conditions de (0.5.2) ou (0.5.3) sont vérifiées ;

(b) $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ agit trivialement sur A_ℓ ;

(c) l'action de I sur $T_\ell(A)$ est unipotente.

Sous ces hypothèses, nous prouverons que A_η a réduction stable. L'hypothèse (a) permet d'appliquer (0.5.1) pour avoir $S = \varprojlim S_i$ comme en 1.3, dont nous reprenons les notations. Soit s_i le point fermé de S_i .

Pour i assez grand, la composante neutre $\mathcal{A}^\circ$ du modèle de Néron $\mathcal{A}_S$ provient d'un schéma en groupe lisse à fibres connexes $\mathcal{A}_i$ sur S_i , et $(\mathcal{A}_i)_\ell$ est constant sur $S_i - D$. Le groupe $\pi_1(S_i - D_i , \bar{\eta})$ agit sur $T_\ell(A)$, et agit trivialement sur $T_\ell(A)/\ell\, T_\ell(A) \simeq A_\ell$. Comme en 1.3, on voit que P_i agit trivialement. On a alors par (1.3.1) :

$$T_\ell(A)_I = T_\ell(A)_{I_i} , \qquad T_\ell(\mathcal{A}_{i,s_i}) = T_\ell(\mathcal{A}_s^\circ) = T_\ell(A)^I = T_\ell(A^{I_i})$$

et (6.2.1) est un diagramme de $\mathrm{Gal}(\bar{s}_i/s_i)$-modules auquel on peut appliquer les arguments 6.4 à 6.6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN Algebraic approximation of structures over complete local rings. Publ. Math. I.H.E.S. 36 -1969. pp. 23-58.

[2] M. ARTIN and G. WINTERS. Degenerate fibres and reduction of curves.

[3] P. DELIGNE and D. MUMFORD. The irreductibility of the space of curves of a given genus. Publ. Math. I.H.E.S. 36 - 1969. pp. 75 - 110.

[4] J.P. SERRE Corps locaux. Publ. Math. univ. Nancago-Hermann 1962.

[5] J.P. SERRE and J. TATE. Good reduction of abelian varieties. Ann. of Math. 88 3 - 1968 - pp. 492 - 517.

SGA 7

Exposé II

Propriétés de finitude du groupe fondamental

par Michèle RAYNAUD

Soient k un corps séparablement clos de caractéristique $p \geq 0$, X un schéma connexe de type fini sur k et $\Pi_1^{(p)}(X)$ le plus grand quotient "premier à p" de $\Pi_1(X)$. On montre, dans cet exposé, que, si X est une surface, $\Pi_1^{(p)}(X)$ est topologiquement de présentation finie et qu'il en est de même pour X quelconque si l'on admet la résolution des singularités.

Dans le cas d'une surface, la méthode de démonstration, due à J.P. Murre, consiste à se ramener au cas où l'on a une fibration au-dessus de P^1 ayant les propriétés (i), (ii) et (iii) de la proposition ci-dessous.

Proposition 2.1. Soient k un corps algébriquement clos, S une surface projective, irréductible, lisse sur k. Alors on peut trouver un éclatement

$$g : S' \longrightarrow S \quad ,$$

où S' est une surface régulière, munie d'une fibration

$$f : S' \longrightarrow P^1 \quad ,$$

tels que f ait une section σ, et que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) f est lisse aux points de $\sigma(P^1)$.

(ii) les fibres de f sont des courbes géométriquement intègres n'ayant que des singularités ordinaires.

(iii) il existe un ouvert non vide U de P^1 tel que les fibres de f aux points de U soient lisses.

La proposition résulte de l'existence d'un plongement projectif $S \longrightarrow P^r$ tel qu'on puisse trouver un pinceau de Lefschetz par rapport à ce plongement (XVII 2.5). Soit en effet $D = \{H_t\}_{t \in P^1}$ un tel pinceau d'hyperplans ; rappelons que l'on a les propriétés suivantes (loc. cit. 2.2) :

a) l'axe Δ de D coupe transversalement S ; le sous-schéma fermé $\Delta \cap$ est donc réduit et formé d'un ensemble fini de points fermés de S, $x_1,\dots,x_n$.

b) il existe un ouvert non vide U de P^1 tel que, pour tout point $t \in$ H_t coupe transversalement S.

c) pour tout point $t \in P^1-U$, H_t coupe transversalement S sauf en un point qui est un point singulier quadratique ordinaire.

Par chaque point x de S n'appartenant pas à Δ passe un unique hyper plan H_t, et l'application qui, à x, associe $t \in P^1$, est une application rati nelle a de S dans P^1 de domaine de définition $S-(\Delta \cap S)$.

On considère l'éclatement $g : S' \longrightarrow S$ du sous-schéma fermé $S \cap \Delta$ d S. Le schéma S' est régulier et la fibre S'_{x_i} au-dessus d'un point x_i s'iden tifie au fibré projectif défini par l'espace tangent à S en x_i, donc est isomo phe à P^1 (EGA IV 19.4.2, 19.4.4). De plus l'application rationnelle $f = ag$ est partout définie (XVIII 3.1). Enfin, on peut associer à chaque point x_i la sectio de f qui, à un point $t \in P^1$, fait correspondre le vecteur tangent en x_i à $H_t \cap S$.

Vérifions les conditions (i), (ii) et (iii). On note que, pour chaque $t \in P^1$, les courbes S'_t et $S_t = H_t \cap S$ sont isomorphes ; le morphisme $S'_t \longrightarrow S_t$ est en effet un isomorphisme sauf peut-être en les points x_i, point où S_t est régulière ; comme de plus S'_t est intersection complète dans S', S'_t est intègre, donc isomorphe à S_t.

Les conditions (i) et (ii) ne sont autres que les conditions a) et b). En f est lisse aux points de σ car f est plat et car les fibres S'_t sont géomét quement régulières aux points $\sigma(t)$.

<u>Corollaire</u> 2.2. <u>Les notations étant celles de</u> 2.1, <u>soit</u> Y <u>un diviseur à croisements normaux dans</u> S , $Y' = Y \times_S S'$. <u>Alors on peut choisir</u> f , g , U <u>tels que</u> $Y' \times_{P^1} U$ <u>soit un diviseur à croisements normaux relativement à</u> U .

On sait que, s'il existe un pinceau de Lefschetz pour un plongement $S \longrightarrow P^r$, les pinceaux de Lefschetz forment un ouvert de la variété des droites de P^r (XVII 3.2.1). Il en est de même de l'ensemble des pinceaux de Lefschetz dont l'axe ne rencontre pas Y et tels qu'il existe un ouvert non vide U_1 de P^1 tel que l'intersection de Y et H_t soit lisse si $t \in U_1$. Il suffit alors de construire f et g à partir d'un pinceau satisfaisant à ces deux conditions et de remplacer par $U \cap U_1$.

2.3.0. Soit G un groupe profini. Rappelons que G est dit topologiquement de génération finie s'il existe un entier n tel que G soit isomorphe à un quotient du pro-groupe libre à n générateurs $F(n)$; soit $K = \mathrm{Ker}(F(n) \longrightarrow G)$; on dit que G est topologiquement de présentation finie si, de plus, on peut trouver un nombre fini d'éléments $k_1,\dots,k_r$ de K tels que le plus petit sous-groupe invariant fermé de K , contenant $k_1,\dots,k_r$, soit égal à K .

<u>Théorème</u> 2.3.1. <u>Soient</u> k <u>un corps séparablement clos de caractéristique</u> $p \geq 0$, X <u>un schéma connexe de type fini sur</u> k . <u>On suppose que les schémas de type fini et de dimension</u> $\leq \dim(X)$ <u>sur une clôture algébrique de</u> k <u>sont fortement désingularisables</u> (SGA 5 I 3.1.5) (<u>condition réalisée si</u> $\dim X = 2$ <u>d'après</u> [1] <u>ou si</u> $k = 0$ <u>d'après</u> [2]). <u>Alors le groupe fondamental</u> $\pi_1^{(p)}(X)$ <u>est topologiquement de présentation finie</u>.

On peut supposer k algébriquement clos d'après SGA 1 IX 4.10.

1) <u>Réduction au cas où</u> X <u>est une surface régulière</u>.

Si $f : X' \longrightarrow X$ est un morphisme de type fini, on pose $X'' = X' \times_X S'$ et on note $(X'_a)_{a \in A}$ et $(X''_b)_{b \in B}$ l'ensemble des composantes connexes de X' et X'' respectivement. Lorsque f est un morphisme de descente effective pour la catégorie des revêtements étales, le groupe fondamental $\pi_1(X)$ peut se calculer explicitement en terme des groupes fondamentaux $\Pi_1(X'_a)$ et $\Pi_1(X''_b)$; il en résulte (SGA 1 IX 5.2, 5.3) que, si les $\Pi_1(X'_a)$ sont topologiquement de génération finie, il en est de même de $\Pi_1(X)$; si les $\Pi_1(X'_a)$ sont topologiquement de présentation finie et les $\Pi_1(X''_b)$ topologiquement de génération finie, $\Pi_1(X)$ est topologiquement de présentation finie.

Comme X est désingularisable, on peut trouver un schéma régulier X' et un morphisme propre birationnel $f : X' \longrightarrow X$; comme f est un morphisme de descente effective pour la catégorie des revêtements étales, il suffit de prouver le théorème lorsqu'on fait l'hypothèse supplémentaire que X est régulier. On en déduit en effet que $\Pi_1(X)$ est topologiquement de génération finie ; sachant que $\Pi_1(X')$ est topologiquement de présentation finie et les $\Pi_1(X''_b)$ topologiquement de génération finie, on en déduit que $\Pi_1(X)$ est topologiquement de présentation finie.

Soit maintenant $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines et soit $f : \coprod U_i \longrightarrow X$ le morphisme canonique. Comme f est un morphisme de descente effective pour la catégorie des revêtements étales, on voit qu'il suffit de prouver le théorème pour les U_i ; on est donc ramené au cas où X est affine et lisse.

On suppose désormais X affine, lisse sur k, et $\dim X > 2$. On peut alors appliquer le théorème de Lefschetz pour les schémas quasi-projectifs ([3] V 7.4) ; si Y est une section hyperplane "assez générale" de X, on a un isomorphisme

$$\Pi_1(Y) \simeq \Pi_1(X) \quad .$$

Il suffit donc de prouver le théorème pour Y, ce qui nous ramène au cas où $\dim X = 2$.

2) <u>Cas où X est une surface lisse sur</u> k

D'après le théorème de désingularisation forte des surfaces, on peut trouver une surface S lisse, intègre, projective et une immersion ouverte $i : X \longrightarrow S$ telle que le diviseur $Y = S - X$ soit à croisements normaux. On applique le corollaire 2.2 dont on reprend les notations.

Montrons qu'il suffit de prouver que le groupe fondamental de $X' = X\times_S S'$ est topologiquement de présentation finie. Comme X et X' sont réguliers et comme on a

$$\operatorname{codim}(X - \bigcup_{1\leq i\leq n}\{x_i\}, X) \geq 2 \quad ,$$

tout revêtement étale de X' induit sur $X - \bigcup_{1\leq i\leq n}\{x_i\}$ un revêtement étale qui se prolonge de façon unique en un revêtement étale de X (SGA 2 1.11) ; ceci montre que l'on a un isomorphisme

$$\Pi_1(X') \simeq \Pi_1(X) \quad .$$

On considère le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "h"'] & X'_U \arrow[l] \arrow[d, "h_U"] \\ P^1 & U \arrow[l] \end{tikzcd} \quad ,$$

où $h = f|X'$. On note L l'ensemble des nombres premiers distincts de p et $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus du point générique η de P^1. Vérifions que les hypothèses de SGA 1 XIII 4.8 sont satisfaites. Le morphisme h a une section σ car il en est ainsi de f. Prouvons la condition a) de SGA 1 XIII 4.7 ; les fibres de h étant géométriquement intègres, le morphisme h est 0-acyclique et localement 0-acyclique (SGA 4 XV 4.1, 1.16) ; il reste à montrer que, pour tout faisceau d'ensembles localement constant F sur X', (F,h) est cohomologiquement propre en dimension ≤ 0. Si ξ est un point fermé de P^1 et si Z désigne la fermeture intégrale de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{P^1,\xi}$ dans $\bar{\eta}$ le schéma $X'_Z = X'\times_{P^1} Z$ vérifie la condition (S_2) aux points fermés de X' et est régulier en tout autre point, donc est normal ; par suite un revêtement étale de X'_Z dont la restriction à $X'_{\bar{\eta}}$ est connexe est nécessairement connexe. Ceci démontre notre assertion, d'où a). Comme X'_U est le complémentaire dans S'_U d'un diviseur à croisements normaux relativement à U, h_U est localement 1-asphérique pour L (SGA 4 XV 2.1) et, pour tout faisceau de L-groupes constant fini F sur X'_U, (F,h_U) est cohomologiquement propre en dimension ≤ 1 (SGA 1 XIII 2.4), d'où la condition b). Comme P^1 est normal et $T = P^1 - U$ de codimension 1 , on a

$$\text{prof ét}_T(S) \geqslant 2 \quad ,$$

d'où la condition c). La condition

$$\text{prof hop}_x(X') \geqslant 3$$

est valable en tout point fermé de X' d'après le théorème de pureté, d'où la condition e). Enfin, pour tout point $t \in P^1$, h est lisse en $\sigma(t)$, donc est localement 1-asphérique pour L en $\sigma(t)$, d'où la condition d).

D'après SGA 1 XIII 4.7, si a est un point géométrique de $X'_{\bar{\eta}}$, on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \Pi_1^{(p)}(X'_{\bar{\eta}},a) \longrightarrow \Pi_1'(X'_U,a) \longrightarrow \Pi_1(U,a) \longrightarrow 1 \quad ,$$

et le choix de la section σ définit un scindage de cette suite exacte. Notons K l'image de $\Pi_1(U,a)$ dans $\mathrm{Aut}(\Pi_1^{(p)}(X'_{\bar{\eta}},a))$; le groupe des coinvariants sous K , $\Pi_1^{(p)}(X'_{\bar{\eta}},a)_K$, est le quotient de $\Pi_1^{(p)}(X'_{\bar{\eta}},a)$ par le sous-groupe invariant fermé engendré par les éléments du type $x^{-1}qx$, où $x \in \Pi_1^{(p)}(X'_{\bar{\eta}},a)$, $q \in K$. D'après loc. cit. (4.7.4), on a un isomorphisme

$$\Pi_1^{(p)}(X',a) \simeq \Pi_1^{(p)}(X'_{\bar{\eta}},a) \quad .$$

Soit $P^1 - U = \coprod_{1 \leqslant i \leqslant n} \{t_i\}$ et, pour chaque i , soit $\bar{T}_i$ le localisé strict de P^1 en un point géométrique $\bar{t}_i$ au-dessus de t_i et s_i le point générique de $\bar{T}_i$. Un revêtement étale de U , dont la restriction à chaque s_i est triviale, se prolonge en un revêtement étale de P^1 , donc est trivial. Pour chaque i , soit $\bar{k}(s_i)$ la clôture algébrique de $k(s_i)$; l'assertion ci-dessus revient à dire que $\Pi_1(U,a)$ est égal au sous-groupe invariant fermé engendré par les images des groupes de Galois, $\mathrm{Gal}(\bar{k}(s_i),k(s_i))$, dans $\Pi_1(U,a)$. D'après I 5.3, l'image K_i de $\mathrm{Gal}(\bar{k}(s_i),k(s_i))$ dans $\mathrm{Aut}(\Pi_1^{(p)}(X'_{\bar{\eta}},a))$ est finie. Comme K est le plus petit sous-groupe invariant fermé contenant tous les K_i , et comme $\Pi_1^{(p)}(X'_{\bar{\eta}},a)$ est topologiquement de présentation finie (SGA 1 XIII 3.2), ceci prouve que $\Pi_1^{(p)}(X'_{\bar{\eta}},a)_K$, donc aussi $\Pi_1^{(p)}(X)$ qui lui est isomorphe, est topologiquement de présentation finie.

Remarque 2.3.2. La résolution des singularités n'est pas nécessaire pour démontrer le théorème 2.3.1 dans le cas où X est l'ouvert complémentaire d'un diviseur à croisements normaux d'un schéma projectif, lisse sur k.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Abhyankar, Local uniformization of algebraic surfaces over ground field of characteristic $p = 0$, Amer. J. of Math., t.63, 1956.

[2] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math., t. 79, 1964.

[3] M. Raynaud, Théorème de Lefschetz en cohomologie des faisceaux cohérents et en cohomologie étale, thèse, à paraître.

S G A 7

Exposé VI

FORMAL DEFORMATION THEORY

by D. S. RIM

1. Formal existence theorem

We recall the notion of cofibered category (S.G.A.1.IV). Let $\underline{C}$ be a fixed category. A cofibered category $\underline{A}$ over $\underline{C}$ is, by definition, a category $\underline{A}$ together with a functor $P : \underline{A} \to \underline{C}$ such that

Ax.1. For any map f in $\underline{C}$ and any object a in $\underline{A}$ with $P(a)$ = the source of f, there exists an f-morphism $\alpha : a \to b$ which is cocartesian (i.e. for any f-morphism $\alpha' : a \to b'$ there exists a unique T-morphism $\tau : b \to b'$ in $\underline{A}$ such that $\alpha' = \tau \cdot \alpha$ where T = the target of f).

Ax.2. A composit of cocartesian morphism in $\underline{A}$ is again cocartesian.

The following properties of a cofibered category $P : \underline{A} \to \underline{C}$ follow immediately from the definitions:

(cancellation) Let $a \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} a'$ be any two cocartesian maps such that $P(\alpha) = P(\beta)$. If there exists a cocartesian map $b \xrightarrow{\gamma} a$ such that $\alpha\gamma = \beta\gamma$, then $\alpha = \beta$.

(factorization) Given cocartesian maps $a \xrightarrow{\alpha} a'$, $a \xrightarrow{\beta} a''$, there exists a cocartesian map $a' \xrightarrow{\gamma} a''$ such that $\gamma\alpha = \beta$ if and only if there exists $f : P(a') \to P(a'')$ in $\underline{C}$ such that $f \cdot P(\alpha) = P(\beta)$. Furthermore γ is unique.

Let $\underline{A}$ be a cofibered category over $\underline{C}$. For each object S in $\underline{C}$ we denote by $\underline{A}(S)$ the subcategory of $\underline{A}$ whose objects are the objects a in $\underline{A}$ such that $P(a) = S$, and $\mathrm{Hom}_{\underline{A}(S)}(a,a') = \{\alpha \in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(a,a') \mid P(\alpha) = \mathrm{id}_S\}$. A cofibered groupoid over $\underline{C}$ is a cofibered category $\underline{A}$ over $\underline{C}$ such that $\underline{A}(S)$

is a groupoid for every object S in $\underline{C}$. We recall that a groupoid is a category in which every morphism is an isomorphism. Thus, a cofibered groupoid over $\underline{C}$ is a cofibered category $P : \underline{A} \to \underline{C}$ such that every map in $\underline{A}$ is cocartesian. Furthermore, for every map $\alpha \in F\ell(\underline{A})$, α is an isomorphism in $\underline{A}$ if and only if $P(\alpha)$ is an isomorphism.

Throughout the rest of this section, we fix a complete noetherian local ring Λ with the residue field k , and we set $\underline{C}_\Lambda$ to be the category of artinian local Λ-algebras with the same residue field k , where the maps are local homomorphisms over Λ . From 1.2 on, a cofibered groupoid $\underline{A}$ over $\underline{C}_\Lambda$ is always assumed to have the property that $\underline{A}(k) = \{e\}$, where $\{e\}$ denotes the category in which $\mathrm{Hom}_{\{e\}}(a, b)$ consists of one and only one element for any two objects a, b in $\{e\}$. A map $a' \xrightarrow{\alpha} a$ in $\underline{A}$ will be called simply a $\underline{C}_\Lambda$-map if $p(a') = p(a)$ and $p(\alpha) = 1_{p(a)}$. A map $a' \xrightarrow{\alpha} a$ on $\underline{A}$ will be called surjective, by abuse of language, if $p(\alpha) : p(a') \longrightarrow p(a)$ is surjective in $\underline{C}_\Lambda$.

Ex.1.1.(a) Let $F : \underline{C} \longrightarrow$(categories) be a functor. Define the category $\underline{F}$ as follows: an object in $\underline{F}$ is a pair (S,a) where $S \in \mathrm{ob}(\underline{C})$ and $a \in \mathrm{ob}F(S)$, and a map $(S,a) \to (S',a')$ is a pair (f,u') where $f : S \to S'$ is a map in $\underline{C}$ and $u' : F(f)a \to a'$ is a map in $F(S')$. Composition of two maps $(S,a) \xrightarrow{(f,u')} (S',a') \xrightarrow{(g,u'')} (S'',a'')$ is given by $(gf, u''\cdot(F(g)u')) : (S,a) \to (S'',a'')$. With respect to the functor $P : \underline{F} \to \underline{C}$ given by $(S,a) \mapsto S$, $\underline{F}$ becomes a cofibered category over $\underline{C}$. If $F(S)$ is a groupoid for every $S \in \mathrm{ob}(\underline{C})$, then $\underline{F}$ is a cofibered groupoid over $\underline{C}$. In particular, a functor $F : \underline{C} \to$ (groups) yields a cofibered group, and a functor $F : \underline{C} \to$ (Ens) yields a cofibered discrete groupoid. We also note that a natural transformation $\varphi : F \to G$, where $F,G : \underline{C} \to$ (categories) are functors, induces a cocartesian functor $\varphi : \underline{F} \to \underline{G}$ over $\underline{C}$.

Ex.1.1.(b) Let X , Y be schemes over Λ together with a fixed isomorphism $X \otimes_\Lambda k \xleftrightarrow{\tau} Y \otimes_\Lambda k$. Then the functor $\mathrm{Isom}_{X,Y} : \underline{C}_\Lambda \to$ (groupoids) given by $\mathrm{Isom}_{X,Y}(S) =$ the set of isomorphisms $X \otimes_\Lambda S \xleftrightarrow{\sigma} Y \otimes_\Lambda S$ such that $\sigma \otimes_\Lambda k = \tau$ **yields a cofibered groupoid** $P : \underline{\mathbf{Isom}}_{X,Y} \to \underline{C}_\Lambda$.

Ex.1.1.(c) Let X_0 be a fixed scheme over k , and let $\underline{M}_{X_0}$ be the category consisting of deformations of X_0 over $\underline{C}_\Lambda$ (see §4). Thus an object in $\underline{M}_{X_0}$ is a pair (R,X) where R is in $\underline{C}_\Lambda$ and X is a deformation of X_0 to R . Then the functor $P : \underline{M}_{X_0} \to \underline{C}_\Lambda$ given by $(R,X) \rightsquigarrow R$ defines a cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$.

Ex.1.1.(d) For any groupoid X we denote by $[X]$ the discrete groupoi consisting of the isomorphism classes of objects in X . If $P : \underline{F} \to \underline{C}_\Lambda$ is a cofibered groupoid, we obtain a functor $[\underline{F}] : \underline{C}_\Lambda \to (\mathrm{Ens})$ given by $[\underline{F}](S) = [\underline{F}(S)]$, and in turn a cofibered discrete groupoid, which is, by abuse of notation, denoted by $[\underline{F}]$.

Definition 1.2. A cofibered groupoid $\underline{A}$ over $\underline{C}_\Lambda$ is called semi-homogeneous if the following properties hold:

(1) every diagram

$$\begin{tikzcd} a'' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dotted] & a' \arrow[d] \\ a_1 \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

of solid arrows in $\underline{A}$ where $a' \to a$ is surjective can be complete into a commutative diagram including dotted arrows.

(2) Let $R \times_k k[\varepsilon] \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} R,\ k[\varepsilon]$ be the projection maps, where $k[\varepsilon]$ is the ring of dual numbers over k , and let $a' \xrightarrow{\alpha} a$, $b' \xrightarrow{\beta} a$ be π_1-map in $\underline{A}$. Then there exists a $\underline{C}_\Lambda$-map $\gamma : a' \to b'$ with $\alpha = \beta\cdot$ if and only if $(\pi_2)_*(a') \approx (\pi_2)_*(b')$.

Remark 1.3.(a) A reformulation of the notion in terms of 2-categories will be given later in 2.6(b). We note that if $\underline{A}$ is semi-homogeneous. Then so is $[\underline{A}]$ and in particular 1.2(2) entails the canonical map

$$[\underline{A}(R \times_k k[\varepsilon])] \longrightarrow [\underline{A}(R)] \times [\underline{A}(k[\varepsilon])]$$

to be bijective.

Remark 1.3.(b) Consider a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & a' \arrow[dl, "v_1"'] \arrow[dr, "v_2"] & \\ a_1 \arrow[dr, "u_1"'] & & a_2 \arrow[dl, "u_2"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

in a cofibered category $\underline{A}$ over $\underline{C}_\Lambda$. Set $R = P(a)$, $R' = P(a')$ and $R_i = P(a_i)$ for $i = 1, 2$. If we set a'' to be the "direct image" under the map $(P(v_1), P(v_2)) : R' \to R_1 \times_R R_2$, we obtain a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & a' \arrow[dl, "v_1"'] \arrow[dr, "v_2"] \arrow[d] & \\ & a'' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a_1 \arrow[dr, "u_1"'] & & a_2 \arrow[dl, "u_2"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

Thus 1.2(1) can be replaced by

(1)': every diagram

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[dr] & & a_2 \arrow[dl] \\ & a & \end{tikzcd} \quad \text{in } \underline{A} \text{ above } \quad \begin{tikzcd} R_1 \arrow[dr] & & R_2 \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd} \quad \text{in } \underline{C}_\Lambda \text{, where}$$

$R_2 \to R$ is surjective can be completed to a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & a' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a_1 \arrow[dr] & & a_2 \arrow[dl] \\ & a & \end{tikzcd} \quad \text{above} \quad \begin{tikzcd} & R_1 \times_R R_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ R_1 \arrow[dr] & & R_2 \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$$

where π_i $(i = 1,2)$ are projections.

Remark 1.3.(c) If $\underline{A}$ is a semi-homogeneous cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$, then $[\underline{A}(k[\varepsilon])]$ is canonically provided with a vector space structure over k, where $k[\varepsilon]$ is the ring of dual numbers over k. Indeed, let $\underline{\underline{V}}$ be the category of finite-dimensional vector spaces over k . Then any functor $H : \underline{\underline{V}} \to (\mathrm{Ens})$ preserving the product is canonically factored through

$$\begin{tikzcd} \underline{\underline{V}} \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, "\bar{H}"'] & & (\mathrm{Ens}) \\ & \underline{\underline{V}} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

where $\underline{\underline{V}} \to (\mathrm{Ens})$ is the forgetful functor. On the other hand, the functor $G : \underline{\underline{V}} \longrightarrow \underline{C}_\wedge$ given by $W \longmapsto k[W] = k \oplus W$, with $W^2 = 0$, transforms products in $\underline{\underline{V}}$ into fibre products over k in $\underline{C}_\wedge$. If $\underline{A}$ is a semi-homogeneous cofibered groupoid over $\underline{C}_\wedge$, then $[\underline{A}(k[V] \times_k k[W])] \longrightarrow [\underline{A}(k[V])] \times [\underline{A}(k[W])]$ is bijective by 1.3(a), and the functor $V \longmapsto [\underline{A}(k[V])]$ commutes with products, hence the result.

Definition 1.4. (1) Let $R \in \mathrm{ob}(\underline{C}_\wedge)$. A small extension of R in $\underline{C}_\wedge$ is a surjective map $R' \xrightarrow{f} R$ in $\underline{C}_\wedge$ such that $(\mathrm{Ker}\ f)^2 = 0$ and $\mathrm{Ker}\ f \simeq k$. In other words, $R' \xrightarrow{f} R$ in $\underline{C}_\wedge$ is a small extension of R if

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{t} R' \xrightarrow{f} R \longrightarrow 0$$

is exact for some $t \in R'$ with $t^2 = 0$.

(2) Let $\underline{A}$ be a cofibered groupoid over $\underline{C}_\wedge$, and let a be an object in $\underline{A}$. A small prolongation of a is an arrow $a' \xrightarrow{\alpha} a$ in $\underline{A}$ such that $P(\alpha)$ is a small extension in $\underline{C}_\wedge$. An arrow $a' \xrightarrow{\alpha} a$ in $\underline{A}$ will be called "versal for small prolongations of a " if, for every small prolongation $a_1' \longrightarrow a$ in $\underline{A}$, there exists a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha"'] & & a_1' \arrow[dl] \\ & a & \end{tikzcd}$$

Proposition 1.5. Let $\underline{A}$ be a semi-homogeneous cofibered groupoid over $\underline{C}_\wedge$.
(1) Let $R \times_k k[\varepsilon] \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} \begin{matrix} R \\ k[\varepsilon] \end{matrix}$ be projection maps in $\underline{C}_\wedge$, and let $a' \xrightarrow{\alpha} a$

be a π_1-map. Then there exists a map $a \xrightarrow{\beta} a'$ such that $\alpha\,\beta = 1_a$ if and only if there exists a map $a \longrightarrow (\pi_2)_* a'$.

(2) Let $R' \xrightarrow{f} R$ be a small extension in $\underline{C}_\Lambda$, and consider a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & a'' \arrow[dl, "\alpha'"'] \arrow[dr, "\alpha'_1"] & \\ a' \arrow[dr, "\alpha"'] & & a' \arrow[dl, "\alpha_1"] \\ & a & \end{tikzcd} \quad \text{above} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & R' \times_R R' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ R' \arrow[dr] & & R' \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Define the canonical map $\tilde{f} : R' \times_R R' \longrightarrow k[\operatorname{Ker} f]$ by $\tilde{f}(r'_1, r'_2) = r'_1(0)+(r'_1-r'_2)$.

If there exists a map $a' \longrightarrow (\tilde{f})_*(a'')$, then there exists a map $\gamma : a' \longrightarrow a$ such that $\alpha = \alpha_1 \cdot \gamma$.

Proof (1) The part "only if" is clear. Now assume that there exists a map $\varphi : a \longrightarrow (\pi_2)_* a'$. If we set $h : R \longrightarrow R \times_k k[\epsilon]$ by $h = 1 \times P(\varphi)$, then the composite map $R \xrightarrow{h} R \times_h k[\epsilon] \xrightarrow{\pi_1} R$ is the identity, and therefore we get maps $a \underset{\alpha_1}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} f_* a$ such that $\alpha_1 \cdot \gamma = 1_a$ where $P(\gamma) = h$ and $P(\alpha_1) = \pi_1$. On the other hand, $\pi_2 \cdot h = P(\varphi)$ and hence there exists a π_2-map $h_* a \longrightarrow (\pi_2)_* a'$. This means that $(\pi_2)_*(h_* a) = (\pi_2)_* a'$, and therefore by 1.2(2) we have a $\underline{C}_\Lambda$-map $u : h_* a \longrightarrow a'$ such that $\alpha \cdot u = \alpha_1$. Define $\beta : a \longrightarrow a'$ by $\beta = u \cdot \gamma$. Then $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot u \cdot \gamma = \alpha_1 \cdot \gamma = 1_a$.

(2) The map $1 \times \tilde{f} : R' \times_R h' \longrightarrow R' \times_k k[\operatorname{Ker} f]$ is an isomorphism compatible with the projections on the first factor, and $\pi_2 \cdot (1 \times \tilde{f}) = \tilde{f}$ where $\pi_2 : R' \times_k k[\operatorname{Ker} f] \longrightarrow k[\operatorname{Ker} f]$ is the projection map. We note that $k[\operatorname{Ker} f] \simeq k[\epsilon]$ since $R' \xrightarrow{f} R$ is a small extension. Therefore, if there exists a map $a' \longrightarrow (\tilde{f})_* a'' = (\pi_2)_* [(1\ \tilde{f})_* a'']$, then by (1) above there exists a map $\gamma' : a' \longrightarrow a''$ such that $\alpha' \cdot \gamma' = 1_{a'}$. Define $\gamma : a' \longrightarrow a$ by $\gamma = \alpha'_1 \cdot \gamma'$. We then have $\alpha_1 \cdot \gamma = \alpha$.

Corollary 1.6. *Let $\underline{A}$ be a semi-homogeneous cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$ and consider a diagram*

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[dr, "\alpha"'] & & a_1 \arrow[dl, "\alpha_1"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

in $\underline{A}$ where α_1 is a small prolongation. Assume that a is versal for small prolongations of e. Then there exists a map $a' \xrightarrow{\rho} a_1$ such that $\alpha = \alpha_1 \rho$ in $\underline{A}$ if and only if there exists a map $f : P(a') \to P(a_1)$ such that $P(\alpha) = P(\alpha_1)\cdot f$ in $\underline{C}_\Lambda$.

Proof: Assume that $P(\alpha) = P(\alpha_1)\cdot f$ where $f : P(a') \to P(a_1)$. Replacing a' by its direct image under f, we may and shall assume that $P(\alpha) = P(\alpha_1)$. Set $R' = P(a_1)$, $R = P(a)$. Since $\underline{A}$ is semi-homogeneous, we get a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & a'' \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\beta_1"] & \\ a' \arrow[dr, "\alpha"'] & & a_1 \arrow[dl, "\alpha_1"] \\ & a & \end{tikzcd} \quad \text{above} \quad \begin{tikzcd} & R'\times_R R' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ R' \arrow[dr] & & R' \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Since a is versal for small prolongations of e, so is a' and therefore our statement follows from 1.5(2).

Definition 1.7. *For each object R in $\underline{C}_\Lambda$ we put $\overline{\Omega}_R = M/(m_\Lambda R+M^2)$ where $\underline{m}_\Lambda$, M are the maximal ideals of Λ, R respectively. It is a finite-dimensional vector space over k, and $R \longmapsto \overline{\Omega}_R$ defines a functor $\overline{\Omega} : \underline{C}_\Lambda \to \underline{\underline{V}}$ where $\underline{\underline{V}}$ is the category of finite-dimensional vector spaces over k. If $\underline{A}$ is a cofibered category over $\underline{C}_\Lambda$, then the composite functor $\underline{A} \xrightarrow{P} \underline{C}_\Lambda \to \underline{\underline{V}}$ is, by abuse of notation denoted by $\overline{\Omega}$ again.*

Proposition 1.8. *Let $\underline{A}$ be a semi-homogeneous cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$. Then, given an object a in $\underline{A}$ versal for small prolongations of e, there exists $a' \to a$ such that*

(i) a' <u>is versal for small prolongations of</u> a

(ii) $p(a') \longrightarrow p(a)$ <u>is surjective; and the kernel is annihilated by the maximal ideal of</u> $p(a)$.

(iii) $\overline{\Omega}_{a'} \longrightarrow \overline{\Omega}_a$ <u>is an isomorphism</u>.

<u>Proof</u>: Set $R = P(a)$ and consider an exact sequence $0 \to J \to S \to R \to 0$ where S is a formal power-series ring over $\wedge$ in a finite number of variables, and $J \subset M^2$ where M is the maximal ideal of S . Let Σ be the set of ideals J_1 in S such that (i) $J \supset J_1 \supset MJ$ and (ii) there exists π_1-morphism $a_1 \to a$ in $\underline{A}$ where $\pi_1 : S/J_1 \to R$ is the canonical map. The property 1.2(1) of $\underline{A}$ together with the fact that J/MJ is a finite dimensional vector space over k entails that there exists a smallest ideal in the family Σ. Let it be J' and choose a π'-morphism $a' \overset{g}{\to} a$ where $\pi' : S/J' \to R$ is the canonical map. Note that $\overline{\Omega}_{a'} \to \overline{\Omega}_a$ is an isomorphism since $J' \subset J \subset M^2$. We claim that $a' \overset{g}{\to} a$ is versal for small prolongations of a . Indeed, let $a_1 \to a$ be a small prolongation. If we put $R_1 = P(a_1)$, we obtain an exact commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & J/MJ & \to & S/MJ & \to & R & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \| & & \\ 0 & \to & k & \to & R_1 & \to & R & \to & 0 \end{array}$$

If $h = 0$, then $\pi_1 : R_1 \to R$ admits a cross-section so that h_1 induces $f : S/J' \to R_1$. If $h \neq 0$, then $h_1 : S/MJ \to R_1$ is surjective and hence h_1 induces $f : S/J' \to R_1$ by the definiton of the ideal J' . Therefore in either cases we obtain a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} S/J' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & R_1 \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Since a is versal for small prolongations of e , it follows from 1.6 that we obtain a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr] & & a_1 \arrow[dl] \\ & a & \end{tikzcd}$$

Let $P : \underline{A} \to \underline{C}_\Lambda$ be a cofibered category (in groupoids). It is then clear that we obtain a cofibered category $\mathrm{pro}(P) : \mathrm{pro}(\underline{A}) \to \mathrm{pro}(\underline{C}_\Lambda)$ (in groupoids) **(pour la définition de la catégorie de pro-objets $\mathrm{pro}(\underline{A})$, voir A. Grothendieck, Sém. Bourbaki 195).**

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r] \arrow[d, "P"'] & \mathrm{pro}(\underline{A}) \arrow[d, "\mathrm{pro}(P)"] \\ \underline{C}_\Lambda \arrow[r] & \mathrm{pro}(\underline{C}_\Lambda) \end{tikzcd}$$

Now let $\hat{\underline{C}}_\Lambda$ be the full subcategory of $\text{pro-}\underline{C}_\Lambda$ in which $\mathrm{ob}(\hat{\underline{C}}_\Lambda) = \{(R_i)_{i\in\underline{N}}\ ,\ R_i \in \mathrm{ob}(\underline{C}_\Lambda) \mid \varphi_i : R_i \to R_{i-1}$ is surjective for all i and induces isomorphisms $\underline{m}_i/\underline{m}_\Lambda+\underline{m}_i^2 \to \underline{m}_{i-1}/\underline{m}_\Lambda+\underline{m}_{i-1}^2$ for all sufficiently large $i\ \}$ where $\underline{N}$ stands for the ordered category of natural numbers, and $\underline{m}_i$ is the maximal ideal of R_i . We set $\hat{\underline{A}}$ to be the full subcategory of $\text{pro-}\underline{A}$ in which

$$\mathrm{ob}(\hat{\underline{A}}) = \{a \in \mathrm{ob}(\mathrm{pro}(\underline{A})) \mid \mathrm{pro}(P)\ (a) \in \mathrm{ob}(\hat{\underline{C}}_\Lambda)\}$$

We then obtain a cofibered category $\hat{P} : \hat{\underline{A}} \to \hat{\underline{C}}_\Lambda$ (in groupoids) with a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r, hook] \arrow[d, "P"'] & \hat{\underline{A}} \arrow[d, "\hat{P}"] \\ \underline{C}_\Lambda \arrow[r, hook] & \hat{\underline{C}}_\Lambda \end{tikzcd}$$

We note that the category $\hat{\underline{C}}_\Lambda$ is canonically equivalent to the category of complete local Λ-algebras of formally finite type over Λ with the fixed residue field k . Henceforth we shall make such identification.

<u>Definition</u> 1.9. <u>Let $\underline{A}$ be a cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$</u> . <u>An object ξ in $\hat{\underline{A}}$ is called a quasi-initial object of $\hat{\underline{A}}$ if for every object a in $\hat{\underline{A}}$ there exists a map $\xi \to a$ in $\hat{\underline{A}}$</u> . <u>A quasi-initial object ξ of $\hat{\underline{A}}$ is called minimal</u>

if the morphism $\xi : h_R \to [\hat{A}]$ induces a bijection $\xi(k[\varepsilon]) : \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R, k[\varepsilon]) \to [\underline{A}(k[\varepsilon])]$, where $R = P(\xi)$. An object ξ in $\hat{A}$ is called a versal formal object of $\underline{A}$ if every surjective map $\alpha : a' \to a$ in $\underline{A}$ induces a surjective map $\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\xi, a') \to \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\xi, a)$.

A versal formal object ξ of $\underline{A}$ is called minimal if the morphism $\xi : h_R \to [\hat{A}]$ induces a bijection $\xi(k[\varepsilon]) : \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R, k[\varepsilon]) \to [\underline{A}(k[\varepsilon])]$ where $R = P(\xi)$.

Proposition 1.10. Let $\underline{A}$ be a cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$.

(i) every (minimally) versal formal object of $\underline{A}$ is a quasi-initial (minimal) object of $\hat{A}$.

(ii) If ξ is an object in $\hat{A}$ such that $\tilde{\xi}(k[\varepsilon]) : \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R, k[\varepsilon]) \to [\underline{A}(k[\varepsilon])]$ is injective, where $P(\xi) = R$, then every endomorphism of ξ in $\hat{A}$ is an automorphism. In particular a quasi-initial minimal object of $\hat{A}$, if it exists, is unique up to (non-canonical) isomorphism.

Proof: (i) let ξ be a versal formal object of $\underline{A}$. We must show that, for any object a in $\hat{A}$, we have a map $\xi \to a$. By the definition of $\hat{A}$, there exists a sequence of surjective maps in $\underline{A}$: $\cdots \to a_n \xrightarrow{\alpha_n} a_{n-1} \to \cdots \to a_1 \xrightarrow{\alpha_1} a_0$ such that $a = \varprojlim_n a_n$. Assume that there exists maps $\varphi_i : \xi \to a_i$ such that $\alpha_i \varphi_i = \varphi_{i-1}$ for all $i < n$. Since ξ is a versal formal object of $\underline{A}$ and $\alpha_n : a_n \to a_{n-1}$ is surjective in $\underline{A}$, we obtain a map $\xi \xrightarrow{\varphi_n} a_n$ such that $\alpha_n \varphi_n = \varphi_{n-1}$. If we set $\varphi = \varprojlim_n \varphi_n$, we have $\varphi : \xi \to a$.

(ii) Let $\xi \xrightarrow{\alpha} \xi$ be a map in $\hat{A}$. Then for every $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R, k[\varepsilon])$ we have $\lambda_* \xi = \lambda_* \alpha \xi \simeq (\lambda \cdot P(\alpha))_* \xi$ and hence by the hypothesis on ξ we have that $\lambda = \lambda \cdot P(\alpha)$ for all $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R, k[\varepsilon])$, and therefore $P(\alpha) : R \to R$ is surjective. However it is trivial to see that every surjective endomorphism of a noetherian ring is always an automorphism and hence $P(\alpha)$ is an automorphism of R and therefore α is an automorphism of ξ.

Theorem 1.11. (Schlessinger) Let $\underline{A}$ be a cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$. Then $\underline{A}$

admits a minimally-versal formal object if and only if

(i) $\underline{A}$ *is semi-homogeneous*

(ii) $[\underline{A}(k[\varepsilon])]$ *is a finite-dimensional vector space over* k (cf. 1.3(c)).

Proof: (*Necessity*) Let ξ in $\hat{\underline{A}}$ be a minimally-versal formal object of $\underline{A}$, and consider a diagram

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[dr] & & a_2 \arrow[dl, "\alpha"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

in $\underline{A}$ where α is surjective. Since ξ is a quasi-initial object of $\hat{\underline{A}}$, there exists a map $\xi \to a_1$. Since α is surjective, the composit map $\xi \to a_1 \to a$ can be lifted to a_2 i.e., we obtain a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & \xi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a_1 \arrow[dr] & & a_2 \arrow[dl, "\alpha"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

which proves the condition 1.2(1). We now prove the condition 1.2(2). Let

$$\begin{tikzcd} S \times k[\varepsilon] \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & S, \ k[\varepsilon] \end{tikzcd}$$

be the projections,

and let

$$\begin{tikzcd} a' \arrow[dr, "\alpha"'] & & b' \arrow[dl, "\beta"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

be π_1-maps in $\underline{A}$. By the definition of ξ, we obtain a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & \xi \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ a' \arrow[dr, "\alpha"'] & & b' \arrow[dl, "\beta"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

and in particular we have $\pi_1 \cdot P(u) = \pi_1 \cdot P(v)$. Assume now that $(\pi_2)_* a' \approx (\pi_2)_* b'$. We then have $\pi_2 \cdot P(u) = \pi_2 \cdot P(v)$ because of the minimality of

ξ , and hence $P(u) = \pi_1 P(u) \times \pi_2 P(u) = \pi_1 P(v) \times \pi_2 P(v) = P(v)$.
Since $\underline{A}$ is a cofibered groupoid, we obtain a unique isomorphism $a' \overset{\sigma}{\to} b'$ in $\underline{A}(S \times k[\varepsilon])$ such that $\sigma u = v$. Then $\beta\sigma u = \alpha u$ entails that $\beta\sigma = \alpha$ since $\underline{A}$ is a cofibered category.

(Sufficiency) Let $c_1, c_2, \ldots, c_n$ be objects in $\underline{A}(k[\varepsilon])$ which form a k-basis of the vector space $[\underline{A}(k[\varepsilon])]$, and choose a_1 in $\underline{A}(k[\varepsilon] \underset{k}{\times} \ldots \underset{k}{\times} k[\varepsilon])$ such that $(\pi_j)_* a_1 \approx c_j$. Then $\tilde{a}(k[\varepsilon]) : \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R_1, k[\varepsilon]) \to [\underline{A}(k[\varepsilon])]$ is bijective, where $R_1 = P(a_1)$. In particular $a_1 \to e$ is versal for small prolongations of e . Choose $a_2 \to a_1$ which is versal for small prolongations of a_1 such that $\overline{\Omega}_{a_2} \to \overline{\Omega}_{a_1}$ is bijective. We then choose $a_3 \to a_2$, versal for small prolongations of a_2 such that $\overline{\Omega}_{a_3} \to \overline{\Omega}_{a_2}$, is bijective etc., and set $\xi = \varprojlim_n a_n$. We claim that ξ is a minimally-versal formal object of $\underline{A}$. Indeed, since $\overline{\Omega}_{a_n} \to \overline{\Omega}_{a_{n-1}}$ is bijective for all n , $\overline{\Omega}_{\xi} \to \overline{\Omega}_{a_1}$ is bijective so that $\xi(k[\varepsilon]) : \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R, k[\varepsilon] \to [\underline{A}(k[\varepsilon])]$ is bijective. Now consider a diagram

$$\begin{tikzcd} & a' \arrow[d, "\alpha"] \\ \xi \arrow[r, "h"] & a \end{tikzcd}$$

where α is surjective in $\underline{A}$. We must show that h can be lifted to a' . For this, one may assume, by induction, that a' is a small prolongation of a . Since $P(a)$ is an artinian ring, $h : \xi \to a$ is factored as a composit map $\xi \to a_q \longrightarrow a$ for some q . Since $\underline{A}$ is semi-homogeneous, we get a diagram

$$\begin{tikzcd} & a'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & a' \arrow[d, "\alpha"] \\ \xi \arrow[r] & a_q \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

where α' is also a small prolongation. We then obtain a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & & a'' \arrow[d, "\alpha'"] \\ \xi \arrow[r] & a_{q+1} \arrow[r] \arrow[ur] & a_q \end{tikzcd}$$

and therefore we are done.

Remark 1.12. Let

$$\cdots \longrightarrow a_n \longrightarrow a_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_2 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_o = e$$

be an infinite sequences of arrows in $\underline{A}$ such that

$$\begin{cases} a_i \text{ is versal for small prolongations of } a_{i-1} \\ P(a_i) \longrightarrow P(a_{i-1}) \text{ is surjective} \\ \overline{\Omega}_{a_i} \dashrightarrow \overline{\Omega}_{a_{i-1}} \text{ is bijective for } i \gg 0 \end{cases}$$

Then the above proof shows that $\varprojlim a_i$ is a versal formal object of $\underline{A}$.

<u>Remark</u> 1.13. Let $\underline{A}$ be a cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$. If $\underline{A}$ has the property 1.11(i) and (ii), then so does $[\underline{A}]$, and $\xi \in \mathrm{ob}(\hat{\underline{A}})$ is a minimally-versal formal object of $\underline{A}$ if and only if it is so for $[\underline{A}]$ by 1.10(ii).

<u>Remark</u> 1.14. Let $\underline{A}$ be a cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$, admitting a minimally-versal formal object ξ . Then an invariant of $R = P(\xi)$, which is a complete local Λ-algebra of formally finite type over Λ , is automatically an invariant of $\underline{A}$ over $\underline{C}_\Lambda$. Therefore, for example, we shall say that $\underline{A}$ is (formally) smooth over $\underline{C}_\Lambda$ if R is (formally) smooth over Λ i.e., a formal power-series algebra over Λ , or we say that $\underline{A}$ is irreducible over $\underline{C}_\Lambda$ if $\mathrm{Spec}(R)$ is irreducible etc. In the next section we introduce the notion of "smoothness" of a functor $\underline{A} \to \underline{B}$ over $\underline{C}_\Lambda$, where $\underline{A}$, $\underline{B}$ are cofibered categories in groupoids over $\underline{C}_\Lambda$. It turns out (cf. 2.4) that "$\underline{A}$ is (formally) smooth over $\underline{C}_\Lambda$" is equivalent to " $P : \underline{A} \to \underline{C}_\Lambda$ is a smooth functor" , and therefore no confusion arises. We also define the dimension of $\underline{A}$ over $\underline{C}_\Lambda$ by $\dim_{\underline{C}_\Lambda} \underline{A} = \dim k \otimes_\Lambda R$. For this we note the following fact: Let $\underline{C}_k$ be the category of artinian local k-algebras with the same residue field k . Then $\underline{C}_k \to \underline{C}_\Lambda$ is a fully-faithful imbedding, whose (left) adjoint functor $\underline{C}_\Lambda \to \underline{C}_k$ is given by $R \to k \otimes_\Lambda R$. Let $\underline{A}|\underline{C}_k$ be the pull-back of $P : \underline{A} \to \underline{C}_\Lambda$ under $\underline{C}_k \to \underline{C}_\Lambda$. Then it is trivial to see that if ξ is a minimally-versal formal object for $\underline{A}$ over $\underline{C}_\Lambda$, then $k \otimes_\Lambda \xi$ is a minimally-versal formal object for $\underline{A}|\underline{C}_k$ over $\underline{C}_k$, where $\xi \to k \otimes_\Lambda \xi$ is a cocartesian arrow above $R \to k \otimes_\Lambda R$. It follows that $\dim_{\underline{C}_\Lambda} \underline{A} = \dim_{\underline{C}_k} (\underline{A}|\underline{C}_k)$.

1.15. In the remaining of this paragraph, we biefly explain how to modify the preceeding theory in order to allow for residue field extensions.

Let Λ and K be complete noetherian local rings, with K a Λ-algebra. We assume that

(a) the natural map from Λ to K is a local homomorphism;

(b) the residue field K' of K is an extension of finite type of the residue field k of Λ .

The most interesting case is when $K = K'$ and K is a finite inseparable extension of k .

We denote by $C^{\wedge}_{\Lambda,K}$ the category whose objects are the complete noetherian local rings R , provided with a structure of Λ-algebra and with a Λ-epimorphism $s : R \longrightarrow K$.

We denote by $C_{\Lambda,K}$ the subcategory of $C^{\wedge}_{\Lambda,K}$ consisting of the (R, s) such that $\mathrm{Ker}(s)$ is a R-module of finite length. The category $C^{\wedge}_{\Lambda,K}$ can be identified with a full subcategory of $\mathrm{Pro}(C_{\Lambda,K})$.

If K is artinian, so is any object in $C_{\Lambda,K}$.

For any finite dimensional vector space V over K' we denote by $D_V(K)$ the algebra of dual numbers over K defined by V ; its elements are of the form $k + v\,\varepsilon$ (with $k \in K$, $v \in V$ and $\varepsilon^2 = 0$: $(k + v\,\varepsilon)(k' + v'\,\varepsilon) = (k\,k') + (k\,v' + k'\,v)\varepsilon$). The map $s : D_V(K) \to K$: $s(k + v\,\varepsilon) = k$, turns $D_V(K)$ into an object of $C_{\Lambda,K}$. The role played before by $k[\varepsilon]$ will be played here by $D_{K'}(K)$.

As explained in 1.8, any cofibered groupoid $\underline{A}$ over $C_{\Lambda,K}$ extends in a natural way to a cofibered category $\underline{A}^{\wedge}$ over $C^{\wedge}_{\Lambda,K}$. A map in $\underline{A}$ or $\underline{A}^{\wedge}$ will be called <u>surjective</u> if the corresponding homomorphism of algebras in $C_{\Lambda,K}$ or in $C^{\wedge}_{\Lambda,K}$ is.

We assume that $\underline{A}(K) = \{e\}$.

Definition 1.16. *A cofibered groupoïd* $\underline{A}$ *over* $C_{\wedge,K}$ *is called semi-homogeneous if the following properties hold:*

(I) *every diagram*

$$\begin{tikzcd} a'' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & a' \arrow[d] \\ a_1 \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

of solid arrows in $\underline{A}$, *where* $a' \longrightarrow a$ *is surjective, can be completed into a commutative diagram including dotted arrows;*

(II) *For any* R , *the natural map*

$$[\underline{A}(R \times_K D_{K'}(K))] \to [\underline{A}(R) \times \underline{A}\ (D_{K'}(K))] \simeq [\underline{A}(R)] \times [\underline{A}(D_{K'}(K))]$$

is bijective.

If $\underline{A}$ is semi-homogeneous, so is $[\underline{A}]$.

1.17. Let us first consider the restriction of $\underline{A}$ to the full subcategory of $C_{\wedge,K}$ whose objects are the $D_V(K)$. Let Ω be the vector space $\Omega^1{}_{K/\wedge} \otimes_K K'$, and $d : K \to \Omega$ the derivative. A map $f : D_V(K) \to D_W(K)$ can be written:

$$f(k + v\,\varepsilon) = k + (u(v) + D\,d\,k)$$

with $u \in \mathrm{Hom}_{K'}(V, W)$ and $D \in \mathrm{Hom}_{K'}(\Omega, W)$. If we identify f with (u, D) , the composition law is

$$(u, D) \circ (u', D') = (uu', D + u\,D') \quad .$$

The condition (II) entails

(II') the functor from K'-vector spaces to sets

$$V \longmapsto [\underline{A}(D_V(K))]$$

commutes with products.

Lemma 1.18. *Assume condition* (II') *is satisfied by* $\underline{A}$. *Then*

(1) $[\underline{A}(D_{K'}(K))]$ <u>carries a unique vector space structure, such that</u> $[\underline{A}(D_V(K))] \simeq V \otimes_{K'} [\underline{A}(D_{K'}(K))]$ <u>as a functor in</u> V .

(2) <u>There is a linear map</u> $\gamma : \mathrm{Hom}(\Omega, K') \to [\underline{A}(D_{K'}(K))]$ <u>such that, for any</u> $D \in \mathrm{Hom}(\Omega, K')$,

$$[\underline{A}((k, D))] : [\underline{A}(D_{K'}(K))] \to [\underline{A}(D_{K'}(K))] \text{ is } x \longmapsto x + \gamma(D) \ .$$

(3) <u>For any</u> $(u, D) : D_V(K) \longrightarrow D_W(K)$, <u>the map</u>

$$(u, D) : [\underline{A}(D_V(K))] \to [\underline{A}(D_W(K))] \text{ i.e.}$$

$$(u, D) : V \otimes [\underline{A}(D_{K'}(K))] \to W \otimes [\underline{A}(D_{K'}(K))] \ \underline{\text{is}}$$

$$x \longmapsto u(x) + \gamma(D) \ .$$

Let us introduce the notations

$$F(V) = [\underline{A}(D_V(K))]$$

$$A = F(K')$$

$$F(u,D) : F(V) \to F(W) = \text{the map induced by } (u,D) : D_V(K) \to D_W(K)$$

$$F(D) : F(V) \to F(V) \ : \ F(D) = F(1, D) \ .$$

By (II') and the fact that K' is a K'-vector space object in the category of K'-vector spaces, $F(K')$ is a K'-vector space in (Ens), hence a K'-vector space, and (1) is clear. Let us now identify $F(V)$ and $V \otimes A$.

We deduce from the identity

$$(u, D) = (1, D) \circ (u, 0) \text{ that}$$

$$F(u, D) = F(D) \circ (u \otimes 1_A) \ .$$

The functoriality of F amounts to

$$F(0) = \mathrm{Id}$$

$$F(D) \circ F(D') = F(D + D')$$

$$(u \otimes 1) \circ F(D) = F(u\,D) \circ (u \otimes 1_A)$$

For any $D : \Omega \to V$ and any $n \in N$, if i and p are the maps

$$i : V \hookrightarrow V \oplus K'^n \qquad p : V \oplus K'^n \longrightarrow K^n \ ,$$

then $p\ i\ D = 0$ and the following diagramm is commutative

$$\begin{tikzcd} V \otimes A \arrow[r] \arrow[d, "F(D)"] & (V \oplus K'^n) \otimes A \arrow[r] \arrow[d, "F(i,D)"] & K'^n \otimes A \arrow[d, equal] \\ V \otimes A \arrow[r] & (V \oplus K'^n) \otimes A \arrow[r] & K'^n \otimes A \end{tikzcd}$$

Let $x : K^n \to V$ be a map, $x_i = x(e_i)$, and let a_i be a family of elements of A. We have $(1_V + x) \circ i \circ D = D$. Hence, if

$$F(i\ D)\ (\Sigma\ e_i\ a_i) = \Sigma\ e_i\ a_i + a \qquad (a \in V \otimes H) \quad , \text{ then}$$

$$F(D)\ (\Sigma\ x_i\ a_i) = \Sigma\ x_i\ a_i + a$$

and a does not depend on the x_i. Hence,

$$F(D)\ (y) = y + G(D) \qquad , \text{ with}$$

$$G(D + D') = G(D) + G(D')$$

$$u\ G(D) = F(u\ D) \qquad (\text{for any } u : V \to W) \ .$$

One easily checks that any such G is defined, for some $\gamma \in \Omega \otimes A$, by the formula

$$G(D) = D \otimes 1_A\ (\gamma) \quad ,$$

as promised in (2) (3).

<u>Definition</u> 1.19. (1) <u>An object</u> ξ <u>in</u> $\hat{A}$ <u>is called versal formal object if every surjective map</u> $\alpha : a' \longrightarrow a$ <u>in</u> A <u>induces a surjective map</u> $\mathrm{Hom}_{\hat{\underline{A}}}(\xi, a') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{\underline{A}}}(\xi, a)$.

(2) <u>A formal versal object</u> ξ <u>in</u> $\hat{A}$, <u>with image</u> (R, s) <u>in</u> $C_{\hat{\wedge},K}$, <u>is called minimal if for any two maps</u> φ_1, $\varphi_2 : R \rightrightarrows D_{K'}(K)$, <u>if</u> $\varphi_1(\xi)$ <u>is isomorphic to</u> $\varphi_2(\xi)$, <u>then there exists a derivation</u> D <u>of</u> K <u>into</u> K' <u>such that</u> $(1, D)\ (\varphi_1) = \varphi_2$, i.e. $\varphi_2 - \varphi_2 = D\ s$.

<u>Theorem</u> 1.20. <u>If</u> A <u>is semi-homogeneous and if</u>

$$\dim_{K'}\ ([A(D_{K'}(K))]) < \infty \quad ,$$

<u>then</u> A <u>admits a minimally versal formal object, and any two of them are</u>

isomorphic.

With the notations of 1.18, let H^* be a subspace of $[\underline{A}(D_{K'}(K))]$, supplementary to the image of γ, and let H be the dual of H^*. We define $R_o = D_H(K)$. Let ξ_o be an object in $\underline{A}(R_o)$, whose image in $[\underline{A}(R_o)] \simeq H \otimes [\underline{A}(D_{K'}(K))] \simeq \mathrm{Hom}(H^*,[\underline{A}(D_{K'}(K))])$ is the inclusion of H^* in $[\underline{A}(D_{K'}(K))]$. Then

(1) The maps $\mathrm{Hom}_{C_{\wedge,K}}(D_H(K),\, D_V(K)) \longrightarrow [\underline{A}(D_V(K))]$ are surjective.

(2) The minimality condition 1.19(2) is valid for $(R_o,\, \xi_o)$.

Choose now some $S \in \hat{C}_{\wedge,K}$, formally smooth over $\wedge$, and an epimorphism $t : S \longrightarrow R_o$ such that

$$\Omega_{R_o/\wedge} \otimes K' \xrightarrow{\ \sim\ } \Omega_{S/\wedge} \otimes K' .$$

If M is the maximal ideal of S, we inductively define, for $n \geq 1$, $R_n = S/I_n$ and $\xi_n \in \mathrm{Ob}(\underline{A}(R_n))$ by the properties that

(a) I_{n+1} is the intersection of the ideals $I : I_n M \subset I \subset I_n$, such that ξ_n extends to an object ξ in $\underline{A}(S/I)$.

(b) ξ_{n+1} is an extension of ξ_n.

If $R = \varprojlim R_n$ and $\xi = \varprojlim \xi_n$, then one checks that $(R,\, \xi)$ is a minimally-versal formal object, and the only one up to isomorphism.

2. Prorepresentable cofibered groupoids.

Let $\underline{A}$ be a cofibered groupoid over $\underline{C}_\wedge$, admitting a minimally-versal formal object ξ. In general we can not recover $\underline{A}$ (up to $\underline{C}_\wedge$-equivalence) out of ξ alone. One has to know when two maps $R \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} S$ yield a $\underline{C}_\wedge$-isomorphism $\xi(f) \longrightarrow \xi(g)$, where $R = P(\xi)$. As an application of 1.11 and 1.12 we now consider the question of "recovering $\underline{A}$" up to $\underline{C}_\wedge$-equivalence. Indeed, we shall have a quite satisfactory answer applicable to a wide class of cofibered groupoids.

A number of cofibered groupoids which usually occur in practice enjoy a slightly stronger property than those of semi-homogeneous ones, as it will be defined explicitly in 2.5. To investigate them it is convenient to rephrase what we have done so far in terms of "smooth functors" . All the notations and terminologies in the previous section remain in force throughout in this section.

Definition 2.1. Let $\varphi : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ be a functor of cofibered groupoids over $\underline{C}_\Lambda$. We say that φ is smooth if every surjective map $\beta : b' \longrightarrow \varphi(a)$ in $\underline{B}$ can be completed to a commutative diagram

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \varphi(a') \arrow[rr] \arrow[drr, "\varphi(\alpha)"'] & & b' \arrow[d, "\beta"] \\ & & \varphi(a) \end{tikzcd}$$

for some $\alpha : a' \longrightarrow a$ in $\underline{A}$. We say that φ is minimally smooth if it is smooth and $\varphi(k[\varepsilon]) : [\underline{A}(k[\varepsilon])] \longrightarrow [\underline{B}(k[\varepsilon])]$ is bijective.

Remark 2.2(a) Let $\varphi : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ be a functor of cofibered groupoids over $\underline{C}_\Lambda$. We note that " φ is smooth" $\Leftrightarrow$ "every surjective map $\beta : b' \longrightarrow \varphi(a)$ in $\underline{B}$ can be completed into a commutative diagram (*) such that $\varphi(a') \longrightarrow b'$ is a $\underline{C}_\Lambda$-isomorphism" $\Leftrightarrow$ "every small prolongation $\beta : b' \longrightarrow \varphi(a)$ in $\underline{B}$ can be completed into a commutative diagram (*) ".

Remark 2.2(b) For any cofibered groupoid $\underline{A}$ over $\underline{C}_\Lambda$, the natural functor $\underline{A} \longrightarrow [\underline{A}]$ is minimally smooth.

Remark 2.2(c) For each object R in $\hat{\underline{C}}_\Lambda$, we set $h_R : \underline{C}_\Lambda \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ to be the functor defined by $h_R(S) = \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R, S)$ for all S in $\underline{C}_\Lambda$. It associates a cofibered discrete groupoid $\underline{h}_R$ over $\underline{C}_\Lambda$, and a map $R \longrightarrow S$ in $\underline{C}_\Lambda$

induces a functor $\underline{h}_S \longrightarrow \underline{h}_R$ of cofibered groupoids. The functor $\underline{h}_S \longrightarrow \underline{h}_R$ induced by a map $R \longrightarrow S$ in $\underline{C}_\Lambda$ is smooth if and only if S is a formal power-series ring over R .

Remark 2.2(d) Given an object R in $\hat{\underline{C}}_\Lambda$, let us denote by $(R, \underline{C}_\Lambda)$ the category of arrows in $\hat{\underline{C}}_\Lambda$ with the source R and a target in $\underline{C}_\Lambda$. Let $\underline{A}$ be a cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$. Given $\xi \in \operatorname{ob} \hat{\underline{A}}$ with $P(\xi) = R$, let $\underline{A}' \longrightarrow (R, \underline{C}_\Lambda)$ be the pull-back of $\underline{A} \longrightarrow \underline{C}_\Lambda$ under the canonical functor $(R, \underline{C}_\Lambda) \longrightarrow \underline{C}_\Lambda$ and choose a section $\xi^{\#}$ such that $\xi^{\#}(1_R) = \xi$. (This simply means that we choose, for each map $R \xrightarrow{f} S$, a f-map $\xi \longrightarrow \xi(f)$). We then obtain a functor $\xi^{\#} : \underline{h}_R \longrightarrow \underline{A}$ over $\underline{C}_\Lambda$ by sitting $(R \xrightarrow{f} S) \longmapsto \xi(f)$. Of course this functor does not depend on the choice of $\xi^{\#}$ up to natural equivalence of functors. Now " $\xi^{\#} : \underline{h}_R \longrightarrow \underline{A}$ is (minimally) smooth" means that every surjective map $a' \xrightarrow{\alpha} \xi(f)$ in $\underline{A}$ can be completed into a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \xi(f') \arrow[r] \arrow[dr, "\xi(\ )"'] & a' \arrow[d, "\alpha"] \\ & \xi(f) \end{tikzcd}$$

(and $\underline{h}_R(k[\varepsilon]) \longrightarrow \underline{A}(k[\varepsilon])$ is bijective), which means precisely that ξ is a (minimally) versal formal object of $\underline{A}$ over $\underline{C}_\Lambda$. Thus we conclude that the existence of a (minimally) versal formal object of $\underline{A}$ is equivalent to the existence of a (minimally) smooth functor $\underline{h}_R \longrightarrow \underline{A}$ over $\underline{C}_\Lambda$ for some $R \in \operatorname{ob}(\hat{\underline{C}}_\Lambda)$.

The following general properties on smoothness are trivial to verify.

Proposition 2.3. Let $\underline{A} \xrightarrow{\varphi} \underline{B} \xrightarrow{\varphi} \underline{C}$ be functors of cofibered groupoids over $\underline{C}_\Lambda$.

(a) If φ, ψ are both smooth, then so is $\psi.\varphi$.

(b) If $\psi.\varphi$ is smooth and φ is surjective on isomorphism classes of objects,

<u>then</u> ψ <u>is smooth</u>.

<u>Remark</u> 2.4. Let $\underline{A}$ be a cofibered groupoids over $\underline{C}_\Lambda$, admitting a versal formal object ξ. This means, by 2.2(d), that $\tilde{\xi} : \underline{h}_R \to \underline{A}$ is smooth, where $R = P(\xi)$. Therefore we have, " $\underline{A}$ is (formally) smooth over $\underline{C}_\Lambda$ (c.f. 1.13) i.e., R is a formal power-series algebra over Λ " $\Leftrightarrow$ "the composite functor $\underline{h}_R \xrightarrow{\tilde{\xi}} \underline{A} \xrightarrow{P} \underline{C}_\Lambda$ $(= \underline{h}_\Lambda)$ is smooth" $\Leftrightarrow$ " $\underline{A} \xrightarrow{P} \underline{C}_\Lambda$ is a smooth functor" by 2.3(b).

We now consider a stronger property than being semi-homogeneous.

<u>Definition</u> 2.5. <u>Let</u> $\underline{A}$ <u>be a cofibered groupoid over</u> $\underline{C}_\Lambda$. <u>It is called homogeneous if every diagram</u>

$$\begin{array}{ccc} & & a' \\ & & \downarrow \\ b' & \longrightarrow & a \end{array}$$

<u>where</u> $a' \to a$ <u>is surjective admits a fibre-product</u> $a' \underset{a}{\times} b'$ <u>in</u> $\underline{A}$ <u>such that</u>

$$P(a' \underset{a}{\times} b') = P(a') \underset{P(a)}{\times} P(b') \quad .$$

<u>Remark</u> 2.6(a) Let $\underline{A}$ be a cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$, and consider a diagram

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} & a' & \\ \swarrow & & \searrow \\ a_1 & & a_2 \\ \searrow & & \swarrow \\ & a & \end{array} \qquad \text{in } \underline{A} \text{ above the diagram} \qquad \begin{array}{ccc} & R_1 \underset{R}{\times} R_2 & \\ {\scriptstyle \pi_1}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \pi_2} \\ R_1 & & R_2 \\ \searrow & & \swarrow \\ & R & \end{array}$$

in $\underline{C}_\Lambda$ where π_i are the projections. If a fibre-product $a_1 \underset{a}{\times} a_2$ exists in $\underline{A}$, we obtain a unique map $\varphi : a' \to a_1 \underset{a}{\times} a_2$ compatible with the projections. If $P(a_1 \underset{a}{\times} a_2) = R_1 \underset{R}{\times} R_2$, then $P(\varphi)$ is the identity map on $R_1 \underset{R}{\times} R_2$ and therefore φ is a $\underline{C}_\Lambda$-isomorphism i.e., $a' = a_1 \underset{a}{\times} a_2$. In other words, if $\underline{A}$ is a homogeneous cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$, every diagram (*) defines a fibre-product $a_1 \underset{a}{\times} a_2$ provided $R_1 \to R$ is surjective in $\underline{C}_\Lambda$. This fact entails immediately that a homogeneous cofibered groupoid is, a fortiori, semi-homogeneous.

Remark 2.6(b) Consider a diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

of categories and functors. The ordinary fibre-product $X \underset{Z}{\times} Y$ is a category in which an object is a pair (x,y) such that $\varphi(x) = \psi(y)$, and a map $(x,y) \to (x', y')$ consists of a pair $\alpha : x \to x'$, $\beta : y \to y'$ such that $\varphi(\alpha) = \psi(\beta)$. The fibre-product $X \overset{2}{\underset{Z}{\times}} Y$ in the sense of 2-categories is a category in which an object is a triple $(x,y;\gamma)$, where $\varphi(x) \xrightarrow{\gamma} \psi(y)$ is an isomorphism, and a map $(x,y;\gamma) \to (x',y';\gamma')$ consists of a pair $x \xrightarrow{\alpha} x'$ $y \xrightarrow{\beta} y'$ with a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \varphi(x) \arrow[r, "\varphi(\alpha)"] \arrow[d, "\gamma"'] & \varphi(x') \arrow[d, "\gamma'"] \\ \psi(y) \arrow[r, "\psi(\beta)"'] & \psi(y') \end{tikzcd}$$

One can rephrase the notions of (semi)homogeneous cofibered groupoid or smooth functor in terms of fibre-product of categories (in the sense of 2-category). Now let $P : \underline{A} \to \underline{C}_\Lambda$ be a cofibered category, and consider an object $R_1 \underset{R}{\times} R_2$ in $\underline{C}_\Lambda$. If we choose a direct image functor $(\pi_i)_*: \underline{A}(R_1 \underset{R}{\times} R_2) \to \underline{A}(R_i)$, where $\pi_i : R_1 \underset{R}{\times} R_2 \to R_i$ is the projection for $i = 1,2$, we obtain a functor $\underline{A}(R_1 \underset{R}{\times} R_2) \to \underline{A}(R_1) \overset{2}{\underset{\underline{A}(R)}{\times}} \underline{A}(R_2)$. It is clear from the definition of cofibered category that this functor, up to canonical natural equivalence, does not depend on the choice of direct image functors. It is now clear from the definition that a cofibered groupoid $\underline{A}$ over $\underline{C}_\Lambda$ is homogeneous over $\underline{C}_\Lambda$ if and only if $\underline{A}(R_1 \underset{R}{\times} R_2) \to \underline{A}(R_1) \overset{2}{\underset{\underline{A}(R)}{\times}} \underline{A}(R_2)$ is an equivalence of categories whenever $R_1 \to R$ is surjective in $\underline{C}_\Lambda$, and $\underline{A}$ is semi-homogeneous if and only if

$$[\underline{A}(R_1 \underset{R}{\times} R_2)] \longrightarrow [\underline{A}(R_1) \overset{2}{\underset{\underline{A}(R)}{\times}} \underline{A}(R_2)]$$

is surjective whenever $R_1 \longrightarrow R$ is surjective in $\underline{C}_\Lambda$, and is bijective whenever $R = k$ and $R_1 = k[\varepsilon]$. Now let $\varphi : \underline{A} \to \underline{B}$ be a functor of cofibered groupoids over $\underline{C}_\Lambda$. For each map $R' \to R$ in $\underline{C}$, φ induces a functor $\underline{A}(R') \to \underline{A}(R) \overset{2}{\underset{\underline{B}(R)}{\times}} \underline{B}(R')$ uniquely determined up to a (canonical) natural equivalence. It is again trivial to see that φ is smooth if and only if the functor $A(R') \to \underline{A}(R) \overset{2}{\underset{\underline{B}(R)}{\times}} \underline{B}(R')$ is surjective on isomorphism classes of objects, whenever $R' \to R$ is surjective.

<u>Remark</u> 2.6(c). If $\underline{A}$ is a homogeneous cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$, the functor $A(k[V \times W]) \to \underline{A}(k[V]) \times \underline{A}(k[W])$ is an equivalence of categories for any finite-dimensional vector spaces V, W over k (We recall our convention $\underline{A}(k) = \{e\}$). In particular, we have

$$\mathrm{Aut}_{\underline{A}(k[V\times W])}(1_{V\times W}) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Aut}_{\underline{A}(k[V])}(1_V) \times \mathrm{Aut}_{\underline{A}(k[W])}(1_W)$$

where 1_V is the direct image of e under the unique map $k \to k[V]$ in $\underline{C}_\Lambda$. It follows that if $\underline{A}$ is homogeneous over $\underline{C}_\Lambda$, $\mathrm{Aut}(1_\varepsilon)$ as well as $[\underline{A}(k[\varepsilon])]$ are canonically provided with vector space structures over k .

<u>Remark</u> 2.6(d). For any object R in $\hat{\underline{C}}_\Lambda$, the cofibered (discrete) groupoid $\underline{h}_R$ over $\underline{C}_\Lambda$ is homogeneous.

If $\underline{A}$ is semi-homogeneous, then so is $[\underline{A}]$. However, the homogeneity of $\underline{A}$ does not imply in general the homogeneity of $[\underline{A}]$. Indeed we have

<u>Proposition</u> 2.7. <u>Let $\underline{A}$ be a homogeneous cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$. The following statements are equivalent.</u>

(i) $[\underline{A}]$ <u>is homogeneous i.e.</u> $[\underline{A}(R' \underset{R}{\times} S)] \longrightarrow [\underline{A}(R')] \underset{[\underline{A}(R)]}{\times} [\underline{A}(S)]$ <u>is bijective for every small extension</u> $R' \to R$.

(ii) <u>For every small prolongation</u> $a' \to a$ <u>in</u> $\underline{A}$, <u>the map</u>

$$\mathrm{Aut}_{\underline{A}(R')}(a') \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\underline{A}(R)}(a)$$

<u>is surjective, where</u> $R' = P(a')$, $R = P(a)$.

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) Let $R' \xrightarrow{f} R$ be a small extension in $\underline{C}_\Lambda$ and let $a' \to a$ be a f-map in $\underline{A}$. Given $\tau \in \mathrm{Aut}_{\underline{A}(R)}(a)$, we consider $a' \times_a a'$ and $a' \times_a a'_\tau$ where $a'_\tau \longrightarrow a$ denotes the composite map $a' \longrightarrow a \xrightarrow{\tau} a$. Since $[A(R' \times_R R')] \longrightarrow [\underline{A}(R')] \times_{[\underline{A}(R)]} [\underline{A}(R')]$ is bijective, we conclude the existence of an isomorphism $a' \times_a a' \xrightarrow{u} a' \times_a a'_\tau$, and u induces, via the projection on the second factor, an isomorphism $a' \xrightarrow{\tau'} a'$ which is a lifting of τ .

(ii) $\Rightarrow$ (i) Let a''_i (i=1,2) be objects in $\underline{A}(R' \times_R S)$ which have the same image under $[\underline{A}(R' \times_R S)] \to [\underline{A}(R')] \times_{[\underline{A}(R)]} [\underline{A}(S)]$. We then obtain a diagram of solid arrows

$$\begin{tikzcd}
 & & a''_2 \arrow[dll] \arrow[drr] & & & & & & \\
 & & a''_1 \arrow[u, dashed] \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & & R' \times_R S \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a'_2 \arrow[ddrr] & a'_1 \arrow[l, "\sim"'] \arrow[dr] & & b_1 \arrow[r, "\tau"] \arrow[dl] & b_2 \arrow[ddll] & \text{above} & R' \arrow[dr] & & S \arrow[dl] \\
 & & a_1 \arrow[d, "\bar{\tau}"] & & & & & R & \\
 & & a_2 & & & & & &
\end{tikzcd}$$

where $\bar{\tau} ; a_1 \to a_2$ is the induced isomorphism from τ so that the square box on the lower right corner is commutative. If the condition (ii) is verified, one can always replace the given isomorphism $a'_1 \tilde{\to} a'_2$ so that the square box on the left corner is also commutative. Since $a''_i = a'_i \times_{a_i} b_i$ for $i = 1, 2$ by 2.6(a), we obtain the isomorphism $a''_1 \tilde{\to} a''_2$. This proves that $[\underline{A}(R' \times_R S)] \longrightarrow [\underline{A}(R')] \times_{[\underline{A}(R)]} [\underline{A}(S)]$ is injective, and hence is bijective since $\underline{A}$ is homogeneous by hypothesis.

Now let $\underline{A}$ be a homogeneous cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$, and let $R' \xrightarrow{f} R$ be a small extension in $\underline{C}_\Lambda$. We have a canonical map

$\tilde{f} : R' \times_R R' \longrightarrow k[\mathrm{Ker}\ f]$ given by $(r_1', r_2') \longrightarrow r_1'(0) + (r_1' - r_2')$, and $1 \times \tilde{f} : R' \times_R R' \longrightarrow R' \times_k k[\mathrm{Ker}\ f]$ is an isomorphism. Given any two f-maps $a_i \to a$ $(i=1,2)$ in $\underline{A}$, $a_1 \times_a a_2$ is an object over $R' \times_R R'$ and in turn we may consider $\tau(a_1, a_2) = (\tilde{f})_*(a_1 \times_a a_2)$ which is an object in $\underline{A}(k[\mathrm{Ker}\ f])$. Since $1 \times \tilde{f} : R' \times_R R' \longrightarrow R' \times_k k[\mathrm{Ker}\ f]$ is an isomorphism, we have the isomorphism

$a_1 \times_a a_2 \simeq a_1 \times \tau(a_1, a_2)$ compatible with the projections on the first factor. The statement 1.5(2) takes a more definite form for a homogeneous groupoid.

Lemma 2.8. Let $\underline{A}$ be a homogeneous cofibered groupoid over $\underline{C}_\wedge$, and $a_i \xrightarrow{\alpha_i} a$ $(i = 1, 2)$ f-maps in $\underline{A}$. Then

(1) There exists $\rho : a_1 \to a_2$ in $\underline{A}$ with $\alpha_2 \cdot \rho = \alpha_1$ if and only if there exists an arrow $a_1 \to \tau(a_1, a_2)$ in $\underline{A}$.

(2) There exists $\rho : a_1 \to a_2$ with $\alpha_2 \cdot \rho = \alpha_1$ such that $P(\rho) = id_{R'}$ if and only if $\tau(a_1, a_2) = 0$ in $[\underline{A}(k[\mathrm{Ker}\ f])]$.

Proof: We prove both at the same time. There exists $\rho : a_1 \to a_2$ in $\underline{A}$ with $\alpha_2 \cdot \rho = \alpha_1$ (such that $P(\rho) = id_{R'}$) $\Leftrightarrow$ there exists $h : a_1 \to a_1 \times_a a_2$ in $\underline{A}$ with $pr_1 \circ h = id_{a_1}$ (such that $P(h) =$ diagonal map) $\Leftrightarrow$ there exists $g : a_1 \to a_1 \times \tau(a_1, a_2)$ in $\underline{A}$ with $pr_1 \circ g = id_{a_1}$ (such that $P(g) : R' \to R' \times_k k[\mathrm{Ker}\ f]$ is given by $r' \to (r', r'(0))$ $\Leftrightarrow$ there exists an arrow $\gamma : a_1 \to \tau(a_1, a_2)$ in $\underline{A}$ (such that $P(\gamma) : R' \to k[\mathrm{Ker}\ f]$ is given by $r' \to r'(0)$)). However, there exists an arrow $\gamma : a_1 \to \tau(a_1, a_2)$ in $\underline{A}$ such that $P(\gamma) : R' \to k[\mathrm{Ker}\ f]$ is factored through $R' \to k \to k[\mathrm{Ker}\ f]$ if and only if $\tau(a_1, a_2) = 0$.

Proposition 2.9. (a) Let $\underline{A} \xrightarrow{\varphi} \underline{B} \xrightarrow{\psi} \underline{C}$ be functors of cofibered groupoids over $\underline{C}_\wedge$. Assume that

(i) $\underline{B}$ is semi-homogeneous and $\underline{C}$ is homogeneous

(ii) $\psi(k[\epsilon]) : [\underline{B}(k[\epsilon])] \longrightarrow [\underline{C}(k[\epsilon])]$ is injective.

Then the composite functor $\psi \circ \varphi$ is smooth if and only if φ and ψ are both *smooth*.

(b) *Let* $\varphi : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ *be a smooth functor of cofibered groupoids over* $\underline{C}_\Lambda$. *If* $\underline{A}$ *is semi-homogeneous and* $\underline{B}$ *is homogeneous, then* $\hat{\varphi} : \hat{\underline{A}} \to \hat{\underline{B}}$ *is smooth* (i.e., *for any surjective map* $b' \xrightarrow{\beta} \hat{\varphi}(a)$ *in* $\hat{\underline{B}}$, *there exists* $\alpha : a' \to a$ *in* $\hat{\underline{A}}$ *and a* $\hat{\underline{C}}_\Lambda$*-isomorphism* $\rho : \hat{\varphi}(a') \xrightarrow{\sim} b'$ *such that* $\beta \cdot \rho = \varphi(\alpha)$).

Proof: (a) Assume that the composite functor $\psi \circ \varphi$ is smooth. If φ is smooth, then so is ψ by 2.3(b), and therefore it suffices to show that φ is smooth. Let a small prolongation $b' \xrightarrow{\beta} \varphi(a)$ in $\underline{B}$ be given. Since the composite functor $\varphi \circ \psi$ is smooth, there exists an arrow $a' \xrightarrow{\alpha} a$ in $\underline{A}$ and a $\underline{C}_\Lambda$-isomorphism $\rho : \psi(b') \longrightarrow \psi\ \varphi(a')$ with a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\psi(b') \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\psi(\beta)"'] & & \psi\ \varphi(a') \arrow[dl, "\psi\ \varphi(\alpha)"] \\
& \psi\ \varphi(a) &
\end{tikzcd}$$

Since $\underline{B}$ is semi-homogeneous, we can choose a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
& b'' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
b' \arrow[dr, "\beta"'] & & \varphi(a') \arrow[dl, "\varphi(\alpha)"] \\
& \varphi(a) &
\end{tikzcd}
\quad \text{above} \quad
\begin{tikzcd}
& R' \times_R R' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
R' \arrow[dr] & & R' \arrow[dl] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

where $R = P(a)$, $R' = P(b') = P(a')$. Since $\underline{C}$ is homogeneous, $\psi(b'') = \psi(b') \times_{\psi\ \varphi(a)} \psi\varphi(a')$ by 2.6(a), and it follows from 2.8(2) that $0 = \tau(\psi\ \varphi(a'), \psi(b')) = (\tilde{f})_* \psi(b'')$, and hence $(\tilde{f})_*(b'') = 0$ be the hypothesis (ii). It follows from 1.5(2) that there exists a map $\gamma : b' \longrightarrow \varphi(a')$ such that $\beta = \varphi(\alpha) \cdot \gamma$.

(b) Let a surjective map $\beta : b' \to \varphi(a)$ in $\hat{\underline{B}}$ be given. This means that we are given a sequence of commutative diagrams

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & b_3' \arrow[r, "\beta_2'"] \arrow[d, "\beta_3"] & b_2' \arrow[r, "\beta_1'"] \arrow[d, "\beta_2"] & b_1' \arrow[d, "\beta_1"] \\
\cdots \arrow[r] & \varphi(a_3) \arrow[r, "\varphi(\alpha_2)"'] & \varphi(a_2) \arrow[r, "\varphi(\alpha_1)"'] & \varphi(a_1)
\end{tikzcd}$$

in $\underline{B}$, where α_v , β_v , β_v' are surjective for all v , such that $\beta = \varprojlim_v \beta_v$. To show that $\hat{\varphi}$ is smooth, it suffices to prove that a commutative diagram below of solid arrows in which α_n , β_n , β_{n+1} , β_n' are surjective can be completed into a commutative diagram including dotted arrows.

$$\begin{tikzcd}
\varphi(a'_{n+1}) \arrow[rrr, dashed, "\varphi(\ )"] \arrow[dr, dashed, leftrightarrow] \arrow[ddr, dashed, "\varphi(\ )"'] & & & \varphi(a'_n) \arrow[ddl, "\varphi(\alpha'_n)"] \\
& b'_{n+1} \arrow[r, "\beta'_n"] \arrow[d, "\beta_{n+1}"] & b'_n \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[d, "\beta_n"] & \\
& \varphi(a_{n+1}) \arrow[r, "\varphi(\alpha_n)"'] & \varphi(a_n) &
\end{tikzcd}$$

Now $\underline{A}$ is, by hypotheses, semi-homogeneous and $\alpha_n : a_n' \to a_n$ is surjective, and therefore there exists a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
& a' \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dr, "\gamma'"] & \\
a_{n+1} \arrow[dr, "\alpha_n"'] & & a_n' \arrow[dl, "\alpha_n'"] \\
& a_n &
\end{tikzcd}
\quad \text{in } \underline{A} \text{ over } \quad
\begin{tikzcd}
& R_{n+1} \times_{R_n} R_n' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
R_{n+1} \arrow[dr] & & R_n' \arrow[dl] \\
& R_n &
\end{tikzcd}
\quad \text{in } \underline{C}_\Lambda .$$

The hypothesis that $\underline{B}$ is homogeneous entails that

$$\begin{tikzcd}
& \varphi(a') \arrow[dl, "\varphi(\gamma)"'] \arrow[dr, "\varphi(\gamma')"] & \\
\varphi(a_{n+1}) \arrow[dr, "\varphi(\alpha_n)"'] & & \varphi(a_n') \arrow[dl, "\varphi(\alpha_n')"] \\
& \varphi(a_n) &
\end{tikzcd}$$

is a diagram of a fibre-product in $\underline{B}$, and therefore we obtain a unique map $\delta : b'_{n+1} \to \varphi(a')$ in $\underline{B}$ with an appropriate commutativity. Since β_{n+1} , β'_n are both surjective, so is δ and therefore, since φ is smooth, there exists $a'_{n+1} \xrightarrow{\alpha'} a'$ in $\underline{A}$ and a $\underline{C}_\Lambda$-isomorphism $\varphi(a'_{n+1}) \underset{\sim}{\overset{\rho}{\to}} b'_{n+1}$ such that $\delta \cdot \rho = \varphi(\alpha')$. We then obtain the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\varphi(a'_{n+1}) \arrow[rrr, "\varphi(\gamma' \cdot \alpha')"] \arrow[dr, "\rho"] \arrow[ddr, "\varphi(\gamma \cdot \alpha')"'] & & & \varphi(a'_n) \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[ddl, "\varphi(\alpha'_n)"] \\
& b'_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & b'_n \arrow[d] & \\
& \varphi(a_{n+1}) \arrow[r] & \varphi(a_n) &
\end{tikzcd}$$

<u>Corollary</u> 2.10. (a) *Let $\varphi : \underline{A} \to \underline{B}$ be a smooth functor of cofibered groupoids over $\underline{C}_\Lambda$. Let ξ be a versal formal object of $\underline{A}$, and η a minimally-versal formal object of $\underline{B}$. If $\underline{B}$ is homogeneous, then for any map $\beta : \eta \to \varphi(\xi)$ in $\hat{\underline{B}}$, $P(\xi)$ is a formal power-series ring over $P(\eta)$ through* $P(\beta) : P(\eta) \to P(\varphi(\xi)) = P(\xi)$.

(b) *Let $\underline{A}$ be a homogeneous cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$, and let ξ , η be versal formal objects of $\underline{A}$. If η is minimal, then for any map $\alpha : \eta \to \xi$ in $\hat{\underline{A}}$, $P(\xi)$ is a formal power-series ring over $P(\eta)$ through* $P(\alpha) : P(\eta) \to P(\xi)$.

<u>Proof</u>: (a) A map $\beta : \eta \to \varphi(\xi)$ induces a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\underline{h}_{P(\xi)} \arrow[r, "\widetilde{\beta}"] \arrow[d, "\widetilde{\xi}"'] & \underline{h}_{P(\eta)} \arrow[d, "\widetilde{\eta}"] \\
\underline{A} \arrow[r, "\varphi"'] & \underline{B}
\end{tikzcd}$$

Since $\widetilde{\xi}$, φ are smooth, $\widetilde{\eta} \cdot \widetilde{\beta} = \varphi \cdot \widetilde{\xi}$ is smooth. On the other hand,

$\Pi(k[\epsilon]) : \underline{h}_{P(\eta)}(k[\epsilon]) \to [\underline{B}(k[\epsilon])]$ is an isomorphism and therefore $\tilde{\beta}$ is smooth by 2.9(a), which means that $P(\xi)$ is a formal power-series ring over $P(\eta)$.

(b) follows from (a) by setting $\underline{A} = \underline{B}$.

Finally we consider the question of "representability" of a cofibered groupoid. Let $\underline{C}$ be a fixed category. Each object R in $\underline{C}$ defines a functor $h_R : \underline{C} \to (\mathrm{Ens})$ given by $h_R(S) = \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(R,S)$, and in turn we obtain a functor $h : \underline{C}^{\circ} \to \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{C}, (\mathrm{Ens}))$ which is fully-faithful. A "cocartegory in $\underline{C}$ " is a diagram

$$h_{R_1} \underset{h_{R_0}}{\times} h_{R_1} \longrightarrow h_{R_1} \underset{\underset{s_2}{\Longrightarrow}}{\overset{\overset{s_1}{\Longrightarrow}}{\xleftarrow{\epsilon}}} h_{R_0} \qquad \text{with } s_i \cdot \epsilon = \text{identity for } i = 1,2$$

(where $h_{R_1} \underset{h_{R_0}}{\times} h_{R_1} = (h_{R_1})_{s_1} \underset{h_{R_0}}{\times} {}_{s_2}(h_{R_1}))$ such that

(i) c is associative and is compatible with s_i for $i = 1,2$

(ii) $h_{R_1} \xrightarrow{\sim} h_{R_0} \underset{h_{R_0}}{\times} h_{R_1} \xrightarrow{\epsilon \times 1} h_{R_1} \underset{h_{R_0}}{\times} h_{R_1} \xrightarrow{c} h_{R_1}$

$h_{R_1} \xrightarrow{\sim} h_{R_1} \underset{h_{R_0}}{\times} h_{R_0} \xrightarrow{1 \times \epsilon} h_{R_1} \underset{h_{R_0}}{\times} h_{R_1} \xrightarrow{c} h_{R_1}$

are both identities.

If $(R_0, R_1, s_1, s_2, \epsilon, c)$ is a cocategory in $\underline{C}$, then for an object S in $\underline{C}$, we can define a category $h_{(R_0, R_1, \ldots)}(S)$ by setting $\mathrm{ob}\, h_{(R_0, R_1, \ldots)}(S) = \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(R_0, S)$, and $\mathrm{Fl}\, h_{(R_0, R_1, \ldots)}(S) = \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(R_1, S)$ in which the composition rule of arrows is given by $c : h_{R_1} \underset{h_{R_0}}{\times} h_{R_1} \to h_{R_1}$. Then $h_{(R_0, R_1, \ldots)} : \underline{C} \to (\text{categories})$ is a functor and in turn defines a cofibered category $\underline{h}_{(R_0, R_1, \ldots)}$ over $\underline{C}$. For instance, any object R in $\underline{C}$ defines a discrete cocategory $\underline{h}_R = \underline{h}_{(R, R, s_1, s_2, \epsilon, c)}$ by setting s_1, s_2, ϵ, c to be all equal to the identity map. A homomorphism $(R_0, R_1, \ldots) \to (R_0', R_1', \ldots)$

of cocategories in $\underline{C}$ is a pair of maps $h_{R_0} \to h_{R'_0}$, $h_{R_1} \to h_{R'_1}$ in $\underline{C}$ such that the induced map

$$h_{(R_0,\ R_1,\ldots)}(S) \to h_{(R_0',\ R_1',\ldots)}(S)$$

is a functor for every object S in $\underline{C}$. For instance, each cocategory $(R_0,\ R_1,\ldots)$ is provided with a homomorphism $\epsilon : \underline{h}_{R_0} \to \underline{h}_{(R_0,\ R_1,\ldots)}$ of co-categories. A cogroupoid in $\underline{C}$ is by definition a cocategory $(R_0,\ R_1,\ldots)$ in $\underline{C}$ such that $h_{(R_0,\ R_1,\ldots)}(S)$ is a groupoid for every object S in $\underline{C}$. In other words, a cogroupoid in $\underline{C}$ is a cocategory $(R_0,\ R_1,\ldots)$ in $\underline{C}$ such that $\underline{h}_{(R_0,\ R_1,\ldots)}$ is a cofibered category in groupoids over $\underline{C}$.

In practice, a cocategory or cogroupoid occur in a following fashion: Let $P : \underline{F} \to \underline{C}$ be a cofibered category, and let ξ be a fixed object in $\underline{F}$. Set $R_0 = P(\xi)$ and let $(R_0,\ \underline{C})$ be the category of arrows in $\underline{C}$ with the source R_0 . Let $P : \underline{F}' \to (R_0,\ \underline{C})$ be the pull-back of $\underline{F}$ under the canonical functor $(R_0,\ \underline{C}) \to \underline{C}$, and choose a cocartesian section $\xi^{\#}$ of $\underline{F}'$ over $(R_0,\ \underline{C})$ such that $\xi^{\#}(id_{R_0}) = \xi$. (This simply means that we choose, for each arrow $R_0 \xrightarrow{f} S$ in $\underline{C}$, a cocartesian f-map $\xi \to \xi^{\#}(f)$). Define the functor $Hom_{\xi^{\#}} : (R_0 \amalg R_0,\ \underline{C}) \to (Ens)$ given by

$$X = (f_1,\ f_2) \longmapsto Hom_{\underline{F}(S)}(\xi^{\#}(f_1),\ \xi^{\#}(f_2)) \quad \text{where}$$

S = the target of f_1 (= the target of f_2). We note that this functor does not depend on the choice of $\xi^{\#}$ up to (canonical) natural equivalence. Henceforth, by abuse of notation, we shall simply write ξ for $\xi^{\#}$. If this functor is representable by an object $X_0 = (R_0 \overset{s_1}{\underset{s_2}{\rightrightarrows}} R_1)$ in $(R_0 \quad R_0,\ \underline{C})$ i.e. if there exists R_0-map $\varphi : \xi(s_1) \to \xi(s_2)$ in $\underline{F}$ such that the induced map $\tilde{\varphi} : Hom_{(R_0 \amalg R_0,\ \underline{C})}(X_0,\ X) \to Hom_{\xi}(X)$ is bijective for all X in $(R_0 \amalg R_0,\ \underline{C})$, then the object X_0 defines a cocategory $(R_0,\ R_1,\ldots)$ in $\underline{C}$ in a natural way. Indeed, a triple of arrows

$$\begin{tikzcd} R_0 \arrow[r, shift left=2, "u"] \arrow[r, "v"] \arrow[r, shift right=2, "w"'] & S \end{tikzcd}$$

in $\underline{C}$ defines a composition

$\mathrm{Hom}_{\underline{F}(S)}(\xi(v),\ \xi(w)) \times \mathrm{Hom}_{\underline{F}(S)}(\xi(u),\ \xi(v)) \to \mathrm{Hom}_{\underline{F}(S)}(\xi(u),\ \xi(w))$

and in turn yields the composition rule

$$h_{R_1}(S) \underset{h_{R_0}(S)}{\times} h_{R_1}(S) \to h_{R_1}(S)$$

depending functorially on S . Consequently the functor Hom_ξ defines the cocategory $(R_0,\ R_1,\ldots)$ in $\underline{C}$ and in turn defines a cofibered category $\underline{h}_{(R_0,\ R_1,\ldots)}$ in $\underline{C}$. By definition, $\mathrm{ob}\ \underline{h}_{(R_0,\ R_1,\ldots)} = \coprod_S \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(R_0,\ S)$ (disjoint union for $S \in \mathrm{ob}(\underline{C})$), and an arrow $(R_0 \xrightarrow{f} S) \to (R_0 \xrightarrow{f'} S')$ is a pair $S \xrightarrow{h} S'$ and $R_1 \xrightarrow{u} S'$ in $\underline{C}$ such that $u \cdot s_1 = h \cdot f$ and $u \cdot s_2 = f'$, and the structural functor $P : \underline{h}_{(R_0,\ R_1,\ldots)} \to \underline{C}$ is given by $(R_0 \xrightarrow{f} S) \longmapsto S$. Now the pair $(\xi,\ \varphi)$ defines the functor

$$(\xi,\ \varphi) : \underline{h}_{(R_0,\ R_1,\ldots)} \to \underline{F} \text{ over } \underline{C} \text{ by}$$

$$(R_0 \xrightarrow{f} S) \longmapsto \xi(f)$$

$$[(R_0 \xrightarrow{f} S) \xrightarrow{(h,u)} (R_0 \to S')] \longmapsto \text{the composit map } \xi(f) \xrightarrow{h_*} \xi(hf) \xrightarrow{u(\varphi)} \xi(f') .$$

We note that, for each object S in $\underline{C}$, the functor $(\xi,\varphi)(S)$ $\underline{h}_{(R_0,R_1,\ldots)}(S) \to \underline{F}(S)$ is fully-faithful by virtue of the definition of $(R_0 \rightrightarrows R_1)$ coming from the representability of the functor Hom_ξ . Consequently the functor $(\xi,\varphi) : \underline{h}_{(R_0,R_1,\ldots)} \to \underline{F}$ is an $\underline{C}$-equivalence if and only if ξ is a quasi-initial object of $\underline{F}$ over $\underline{C}$ i.e., for every object a in $\underline{F}$ there exists a cocartesian arrow $\xi \to a$. Instead of this functor Hom_ξ one may also consider the functor

$$\mathrm{Isom}_\xi : (R_0 \amalg R_0,\ \underline{C}) \to (\mathrm{Ens})$$

given by $X = (f_1, f_2) \longmapsto \mathrm{Isom}_{\underline{F}(S)}(\xi(f_1), \xi(f_2))$ where S is the target of f_1 (= the target of f_2). If this functor is representable by an object $(R_0 \rightrightarrows R_1)$ in $(R_0 \amalg R_0, \underline{C})$, then it defines a cogroupoid $(R_0, R_1, \ldots)$ in $\underline{C}$ together with the functor $(\xi, \varphi) : \underline{h}_{(R_0, R_1, \ldots)} \to \underline{F}$, which is, when $\underline{F}$ is a cofibered groupoid, a $\underline{C}$-equivalence if and only if ξ is a quasi-initial object of $\underline{F}$ over $\underline{C}$.

Definition and proposition 2.11. A cogroupoid $(R_0, R_1, \ldots)$ in $\hat{\underline{C}}_\wedge$ is called smooth if any one of the following equivalent conditions holds:

(i) R_1 is a formal power-series ring over R_0 via s_1 (and s_2)

(ii) $\epsilon : \underline{h}_{R_0} \longrightarrow \underline{h}_{(R_0, R_1, \ldots)}$ is smooth over $\underline{C}_\wedge$.

A minimally smooth cogroupoid or a normalized smooth cogroupoid in $\hat{\underline{C}}_\wedge$ is a smooth cogroupoid $(R_0, R_1, \ldots)$ in $\hat{\underline{C}}_\wedge$ such that $\underline{h}_{(R_0, R_1, \ldots)}(k[\epsilon])$ is totally disconnected i.e., $s_1(k[\epsilon]) = s_2(k[\epsilon])$.

Proof: $\epsilon : \underline{h}_{R_0} \to \underline{h}_{(R_0, R_1, \ldots)}$ is smooth over $\underline{C}_\wedge \Leftrightarrow$ given any surjective map $(S', f') \xrightarrow{(h,u)} (S, f)$ in $\underline{h}_{(R_0, R_1, \ldots)}$, there exists a lifting f'' of f to S' together with an isomorphism $(S', f'') \xrightarrow{(1,u')} (S', f') \Leftrightarrow$ given $u \in h_{R_1}(S)$ and a lifting f' or $s_1(u)$ to S' , there exists a lifting u' of u to S' such that $s_1(u') = f'$, where $S' \to S$ is an arbitrary surjective map in $\underline{C}_\wedge \Leftrightarrow s_1 : \underline{h}_{R_1} \to \underline{h}_{R_0}$ is smooth over $\underline{C}_\wedge$.

Proposition 2.12. Let $(R_0, R_1, \ldots)$ be a cogroupoid in $\hat{\underline{C}}_\wedge$.

(a) If $(R_0, R_1, \ldots)$ is smooth, then $\underline{h}_{(R_0, R_1, \ldots)}$ is homogeneous.

(b) If $s_1(k[\epsilon]) = s_2(k[\epsilon])$, then the following statements are equivalent

(i) $(R_0, R_1, \ldots)$ is smooth

(ii) $\underline{h}_{(R_0, R_1, \ldots)}$ is homogeneous

(iii) $\underline{h}_{(R_0, R_1, \ldots)}$ is semi-homogeneous

(c) *If* $\underline{h}_{(R_0,R_1,\ldots)}$ *is semi-homogeneous, then it is equivalent to* $\underline{h}_{(S_0,S_1,\ldots)}$ *for some minimally smooth* **cogroupoid** S_* .

Proof: (a) Consider a diagram

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (S_1,f_1) \arrow[dr, "{(h_1,u_1)}"'] & & (S_2,f_2) \arrow[dl, "{(h_2,u_2)}"] \\ & (S,f) & \end{tikzcd}$$

in $\underline{h}_{(R_0,R_1,\ldots)}$ where $h_2 : S_2 \longrightarrow S$ is surjective in $\underline{C}_\wedge$. Since $s_1 : \underline{h}_{R_1} \longrightarrow \underline{h}_{R_0}$ is smooth by hypothesis, $u_1^{-1}\ u_2$ can be lifted to some $v \in h_{R_1}(S_2)$ such that $s_1(v) = f_2$. Since $h_2 \cdot s_2(v) = h_1 \cdot f_1$, $f_1 \times s_2(v) \in h_{R_0}(S_1 \underset{S}{\times} S_2)$ is defined and we obtain the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (S_1 \underset{S}{\times} S_2,\ f_1 \times s_2(v)) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "{(\pi_2,v^{-1})}"] & \\ (S_1,f_1) \arrow[dr, "{(h_1,u_1)}"'] & & (S_2,f_2) \arrow[dl, "{(h_2,u_2)}"] \\ & (S,f) & \end{tikzcd}$$

We claim that the above diagram defines a fibre-product $(S_1,f_1) \underset{(S,f)}{\times} (S_2,f_2)$ in $\underline{h}_{(R_0,R_1,\ldots)}$. Indeed, for any object (T, g) in $\underline{h}_{(R_0,R_1,\ldots)}$ we have

$\mathrm{Hom}((T,g),(S_1 \underset{S}{\times} S_2, f_1 \times s_2(v))) = \{(h_1' \times h_2', w_1 \times w_2) \in h_T(S_1 \underset{S}{\times} S_2) \times h_{R_1}(S_1 \underset{S}{\times} S_2) \mid s_1(w_1 \times w_2) = (h_1' \times h_2')\ g ,$

$s_2(w_1 \times w_2) = f_1 \times s_2(v)\} = \{(h_1' \times h_2', w_1, w_2) \in h_T(S_1 \underset{S}{\times} S_2) \times h_{R_1}(S_1) \times h_{R_1}(S_2) \mid h_1 w_1 = h_2 w_2,$

$s_1(w_1) = h_1'\ g,\ s_1(w_2) = h_2'\ g,\ s_2(w_1) = f_1,\ s_2(w_2) = s_2(v)\} =$

$\{(h_1' \times h_2', w_1, w_2) \in h_T(S_1 \underset{S}{\times} S_2) \times h_{R_1}(S_1) \times h_{R_1}(S_2) \mid u_1^{-1}\ u_2\ h_2(v^{-1} w_2) = h_1\ w_1\ ,\ s_1(w_1) = h_1'\ g,$

$s_2(w_1)=f_1,\ s_1(v^{-1}w_2)=h_2'g,\ s_2(v^{-1}w_2)=f_2\} \xrightarrow{\sim} \{(h_1'\times h_2', w_1, w_2') \in h_T(S_1 \underset{S}{\times} S_2) \times h_{R_1}(S_1) \times h_{R_1}(S_2) \mid$

$u_2\ h_2\ w_2' = u_1\ h_1\ w_1,\ s_1(w_1) = h_1'g,\ s_2(w_1) = f_1,\ s_1(w_2') = h_2'g,\ s_2(w_2') = f_2\} =$

$\mathrm{Hom}((T,\ g),\ (S_1,\ f_1)) \underset{\mathrm{Hom}((T,g),\ (S,f))}{\times} \mathrm{Hom}((T,\ g),\ (S_2,\ f_2))$.

(b) It suffices to show (iii) $\Rightarrow$ (i) . Since $\underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)}$ is semi-homogeneous and $\dim[\underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)}(k[\epsilon])] = \dim h_{R_0}(k[\epsilon]) < \infty$, $\underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)}$ admits a minimally versal formal object. On the other hand, $(R_0,\ 1_{R_0})$ is a quasi-initial minimal object of $\widehat{\underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)}}$ since $h_{R_0}(k[\epsilon]) \to [\underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)}(k[\epsilon])]$ is bijective, and therefore $(R_0,\ 1_{R_0})$ is a minimally versal formal object of $\underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)}$ by 1.10(ii), which means that $\epsilon : h_{R_0} \longrightarrow \underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)}$ is minimally smooth.

(c) Let $(S_0,\ \xi_0)$ be a minimally versal formal object for $\underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)}$ (1.11). For any object $\xi : R_0 \to T$ in $\underline{h}_{(R_0,\ R_1,\dots)}(T)$, the functor $\mathbf{Isom}(\xi,\xi)$ from $C_\Lambda/T \otimes_\Lambda T$ to (sets) which to any R associates the sets of isomorphisms between the two images of ξ on $R : R_0 \xrightarrow{\xi} T \rightrightarrows T \otimes_\Lambda T \longrightarrow R$, is represented by $R_1 \otimes_{R_0 \hat{\otimes}_\Lambda R_0} (T \otimes_\Lambda T)$. By a passage to limit, one get that $\mathrm{Isom}(\xi_0,\ \xi_0)$ is pro-represented by some S_1 , and $\underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)}$ is equivalent to $\underline{h}_{(S_0,S_1,\dots)}$. By (b), S_* is minimally smooth.

<u>Definition</u> 2.13. <u>A cofibered groupoid $\underline{A}$ over $\underline{C}_\Lambda$ is called (minimally) pro-representable if it is $\underline{C}_\Lambda$-equivalent to</u> $\underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)}$ <u>for some (normalized) cogroupoid</u> $(R_0,R_1,\dots)$ <u>in</u> $\hat{\underline{C}}_\Lambda$.

<u>Proposition</u> 2.14. <u>If</u> $(R_0,\ R_1,\dots)$ <u>is a normalized cogroupoid in</u> $\hat{\underline{C}}_\Lambda$, <u>then every homomorphism</u> $(\alpha_0,\alpha_1) : (R_0,R_1,\dots) \to (R_0,R_1,\dots)$ <u>which induces</u> $\underline{C}_\Lambda$<u>-equivalence</u> $\underline{h}_{(\alpha_0,\alpha_1)} : \underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)} \longrightarrow \underline{h}_{(R_0,\ R_1,\dots)}$ <u>is an isomorphism. In</u>

particular, for any cofibered groupoid A over $\underline{C}_\Lambda$, a normalized prorepresentation, if it exists, is unique up to an isomorphism.

Proof: Consider the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \underline{h}(R_0,R_1,\ldots) \arrow[r, "\underline{h}(\alpha_0,\alpha_1)"] & \underline{h}(R_0,R_1,\ldots) \\ \underline{h}_{R_0} \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r, "\underline{h}_{\alpha_0}"'] & \underline{h}_{R_0} \arrow[u, "\varepsilon"'] \end{tikzcd}$$

where $\underline{h}_{(\alpha_0,\alpha_1)}$ is a $\underline{C}_\Lambda$-equivalence. Since $\underline{h}_{(R_0,R_1,\ldots)}(k[\varepsilon])$ is totally disconnected, $[\underline{h}_{(\alpha_0,\alpha_1)}(k[\varepsilon])$ and $[\varepsilon(k[\varepsilon])]$ are both bijections, and hence so is $\underline{h}_{\alpha_0}(k[\varepsilon])$.

Consequently, $\alpha_0 : R_0 \to R_0$ is a surjective endomorphism and hence is an automorphism. It then follows that α_1 is also an automorphism of R_1 .

Lemma 2.15. Let A, B be discrete groupoids over $\underline{C}_\Lambda$ and $\varphi : A \to B$ a minimally smooth functor. If A, B are homogeneous, then φ is a $\underline{C}_\Lambda$-equivalence.

Proof: We must show that $\varphi(S) : A(S) \longrightarrow B(S)$ is bijective for all $S \in ob(\underline{C}_\Lambda)$. We note that $\varphi(S)$ is surjective for all $S \in ob(\underline{C}_\Lambda)$ and bijective for $S = k[\varepsilon]$. We argue by induction on the length of S . Let $S' \xrightarrow{f} S$ be a small extension in $\underline{C}_\Lambda$. Since A, B are homogeneous discrete groupoids, the canonical isomorphism $1 \times \tilde{f} : S' \underset{S}{\times} S' \longrightarrow S' \underset{k}{\times} k[\mathrm{Ker}\ f]$ induces the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}
A(S') \times_{A(S)} A(S') & \xrightarrow{\ \simeq\ } & A(S') \times A(k[\mathrm{Ker}\ f]) \\
\downarrow & & \downarrow \\
B(S') \times_{B(S)} B(S') & \xrightarrow{\ \simeq\ } & B(S') \times B(k[\mathrm{Ker}\ f])
\end{array}$$

Therefore $A(S')$, $B(S')$ are principal homogeneous sets over $A(S)$, $B(S)$ with the structural group $A(k[\mathrm{Ker}\ f]) \xrightarrow{\simeq} B(k[\mathrm{Ker}\ f])$. Consequently if $\varphi(S)$ is bijective, then $\varphi(S')$ is injective and hence is bijective.

Corollary 2.16. *Let* $\underline{A}$ *be a homogeneous groupoid over* $\underline{C}_\Lambda$ *such that* $\mathrm{Aut}_{\underline{A}(k[\varepsilon])}(1_\varepsilon)$ *is of finite-dimensional. Then for any* $\xi \in \mathrm{ob}(\hat{\underline{A}})$, *the functor* $\mathrm{Isom}_\xi : \underline{C}_{R \hat{\otimes}_\Lambda R} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ *is prorepresentable, where* $R = P(\xi)$.

Proof: Assume that Isom_ξ is homogeneous. We then have, by 1.11, a minimally smooth functor $\emptyset : \underline{h}_{R_1} \to \underline{\mathrm{Isom}_\xi}$, which is a $\underline{C}_{R\hat{\otimes}R}$-equivalence by 2.15 i.e., Isom_ξ is prorepresentable. Therefore it suffices to show that Isom_ξ is homogeneous. Consider a diagram

$$\begin{array}{ccc}
T_1 & & T_2 \\
& \searrow \quad \swarrow & \\
& T &
\end{array}$$

in $\underline{C}_{R \hat{\otimes}_\Lambda R}$ where $T_2 \longrightarrow T$ is surjective. Since $\underline{A}$ is homogeneous, $\xi_i(T_1) \times_{\xi_i(T)} \xi_i(T_2)$ exists in $\underline{A}$, and we have a canonical isomorphism $\xi_i(T_1 \times_T T_2) \simeq \xi_i(T_1) \times_{\xi_i(T)} \xi_i(T_2)$ for $i = 1,2$ (cf. 2.6(a)). It follows that $\mathrm{Isom}_\xi(T_1 \times_T T_2) \longrightarrow \mathrm{Isom}_\xi(T_1) \times_{\mathrm{Isom}_\xi(T)} \mathrm{Isom}_\xi(T_2)$ is an isomorphism.

Theorem 2.17. *Let* $\underline{A}$ *be a cofibered groupoid over* $\underline{C}_\Lambda$. *Then it is prorepresentable by a (normalized) smooth cogroupoid if and only if*

(1) $\underline{A}$ is homogeneous

(2) $[A(k[\varepsilon])]$ and $[\mathrm{Aut}(1_\varepsilon)]$ are both finite-dimensional vector spaces over k .

Proof: Assume that $\underline{A}$ is prorepresentable by a smooth cogroupoid i.e., $\underline{A}$ is $\underline{C}_\Lambda$-equivalent to $\underline{h} = \underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)}$ for some smooth cogroupoid $(R_0,R_1,\dots)$ in $\hat{\underline{C}}_\Lambda$. Since $\underline{h}$ is homogeneous by 2.12(a), and

$$[\underline{h}(k[\varepsilon])] = \mathrm{Coker}\ (\mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R_1,k[\varepsilon] \underset{s_2}{\overset{s_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R_0,k[\varepsilon]))$$ as well as

$$\mathrm{Aut}_{\underline{h}}(1_\varepsilon) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R_1,k[\varepsilon]) \xrightarrow{s_1} \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R_0,k[\varepsilon]))$$

$$= \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R_1,k[\varepsilon]) \xrightarrow{s_2} \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R_0,k[\varepsilon]))$$ are both finite-dimensional vector spaces over k , we must have the same properties on $\underline{A}$. Conversely assume (1) and (2) on $\underline{A}$. We claim that $\underline{A}$ is prorepresentable by a normalized smooth cogroupoid. Since $\underline{A}$ is homogeneous and $[\underline{A}(k[\varepsilon])]$ is a finite-dimensional vector space over k , $\underline{A}$ admits a minimally versal formal object ξ . Set $P(\xi) = R_0$ and consider the functor $\mathrm{Isom}_\xi : \underline{C}_{R_0 \hat{\otimes}_\Lambda R_0} \to (\mathrm{Ens})$ given by

$$T \longmapsto \mathrm{Isom}_{\underline{A}(T)}(\xi_1(T),\xi_2(T))$$

where $\xi_i(T) = \xi(f_i)$ and $f_i : R_0 \to T$ denotes the composit maps

$$R_0 \underset{s_2}{\overset{s_1}{\rightrightarrows}} R_0 \underset{\Lambda}{\otimes} R_0 \dashrightarrow T .$$

This functor is pro-representable by 2.16, i.e. there exists $R_1 \in \mathrm{ob}(\widehat{\underline{C}_{R_0 \hat{\otimes}_\Lambda R_0}})$ and an isomorphism $\xi_1(R_1) \xrightarrow{\varphi} \xi_2(R_1)$ such that $\tilde{\varphi} : h_{R_1} \to \mathrm{Isom}_\xi$ is an isomorphism over $\underline{C}_{R_0 \hat{\otimes}_\Lambda R_0}$. Then $(R_0,R_1,\dots)$ defines a cogroupoid in $\hat{\underline{C}}_\Lambda$ and the functor $(\xi,\varphi) : \underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)} \to \underline{A}$ is a $\underline{C}_\Lambda$-equivalence. Since ξ is a minimally versal formal object of $\underline{A}$, the composit functor $\underline{h}_{(R_0,R_0,\dots)} \xrightarrow{\varepsilon} \underline{h}_{(R_0,R_1,\dots)} \xrightarrow{(\xi,\varphi)} \underline{A}$ is, by definition, minimally smooth and therefore so is ε since (ξ,φ) is a $\underline{C}_\Lambda$-equivalence i.e., $(R_0,R_1,\dots)$ is a normalized smooth cogroupoid in $\hat{\underline{C}}_\Lambda$.

<u>Corollary</u> 2.18. <u>A functor</u> $F : \underline{C}_\Lambda \longrightarrow (Ens)$ <u>is pro-representable if and only if it is homogeneous and</u> $\dim F(k[\varepsilon]) < \infty$.

<u>Corollary</u> 2.19. <u>Every smooth cogroupoid in</u> $\hat{\underline{C}}_\Lambda$ <u>can be normalized up to isomorphism</u>.

Given a cogroupoid $(R_0,R_1,\dots)$ in $\hat{\underline{C}}_\Lambda$, we set $\bar{R}_1 = R_1/J$ where J is the ideal in R_1 generated by $\{s_1(r) - s_2(r) \mid r \in R_0\}$. Then $(R_0,\bar{R}_1,\dots)$ defines a formal group scheme over R_0 with respect to the induced composition rule. Now let $\underline{A}$ be a cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$ prorepresented by a normalized smooth cogroupoid $(R_0,R_1,\dots)$ via (ξ,φ) . Let $\underline{C}_k \hookrightarrow \underline{C}_{R_0} \hookrightarrow \underline{C}_{R_0\hat{\otimes}_\Lambda R_0}$ be the embeddings corresponding to the surjective maps $R_0\hat{\otimes}_\Lambda R_0 \longrightarrow R_0 \longrightarrow k$, and let Aut_ξ , Aut^0 be the restriction functors of $Isom_\xi$ on $\underline{C}_{R_0}$, $\underline{C}_k$ respectively. In other words, $Aut_\xi(S)$ = the automorphism group of $\xi(S)$ for every $S \in ob(\underline{C}_{R_0})$, and $Aut^0(S)$ = the automorphism group of 1_S for every $S \in ob(\underline{C}_k)$, where 1_S = the direct image of $1 \in \underline{A}(k)$ under the map $k \to S$. Since R_1 prorepresents the functor $Isom_\xi$ on $\underline{C}_{R_0\hat{\otimes}_\Lambda R_0}$, it follows that $\bar{R}_1$ prorepresents the functor Aut_ξ on $\underline{C}_{R_0}$, and $k \otimes_{R_0} \bar{R}_1$ prorepresents Aut^0 on $\underline{C}_k$. Though $\underline{A}$ is prorepresented by a smooth cogroupoid $(R_0,R_1,\dots)$, neither $(R_0,\bar{R}_1,\dots)$ nor $(k, k \otimes_{R_0} \bar{R}_1,\dots)$ are in general smooth. Indeed we have

<u>Corollary</u> 2.20. <u>Let</u> $\underline{A}$ <u>be a homogeneous cogroupoid over</u> $\underline{C}_\Lambda$ <u>prorepresented by a normalized smooth cogroupoid</u> $(R_0,R_1,\dots)$ <u>via</u> (ξ,φ) .

(a) $(R_0,\bar{R}_1,\dots)$ <u>and</u> $(k, k \otimes_{R_0} \bar{R}_1,\dots)$ <u>prorepresent the functors</u> Aut_ξ <u>and</u> Aut^0 <u>respectively</u>.

(b) <u>The following statements are equivalent</u>

(i) <u>the formal group scheme</u> $\underline{h}_{(R_0,\bar{R}_1,\dots)}$ <u>is formally smooth over</u> R_0 ;

(ii) <u>for every surjective arrow</u> $a' \to a$ <u>in</u> $\underline{A}$,

$Aut_{P(a')}(a') \longrightarrow Aut_{P(a)}(a)$ <u>is surjective</u>,

(iii) R_0 <u>prorepresents the functor</u> $[\underline{A}]$ <u>over</u> $\underline{C}_\Lambda$.

Proof: We have already noted (a). As for (b), (i) $\Leftrightarrow$ (ii) is clear whereas (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) follows from 2.7 and 2.15, since $\tilde{\xi} : h_{R_0} \longrightarrow [\underline{A}]$ is minimally smooth.

Remark 2.21. Let $\underline{A}$ be a cofibered groupoid over $\underline{C}_\Lambda$, and let $\underline{A}|\underline{C}_k$ be the pull-back of $p : \underline{A} \longrightarrow \underline{C}_\Lambda$ under $\underline{C}_k \hookrightarrow \underline{C}_\Lambda$. Then it is trivial to see that if $\underline{A}$ is prorepresented by $(R_0,R_1,\dots)$ via (ξ,φ), then $\underline{A}|\underline{C}_k$ is prorepresented by $(k \underset{\Lambda}{\otimes} R_0 , k \underset{\Lambda}{\otimes} R_1,\dots)$ via $(k \underset{\Lambda}{\otimes} \xi , k \underset{\Lambda}{\otimes} \varphi)$ where $k \underset{\Lambda}{\otimes} \xi$ = its direct image of ξ under the map $R_0 \longrightarrow k \underset{\Lambda}{\otimes} R_0$, $k \underset{\Lambda}{\otimes} \varphi$ = the image of φ under $\mathrm{Isom}_{\underline{A}(R_0)}(\xi(s_1), \xi(s_2)) \longrightarrow \mathrm{Isom}_{\underline{A}(k \underset{\Lambda}{\otimes} R_1)}(k \underset{\Lambda}{\otimes} \xi(s_1), k \underset{\Lambda}{\otimes} \xi(s_2))$. If $(R_0,R_1,\dots)$ is normalized, then so is $(k \underset{\Lambda}{\otimes} R_0, k \underset{\Lambda}{\otimes} R_1,\dots)$, and the relative dimension of R_1 over R_0 is equal to the relative dimension of $k \underset{\Lambda}{\otimes} R_1$ over $k \underset{\Lambda}{\otimes} R_0$ since R_1 is smooth over R_0.

Remark 2.22. Let $\underline{A}$ be prorepresented by smooth cogroupoid $(R_0,R_1,\dots)$ and $(R_0', R_1',\dots)$ where we assume that $(R_0,R_1,\dots)$ is normalized. We then obtain a homomorphism $(i_0,i_1) : (R_0,R_1,\dots) \longrightarrow (R_0', R_1',\dots)$. Now R_0' is a formal power-series ring over R_0 by 2.10(b), and the homomorphism (i_0,i_1) induces an isomorphism $R_0' \underset{R_0}{\otimes} (R_0,R_1,\dots) \xrightarrow{\sim} (R_0', R_1',\dots)$.

3. The coherent sheaves $\underline{D}_X^i$

One of the nice functors which is usually not pro-representable but nevertheless admits a formal versal object is the deformation functor. To this end we recall a few basic facts on commutative ring extensions and its obstruction theory. This section contains nothing new (possibly except in its systematic approach via Grothendieck cohomology on site). A purpose of this section is to make this expose as much self-contained. (Indeed we prove here more than we need later). The basic facts are stated in theorem 3.12. Throughout rings are meant to be commutative rings with unit.

Given a ring R we denote by $\underline{C}_R$ the category of R-algebras. For each object A in $\underline{C}_R$ we set

Cov(A) = the set of all surjective arrows $\varphi : A' \to A$ in $\underline{C}_R$ with target A.

It clearly defines a pretopology and in turn we obtain a site $\underline{C}_R$. For each object A in $\underline{C}_R$, we shall denote by $\underline{C}_{A|R}$ the category of arrows in $\underline{C}_R$ with target A. We may and shall provide the category $\underline{C}_{A|R}$ with the topology induced from the forgetful functor $j_A : \underline{C}_{A|R} \to \underline{C}_R$. **We note that the category $\underline{C}_{A|R}$ has a final object $(1_A : A \to A)$ and an initial object $(i_A : R \to A)$, and admits a fibre-product as well as coproduct.** Henceforth we shall denote the object $(B \to A)$ in $\underline{C}_{A|R}$, by abuse of notation, simply by B in case when there is no possible confusion. Given an abelian category $\underline{C}$, a $\underline{C}$-valued sheaf on $\underline{C}_{A|R}$ is, by definition, a functor $F : \underline{C}^{\circ}_{A|R} \to \underline{C}$ such that, for any surjective arrow $B' \to B$ in $\underline{C}_{A|R}$,

$$0 \to F(B) \to F(B') \rightrightarrows F(B' \underset{B}{\times} B')$$

is exact. The <u>additive</u> presheaves are those which preserve coproduct i.e., $F(B_1 \underset{R}{\otimes} B_2) = F(B_1) \oplus F(B_2)$. For example, an A-module M defines the functor

$$\mathrm{Der}_R(-,M) : \underline{C}^{\circ}_{A|R} \to (A\text{-mod})$$

given by $B \to \mathrm{Der}_R(B,M)$ = R-linear derivations of B with values in M regarded as B-module via the structural map $B \to A$, and it is clearly an additive sheaf on $\underline{C}^{\circ}_{A|R}$, where (A-mod) denotes the category of A-modules. A presheaf F on $\underline{C}_{A|R}$ with values in (A-mod) is called "finite type" if $F(B)$ is an A-module of finite type whenever B is an R-algebra of finite type. For example, if A is noetherian and M is an A-module of finite type, then $\mathrm{Der}_R(-,M)$ is an additive sheaf of finite type on the site $\underline{C}_{A|R}$.

A few more words on notations and basic facts in homological algebra:

3.1(a) Throughout the rest of this section, we shall denote by $\underline{C}^{\sim}_{A|R}$ (or $\underline{C}^{\vee}_{A|R}$) the category of sheaves (or presheaves) with values in (A-mod). We have the (left exact) injection functor $i_{A|R} : \underline{C}^{\sim}_{A|R} \to \underline{C}^{\vee}_{A|R}$, and the associated-sheaf (exact) functor $G_{A|R}: \underline{C}^{\vee}_{A|R} \to \underline{C}^{\sim}_{A|R}$ which is adjoint to the functor $i_{A|R}$. An object $B \in ob(\underline{C}_{A|R})$ induces a continuous functor $j : \underline{C}_{B|R} \to \underline{C}_{A|R}$ and in turn a commutative diagram

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \underline{C}^{\sim}_{A|R} \arrow[r, "j^{\sim}"] \arrow[d, "i_{A|R}"'] & \underline{C}^{\sim}_{B|R} \arrow[d] \\ \underline{C}^{\vee}_{A|R} \arrow[r, "j^{\vee}"'] & \underline{C}^{\vee}_{B|R} \end{tikzcd}$$

where the restriction functor $\tilde{j}$ (as well as $j^{\vee}$) is an exact functor, since the site $\underline{C}_{B|R}$ is nothing but the category of arrows in $\underline{C}_{A|R}$ having target B , with the induced topology. A ring homomorphism $S \to R$ induces a continuous functor $\beta : \underline{C}_{A|R} \to \underline{C}_{A|S}$, and in turn a commutative diagram

$$(**) \qquad \begin{tikzcd} \underline{C}^{\sim}_{A|S} \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[d, "i_{A|S}"'] & \underline{C}^{\sim}_{A|R} \arrow[d] \\ \underline{C}^{\vee}_{A|S} \arrow[r, "\beta^{\vee}"'] & \underline{C}^{\vee}_{A|R} \end{tikzcd}$$

Note that $\tilde{\beta}$ is not necessarily an exact functor.

3.1(b) The right derived functor of the injection functor $i_{A|R}: \underline{C}^{\sim}_{A|R} \to \underline{C}^{\vee}_{A|R}$ will be denoted by $\underline{H}^{\circ}_{A|R}$. For each sheaf F on $\underline{C}_{A|R}$, we set

$$H^{\circ}(A|R,F) = [H^{\circ}{}_{A|R}(F)](A)$$

For any $B' \to B$ in $Cov(B)$, let us define the functor $H^{\circ}((B' \to B),-) : \underline{C}^{\vee}_{A|R} \to (A\text{-mod})$ by $H^{\circ}((B'\to B),F) = Ker(F(B') \rightrightarrows F(B' \times_B B'))$. The right derived functors of $H^{\circ}((B' \to B),-)$ will be denoted by $H^{\circ}((B'\to B),-)$. One knows that the $H^{\circ}((B' \to B),F)$ are the cohomology groups of the (Čech) semi-simplicial module

$$F(B') \rightrightarrows F(B' \times_B B') \rightrightarrows F(B' \times_B B' \times_B B') \rightrightarrows \cdots$$

The right derived functor of $\check{\underline{H}}^0_{A|R} : \underline{C}_{A|R} \to \underline{C}_{A|R}$ will be denoted by $\check{\underline{H}}^{\bullet}_{A|R}$, where

$$[\check{\underline{H}}^0_{A|R}(F)](B) = \lim_{\{B' \to B\} \in \mathrm{Cov}(B)} H^0(\{B' \to B\}, F) \quad .$$

For each presheaf F on $\underline{C}_{A|R}$, we set

$$\check{H}^{\bullet}(A|R,F) = [\check{H}^{\bullet}_{A|R}(F)](A) = \lim_{\{A' \to A\} \in \mathrm{Cov}(A)} H^{\bullet}(\{A' \to A\}, F)$$

for any sheaf F on $\underline{C}_{A|R}$, we have the usual spectral sequence

$$\check{H}^p(A|R, \underline{H}^q_{A|R}(F)) \Rightarrow H^{p+q}(A|R,F)$$

where we note that $\check{H}^0(A|R, \underline{H}^q(F)) = 0$ for all $q > 0$.

In particular

$$\begin{cases} H^1(A|R,F) = H^1(A|R,F) \\ 0 \to \check{H}^2(A|R,F) \to H^2(A|R,F) \to \check{H}^1(A|R,\underline{H}^1_{A\ R}(F)) \to \check{H}^3(A|R,F) \quad \text{is exact.} \end{cases}$$

3.1(c) If B is an object in $\underline{C}_{A|R}$, the commutative diagram (*) in 2.1(a) together with the fact that $\tilde{j}$ as well as $j^{\vee}$ are exact functors yields the canonical isomorphism

$$H^{\bullet}(B|R, \tilde{j}F) = [\underline{H}^{\bullet}_{A|R}(F)](B)$$

On the other hand, a ring homomorphism $S \to R$ induces the commutative diagram (**) in 2.1(a). Now $\tilde{\beta}$ is not necessarily an exact functor. However, β preserves a fibre-product, and thus we obtain a spectral sequence

$$\underline{H}^p_{A|R}(R^q\tilde{\beta}F) \Rightarrow \check{\beta}\underline{H}^{p+q}_{A|S}(F) \qquad \text{i.e.,} \qquad H^p(A|R, R^q\tilde{\beta}F) \Rightarrow H^{p+q}(A|S,F)$$

Since we have the canonical isomorphism $\tilde{\beta} = G_{A|R} \circ \check{\beta} \circ i_{A|S}$ and $\beta^{\#} = G_{A|R} \circ \check{\beta}$ is an exact functor, we have $R^{\cdot}\widetilde{\beta}F = \beta^{\#}\underline{H}^{\cdot}_{A|S}(F)$. Thus the spectral sequence above can now be written as

$$H^p(A|R, \beta^{\#}\underline{H}^q_{A|S}(F)) \Rightarrow H^{p+q}(A|S,F) \quad .$$

Lemma 3.2. Given $B \in ob(\underline{C}_{A|R})$, choose a surjective arrow $P \to B$ in $\underline{C}_{B|R}$, where P is a polynomial algebra over R . Then for any $F \in ob(\underline{C}^{\vee}_{A|R})$, the natural map $H^{\cdot}(\{P \to B\},F) \to \check{\underline{H}}^{\cdot}(F)\ (B)$ is an isomorphism.

Proof: It suffice to see that the natural map

$$H^0(\{P \to B\},F) \to \check{\underline{H}}^0(F)\ (B) = \varinjlim_{\{B' \to B\} \in Cov(B)} H^0(\{B' \to B\},F)$$

is an isomorphism, which is clear since, for any $\{B' \to B\} \in Cov(B)$, there exists an arrow $\{P \to B\} \to \{B' \to B\}$.

Corollary 3.3.

(a) Assume that A is noetherian. If $F \in ob(\underline{\widetilde{C}}_{A|R})$ is of finite type, then $\underline{H}^n(F)$ is of finite type for all n .

(b) For any polynomial algebra P over R , we have $H^n(P|R,F) = 0$ for all $n > 0$ and for all $F \in ob(\underline{\widetilde{C}}_{P|R})$.

(c) A diagram $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ in $\underline{\widetilde{C}}_{A|R}$ is exact if and only if $0 \to F'(P) \to F(P) \to F''(P) \to 0$ is exact for every $P \in ob(\underline{C}_{A|R})$ which is a polynomial algebra over R .

Proof:

(a) In view of the spectral sequence

$$\check{H}^p(B|R,\underline{H}^q(F)) \Rightarrow H^{p+q}(B|R,F)$$

together with the fact that $\check{H}^0(\underline{H}^q(F)) = 0$ for all $q > 0$, it suffices to show that $\underline{H}^n(G)$ is of finite type for all n and for all presheaf G of finite type. However $\check{H}^{\cdot}(B|R,G) = H^{\cdot}(\{P \to B\},G)$, where P is a polynomial algebra over R and $\{P \to B\} \in Cov(B)$, and furthermore $H^{\cdot}(\{P \to B\},G)$ is simply the cohomology gotten from the complex

$$\ldots\ldots\ldots\ldots G(P \underset{B}{\times} P \underset{B}{\times} P) \leftleftarrows G(P \underset{B}{\times} P) \leftleftarrows G(P) .$$

If B is an R-algebra of finite type, then we may take P to be of finite type over R so that $P\underset{B}{\times} \ldots \underset{B}{\times}P$ are all R-algebras of finite type. If G is of finite type, then $G(P\underset{B}{\times} \ldots \underset{B}{\times}P)$ are all A-modules of finite type, so that $H^{\cdot}(\{P \to B\},G)$ is an A-module of finite type since A is noetherian.

(b) Let P be a polynomial algebra over R. If $B \to P$ is any surjective R-algebra map, then it amits a section and hence $H^{i}(\{B \to P\},G) = 0$ for all $i > 0$, so that $\check{H}^{i}(P|R, G) = 0$ for all $i > 0$ and for all presheaves G on $\underline{C}_{P|R}$. It follows that the spectral sequence $\check{H}^{p}(P|R, \underline{H}^{q}_{P|R}(F)) \Rightarrow H^{p+q}(P|R, F)$ degenerates and hence $\check{H}^{0}(P|R, \underline{H}^{n}(F)) \simeq H^{n}(P|R, F)$ for all n. However $\check{H}^{0}(P|R, \underline{H}^{n}(F)) = 0$ for all $n > 0$ whenever F is a sheaf, and hence $H^{n}(P|R, F) = 0$ for all $n > 0$ and for all $F \in ob(\underline{\tilde{C}}_{P|R})$.

(c) If $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ is an exact sequence in $\underline{\tilde{C}}_{A|R}$, then

$$0 \to F'(B) \to F(B) \to F''(B) \to H'(B|R, F') \to H'(B|R, F) \to \ldots$$

is exact. If $P \in ob(\underline{C}_{A|R})$ is a polynomial algebra over R, then $H^{1}(P|R, F') = 0$ by 3.3(b) and hence

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

is exact. As for the other direction, let $\underline{P}_{A|R}$ be the full subcategory of $\underline{C}_{A|R}$ in which

$$ob(\underline{P}_{A|R}) = \{P \in ob(\underline{C}_{A|R}) \mid P \text{ is a polynomial algebra over } R\} ,$$

provided with the induced topology, and let $p : \underline{P}_{A|R} \to \underline{C}_{A|R}$ be the inclusion functor. Since every object in $\underline{C}_{A|R}$ can be covered by an object in $\underline{P}_{A|R}$, it follows from a comparison lemma (   ) that $\tilde{p} : \underline{\tilde{C}}_{A|R} \to \underline{\tilde{P}}_{A|R}$ is an equivalence of categories. Consequently, if $0 \to F'(P) \to F(P) \to F''(P) \to 0$ is exact for every $P \in ob(\underline{P}_{A|R})$, then $0 \to \tilde{p}F' \to \tilde{p}F \to \tilde{p}F'' \to 0$ is exact in $\underline{\tilde{P}}_{A|R}$ and hence $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ is exact in $\underline{\tilde{C}}_{A|R}$.

Remark 3.4. Every surjective arrow in $\underline{P}_{A|R}$ admits a section. It follows immediately that every presheaf on $\underline{P}_{A|R}$ is actually a sheaf i.e., $\underline{P}^{\sim}_{A|R} = \underline{P}_{A|R}$. Consequently we find that the restriction functor $\underline{C}^{\sim}_{A|R} \to \underline{P}^{\vee}_{A|R}$ is an equivalence of categories.

Lemma 3.5. *Consider a diagram of R-algebras*

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow[\text{surjective}]{} & B \end{array}$$

and let S *be an R-algebra.*

(i) *If* $\mathrm{Tor}_1^R(B,S) = 0$, *then the canonical map*

$$(B' \underset{B}{\times} C) \underset{R}{\otimes} S \to (B' \underset{R}{\otimes} S) \underset{(B \underset{R}{\otimes} S)}{\times} (C \underset{R}{\otimes} S)$$

is an isomorphism.

(ii) *Assume that* B' *is R-flat. If* $\mathrm{Tor}_i^R(C,S) = 0$ *for all* $0 < i < n$ *and* $\mathrm{Tor}_i^R(B,S) = 0$ *for all* $0 < i < n$, *then* $\mathrm{Tor}_i^R(B' \underset{B}{\times} C, S) = 0$ *for all* $0 < i < n$.

Proof: Let $0 \to J \to B' \to B \to 0$ be exact.

(i) If $\mathrm{Tor}_i^R(B, S) = 0$, then

$$0 \to J \underset{R}{\otimes} S \to B' \underset{R}{\otimes} S \to B \underset{R}{\otimes} S \to 0$$

is exact so that

$$0 \to J \underset{R}{\otimes} S \to (B' \underset{R}{\otimes} S) \underset{(B \underset{R}{\otimes} S)}{\times} (C \underset{R}{\otimes} S) \to C \underset{R}{\otimes} S \to 0$$

is exact. We thus obtain an exact commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} & & J \underset{R}{\otimes} S & \longrightarrow & (B' \underset{B}{\times} C) \underset{R}{\otimes} S & \longrightarrow & C \underset{R}{\otimes} S & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & J \underset{R}{\otimes} S & \longrightarrow & (B' \underset{R}{\otimes} S) \underset{(B \underset{R}{\otimes} S)}{\times} (C \underset{R}{\otimes} S) & \longrightarrow & C \underset{R}{\otimes} S & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

and therefore $(B'\otimes_B C)\otimes_R S \to (B'\otimes_R S) \times_{(B\otimes_R S)} (C \otimes_R S)$ is an isomorphism.

(ii) Since B' is R-flat and $\mathrm{Tor}_i^R(B, S) = 0$ for all $0 < i \leq n$ by hypothesis, we have $\mathrm{Tor}_i^R(J, S) = 0$ for all $0 < i < n$. Then the exact sequence $0 \to J \to B'\times_B C \to C \to 0$ together with the hypothesis that $\mathrm{Tor}_i^R(C, S) = 0$ for all $0 < i < n$ entails that $\mathrm{Tor}_i^R(B'\times_B C, S) = 0$ for all $0 < i < n$.

Corollary 3.6.

(a) *Let* A, S *be R-algebras. If* $\mathrm{Tor}_1^R(A, S) = 0$, *then the canonical map* $\check{H}^{\cdot}(A\otimes_R S|S, G) \to \check{H}^{\cdot}(A|R, SG)$ *is an isomorphism for any* $G \in \mathrm{ob}(\underline{C}^{\vee}_{A\otimes_R S|S})$ *where the functor* $S : \underline{C}_{A|R} \to \underline{C}_{A\otimes_R S|S}$ *is given by* $X \longmapsto X\otimes_R S$. *In particular if* S *is R-flat, then the canonical map* $\check{S}\check{H}^{\cdot}(G) \to \check{H}(\check{S}G)$ *is an isomorphism for every* $G \in \mathrm{ob}(\underline{C}^{\vee}_{A\otimes_R S|S})$.

(b) *Let* $P \to B$ *be a surjective R-algebra map, where* P *is a polynomial algebra over* R. *If* $\mathrm{Tor}_i^R(B, S) = 0$ *for all* $0 < i \leq n$, *then* $\mathrm{Tor}_i^R(P\times_B P\times_B \ldots \times_B P, S) = 0$ *for all* $0 < i < n$.

Proof:

(a) Given $B \in \mathrm{ob}(\underline{C}_{A|R})$, choose $\{P \to B\} \in \mathrm{Cov}(B)$ where P is a polynomial algebra over R. If $\mathrm{Tor}_1^R(B, S) = 0$, the natural map $(\overbrace{P\times_B \ldots \times_B P}^{n})\otimes_R S \to (P\otimes_R S)\times_{(B\otimes_R S)} \ldots \times_{(B\otimes_R S)}(P\otimes_R S)$ is an isomorphism for all n by 3.5(i), and hence $\check{H}^{\cdot}(B|R, \check{S}G) = H^{\cdot}(\{P \to B\}, \check{S}G) = H^{\cdot}(\{P\otimes_R S \to B\otimes_R S\}, G) = \check{H}^{\cdot}(B\otimes_R S|S, G)$.
If S is R-flat, then $\mathrm{Tor}_1^R(X, S) = 0$ for every $X \in \mathrm{ob}(\underline{C}_{A|R})$ and hence $\check{H}^{\cdot}(X\otimes_R S|S, G) \to \check{H}^{\cdot}(X|R, \check{S}G)$ is an isomorphism for every $X \in \mathrm{ob}(\underline{C}_{A|R})$ i.e. $\check{S}\underline{\check{H}}^{\cdot}(G) \to \underline{\check{H}}^{\cdot}(\check{S}G)$ is an isomorphism.

(b) Set $P^{(m)} = \overbrace{P\times_B \ldots \times_B P}^{m+1}$. If $m = 0$ there is nothing to prove since P is R-flat. Assume that $\mathrm{Tor}_i^R(P^{(m-1)}, S) = 0$ for all $0 < i < n$. Since $P \to B$ is surjective and $P^{(m)} = P\times_B P^{(m-1)}$, it follows from 3.5(ii) that $\mathrm{Tor}_i^R(P^{(m)}, S) = 0$ for all $0 < i < n$.

Proposition 3.7.

(a) *Let* A, S *be* R*-algebras. If* $\mathrm{Tor}_i^R(A, S) = 0$ *for all* $0 < i \le n$, *then for any sheaf* F *on* $\underline{C}_{A\otimes_R S|S}$, *the canonical map* $H^i(A\otimes_R S|S, F) \to H^i(A|R, \widetilde{S}F)$ *is an isomorphism for all* $i \le n$, *where* $S : \underline{C}_{A|R} \to \underline{C}_{A\otimes_R S|S}$ *is given by* $X \longmapsto X\otimes_R S$.

(b) *Let* P *be a polynomial algebra over* R. *Then for any additive sheaf* F *on* $\underline{C}_{P\otimes_R A|R}$, *the canonical map* $H^n(P\otimes_R A|R, F) \to H^n(A|R, F)$ *is an isomorphism for all* $n > 0$.

(c) *Let* $S \to R \to A$ *be ring homomorphisms. Then for any additive sheaf* F *on* $\underline{C}_{A|S}$, *we have an exact sequence*

$$0 \to H^0(A|R, F_R) \to H^0(A|S, F) \to H^0(R|S, F) \to H^1(A|R, F_R) \to H^1(A|S, F) \to H^1(R|S, F) \to$$
$$\cdots\cdots \to H^n(A|R, F_R) \to H^n(A|S, F) \to H^n(R|S, F) \to H^{n+1}(A|R, F_R) \to \cdots$$

where F_R *is a sheaf on* $\underline{C}_{A|R}$ *defined by*

$$F_R(X) = \mathrm{Ker}(F(X) \to F(R))$$

for all $X \in \mathrm{ob}(\underline{C}_{A|R})$ *via the forgetful functor* $\underline{C}_{A|R} \to \underline{C}_{A|S}$.

Proof:

(a) Consider the continuous functor

$$S : \underline{C}_{A|R} \to \underline{C}_{A\otimes_R S|S}$$

where $S(X) = X\otimes_R S$. Since the functor S sends a polynomial algebras over R to polynomial algebras over S, $\widetilde{S} : \widetilde{\underline{C}}_{A\otimes_R S|S} \to \widetilde{\underline{C}}_{A|R}$ is an exact functor by 3.3(c) and in turn we obtain the canonical map $\check{S}\underline{H}^{\cdot}_{A\otimes_R S|S}(F) \to \underline{H}^{\cdot}_{A|R}(\widetilde{S}F)$, and in turn we obtain the commutative diagram of spectral sequences:

$$\begin{tikzcd}
E_S^{p,q}(S(X)) = \check{H}^p(X\otimes_R S|S, \underline{H}^q_{A\otimes_R S|S}(F)) \arrow[d] \arrow[rr, Rightarrow] & & H^{p+q}(X\otimes_R S|S, F) \arrow[dd] \\
\check{H}^p(X|R, \check{S}\underline{H}^q_{A\otimes_R S|S}(F)) \arrow[d] & & \\
E_R^{p,q}(X) = \check{H}^p(X|R, \underline{H}^q_{A|R}(\widetilde{S}F)) \arrow[rr, Rightarrow] & & H^{p+q}(X|R, \widetilde{S}F)
\end{tikzcd}$$

We note that $E_S^{p,q}(S(X)) \to \check{H}^p(X|R, \check{S}\underline{H}^q_{A\otimes_R S|S}(F))$ is an isomorphism whenever $\mathrm{Tor}_1^R(X, S) = 0$ by 3.6(a). Assume now that $[\check{S}\underline{H}^q_{A\otimes_R S|S}(F)](X) \to [\underline{H}^q_{A|R}(\widetilde{S}F)](X)$ is an isomorphism for all $q < n$ and for all $X \in \mathrm{ob}(\underline{C}_{A|R})$ such that $\mathrm{Tor}_i^R(X, S) = 0$ for all $0 \quad i \quad n$. It follows immediately from 3.6(b) that $E_S^{p,q}(S(X)) \to E_R^{p,q}(X)$ is an isomorphism for all $q < n$ and for all p, provided $\mathrm{Tor}_i^R(X, S) = 0$ for all $0 < i \le n$. Since $E_S^{0,n}(S(X)) \to E_R^{0,n}(X)$ is an isomorphism (since both sides are zero), we get that $H^n(X_R S|S, F) \to H^n(X|R, \widetilde{S}F)$ is an isomorphism whenever $\mathrm{Tor}_i^R(X, S) = 0$ for all $0 < i \le n$ i.e., $[\check{S}\underline{H}^i_{A\otimes_R S|S}(F)](X) \to [\underline{H}^i_{A|R}(\widetilde{S}F)](X)$ is an isomorphism for all $i \le n$ whenever $\mathrm{Tor}_i^R(X, S) = 0$ for all $0 < i \le n$.

(b) Let P be a polynomial algebra over R and let $f : \underline{C}_{A|R} \to \underline{C}_{A\otimes_R P|R}$ be the continuous functor given by $f(X) = X\otimes_R P$. Let $P' \to X$ be a surjective arrow in $\underline{C}_{A|R}$ where P' is a polynomial algebra over R. Then $P'\otimes_R P \to X\otimes_R P$ is a surjective arrow in $\underline{C}_{A\otimes_R P|R}$, and $P'\otimes_R P$ is again a polynomial algebra over R. Since P is flat over R, it follows from 3.5(i) that $\check{H}^\cdot(X|R, \check{f}G) = H^\cdot(\{P' \to X\}, \check{f}G) = H(\{P'\otimes_R P \to X\otimes_R P\}, G) = \check{H}^\cdot(X\otimes_R P|R, G)$ for every $G \in \mathrm{ob}(\check{\underline{C}}_{A\otimes_R P|R})$. It follows that $\widetilde{f} : \widetilde{\underline{C}}_{A\otimes_R P|R} \to \underline{C}_{A|R}$ sends acyclic ones to acyclic ones. On the other hand, f sends polynomial algebras over R to polynomial algebras over R, and hence $\widetilde{f} : \widetilde{\underline{C}}_{A\otimes_R P|R} \to \widetilde{\underline{C}}_{A|R}$ is an exact functor by 3.2(c). It follows that $H^\cdot(A\otimes_R P|R, F) \to H^\cdot(A|R, \widetilde{f}F)$ is an isomorphism for every $F \in \mathrm{ob}(\widetilde{\underline{C}}_{A\otimes_R P|R})$. Now for each $X \in \mathrm{ob}(\underline{C}_{A|R})$, we have canonical maps

$$(\widetilde{f}F)\ (X) = F(X\otimes_R P) \to F(X)\oplus F(P) \quad ,$$

and hence a canonical map $\widetilde{f}F \to R\oplus F(P)$ where $F(P)$ denotes a constant sheaf (and F on the right hand side denotes, strictly speaking, the restriction of F on $\underline{C}_{A|R}$). If F is an additive sheaf, then $(\widetilde{f}F)\ (X) = F(X\otimes_R P) \xrightarrow{\sim} F(X)\oplus F(P)$ is an isomorphism for every $X \in \mathrm{ob}(\underline{C}_{A|R})$ and hence $\widetilde{f}F \xrightarrow{\sim} R\oplus F(P)$ is an isomorphism. Therefore

$$H^n(A|R, \tilde{f}F) \xrightarrow{\sim} H^n(A|R, F\oplus F(P)) = H^n(A|R, F)$$

for all $n > 0$ since $F(P)$, being a constant sheaf, is flask. It follows that $H^n(A\otimes_R P|R, F) \to H^n(A|R, F)$ is an isomorphism for all $n > 0$, provided F is an additive sheaf on $\underline{C}_{A\otimes_R P|R}$.

(c) (communicated from Rinehart) Consider the forgetful functor $\beta : \underline{C}_{A|R} \to \underline{C}_{A|S}$. We have a spectral sequence

$$E^{p,q} = H^p(A|R, \beta^{\#}\underline{H}^q_{A|S}(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(A|S, F)$$

where $\beta^{\#} = \mathfrak{a}_{A|R} \circ \check{\beta}$, $\mathfrak{a}_{A|R} : \check{\underline{C}}_{A|R} \to \tilde{\underline{C}}_{A|R}$ is "associated-sheaf" functor. Now let F be an additive sheaf. We claim that $\beta^{\#}\underline{H}^q_{A|S}(F)$ is a constant sheaf for all $q > 0$. Indeed, if P is a polynomial algebra over R , then $P = R\otimes_S P'$ for a polynomial algebra P' over S and hence

$$[\beta^{\#}\underline{H}^q_{A|S}(F)](P) = H^q(P|S, F) = H^q(R\otimes_S P'|S, F) \to H^q(R|S, F)$$

is an isomorphism for all $q > 0$ by 3.7(b), and surjective for $q = 0$. It follows from 3.3(c) that the canonical map $\beta^{\#}\underline{H}^q_{A|S}(F) \to H^q(R|S, F)$ = constant sheaf is an isomorphism for all $q > 0$, and is surjective for $q = 0$. It follows that $E^{p,q} = H^p(A|R, \beta^{\#}\underline{H}^q_{A|S}(F)) = 0$ for all $p, q > 0$, and hence the above spectral sequence yields the exact sequence

$$(*) \quad 0 \to E^{1,0} \to H^1 \to E^{0,1} \to E^{2,0} \to H^2 \to E^{0,2} \to E^{3,0} \to H^3 \to \cdots$$

where we note that $E^{0,q} = [\beta^{\#}\underline{H}^q_{A|S}(F)](A) \xrightarrow{\sim} H^q(R|S, F)$ for all $q > 0$ and $E^{p,0} = H^p(A|R, \tilde{\beta}F)$. On the other hand, the exact sequence $0 \to F_R \to \tilde{\beta}F \to F(R) \to 0$ gives us the exact sequence

$$(**) \quad \begin{array}{c} 0 \to H^0(A|R,F_R) \to H^0(A|R,\tilde{\beta}F) \to H^0(A|R,F(R)) \to H^1(A|R,F_R) \to H^1(A|R,\tilde{\beta}F) \to 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \| \\ \qquad\qquad\qquad\quad H^0(A|S,F) \qquad\qquad H^0(R|S,F) \end{array}$$

The exact sequences (*) and (**) combined gives the desired exact sequence.

Corollary 3.8.

(a) *If* A, B *are* R-*algebras such that* $\mathrm{Tor}_i^R(A, B) = 0$ *for all* $0 < i \le n$, *then for any additive sheaf* $F \in \mathrm{ob}(\widetilde{\underline{C}}_{A\otimes_R B|R})$, *the canonical map*

$$H^i(A\otimes_R B|R, F) \to H^i(A|R, F) \oplus H^i(B|R, F)$$

is an isomorphism for all $i \le n$.

(b) *Let* A *be an* R-*algebra such that* $\mathrm{Tor}_i^R(A, A) = 0$ *for all* $i > 0$. *If* $A\otimes_R A \to A$ *is an isomorphism, then for any additive sheaf* $F \in \mathrm{ob}(\widetilde{\underline{C}}_{A|R})$, *we have* $H^i(A|R, F) = 0$ *for all* i.

Proof:

(a) Let $F \in \mathrm{ob}(\widetilde{\underline{C}}_{A\otimes_R B|R})$ be additive. By 3.7(c), the ring homomorphisms $R \to A \to A\otimes_R B$ gives us the exact sequence

$$(*) \qquad \ldots \to H^i(A\otimes_R B\ A, F_A) \to H^i(A\otimes_R B\ R, F) \to H^i(A|R, F) \to \ldots.$$

consider now the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
H^i(A\otimes_R B|A, F_A) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(A\otimes_R B|R, F) \arrow[d] \\
H^i(B|R, \widetilde{A}F_A) \arrow[r, "\approx"] & H^i(B|R, F)
\end{tikzcd}$$

where the functor $A : \underline{C}_{B|R} \to \underline{C}_{A\otimes_R B|A}$ is given by $X \longmapsto A\otimes_R X$, and the map $H^i(B|R, \widetilde{A}F_A) \to H^i(B|R, F)$ is induced from the map $\widetilde{A}F_A \to F$, which is an isomorphism since F is additive. Note that the commutativity of the above diagram, because of its functorial nature, is reduced to the case $i = 0$.

If $\mathrm{Tor}_i^R(A, B) = 0$ for all $0 < i \le n$, then $H^i(A\otimes_R B|A, F_A) \to H^i(B|R, \widetilde{A}F_A)$ is an isomorphism for all $i \le n$ by 3.7(a), and hence the composite map

$$H^i(A\otimes_R B|A, F_A) \to H^i(A\otimes_R B|R, F) \to H^i(B|R, F)$$

and (because of the symmetry)

$$H^i(A\otimes_R B|B, F_B) \to H^i(A\otimes_R B|R, F) \to H^i(A|R, F)$$

are isomorphisms for all $i \leq n$. This implies that the exact sequence (*) breaks up to short split-exact sequences

$$0 \to H^i(A\otimes_R B|A, F_A) \to H^i(A\otimes_R B|R, F) \to H^i(A|R, F) \to 0$$

for all $i \leq n$, and that

$$H^i(A\otimes_R B|R, F) \to H^i(A|R, F) \oplus H^i(B|R, F)$$

is an isomorphism for all $i \leq n$.

(b) Since $\mathrm{Tor}_i^R(A,A) = 0$ for all $i > 0$, it follows from 3.8(a) that

$$H^i(A\otimes_R A|R, F) \to H^i(A|R, F) \oplus H^i(A|R, F)$$

is an isomorphism for all i . On the other hand, $A\otimes_R A \to A$ is an isomorphism by hypothesis and hence $H^i(A|R, F) \to H^i(A\otimes_R A|R, F)$ is an isomorphism for all i . This means that the diagonal map $H^i(A|R, F) \to H^i(A|R, F) \oplus H^i(A|R, F)$ is an isomorphism for all i i.e., $H^i(A|R, F) = 0$ for all i .

Corollary 3.9: Let S be a multiplicative subset of an R-algebra A . If $F \in \mathrm{ob}\left(\underline{C}^{\sim}_{S^{-1}A|R}\right)$ is additive such that F_A is also additive, then the canonical map

$$H^i(S^{-1}A|R, F) \to H^i(A|R, F)$$

is an isomorphism for all i , where $F_A \in \mathrm{ob}\left(\underline{C}^{\sim}_{S^{-1}A|A}\right)$ is defined by $F_A(X) = \mathrm{Ker}(F(X) \to F(A))$ for all $X \in \mathrm{ob}\left(\underline{C}_{S^{-1}A|A}\right)$.

Proof: Since F is additive, the ring homomorphisms $R \to A \to S^{-1}A$ gives us the exact sequence

$$\ldots\ldots \to H^n(S^{-1}A|A, F_A) \to H^n(S^{-1}A|R, F) \to H^n(A|R, F) \to \ldots\ldots$$

On the other hand, since $S^{-1}A\otimes_A S^{-1}A \to S^{-1}A$ is an isomorphism and F_A is additive by hypothesis, it follows from 3.8(b) that $H^n(S^{-1}A|A, F_A) = 0$ for all n , and hence $H^n(S^{-1}A|R, F) \to H^n(A|R, F)$ is an isomorphism for all n .

Now let A be an R-algebra. An A-module M defines an additive sheaf $\mathrm{Der}_R(-, M) \in \mathrm{ob}(\underline{\tilde{C}}_{A|R})$ by $X \to \mathrm{Der}_R(X, M)$. We now make the following definition:

Definition 3.10: Let A be an R-algebra. For each A-module M we set

$$D^i(A|R, M) = H^i(A|R, \mathrm{Der}_R(-, M)) \quad .$$

We want to make an explicit computation of low-dimensional ones i.e., $D^i(A|R, M)$ for $i = 1, 2$: Choose a surjective arrow $P \to A$ in $\underline{C}_{A|R}$ where P is a polynomial algebra over R , and let $0 \to I \to P \to A \to 0$ be exact. Then

Lemma 3.10:

$$D^1(A|R, M) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Der}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_P(I, M))$$
$$D^2(A|R, M) = H^1(A|R, \underline{H}^1_{A|R}(\mathrm{Der}_R(-, M)))$$

Proof: Consider the simplicial algebra

$$(*) \qquad \cdots\cdots\cdots\; P_A^{(2)} \rightrightarrows P_A^{(1)} \rightrightarrows P_A^{(0)}$$

where $P_A^{(n)} = \overbrace{P\times_A\cdots\times_A P}^{n+1}$. For each n we have the exact sequence

$$0 \to I^{(n)} \to P_A^{(n)} \to A \to 0$$

where $I^{(n)} = \overbrace{I\times I\times\cdots\times I}^{n+1}$, and it is easy to see that

(a):

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\bar{I}^{(n)}/\Delta(\bar{I}), M) \to \mathrm{Der}_R(P_A^{(n)}, M) \xrightarrow{\mathrm{Der}(\Delta,\ M)} \mathrm{Der}_R(P, M) \to 0$$

is exact for all n , where $\bar{I} = I/I^2$ and Δ stands for the diagonal map. We also note the exact sequence

(b):

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\bar{I}^{(n)}/\Delta(\bar{I}), M) \to \mathrm{Hom}_A(\bar{I}^{(n)}, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\Delta,\ M)} \mathrm{Hom}_A(I, M) \to 0$$

The exact sequences (a) and (b) yield the respective exact sequences of simplicial A-modules. Since $\{I \to 0\}$, $\{I \to I\}$ admits sections, we have

$$H^i(\{I \to 0\}, \mathrm{Hom}_A(-, M)) = H^i(\{I \to I\}, \mathrm{Hom}_A(-, M)) = 0$$

for all $i > 0$, and it follows readily that

$$\begin{cases} 0 \to \mathrm{Der}_R(A, M) \to \mathrm{Der}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(\bar{I}, M) \to H^1(\{P \to A\}, \mathrm{Der}_R(-, M)) \to 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{is exact} \\ H^i(\{P \to A\}, \mathrm{Der}_R(-, M)) = 0 \quad \text{for all } i > 1 \end{cases}$$

It follows from 3.1(b) that

$$\begin{aligned} D^1(A|R, M) &= \check{H}^1(A|R, \mathrm{Der}_R(-, M)) = H^1(\{P \to A\}, \mathrm{Der}_R(-, M)) \\ &= \mathrm{Coker}(\mathrm{Der}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(\bar{I}, M)) \\ &= \mathrm{Coker}(\mathrm{Der}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_P(I, M)) , \\ D^2(A|R, M) &= H^1(A|R, \underline{H}^1_{A|R}(\mathrm{Der}_R(-, M))) . \end{aligned}$$

Now choose a free P-module F and a P-linear map $F \xrightarrow{\gamma} P$ such that $\gamma(F) = I$. Associated to P-linear map $\gamma : F \to P$, there is a Koszul complex, which is simply denoted, by abuse of notation, by K_I.

Lemma 3.11: $D^2(A|R, M) \simeq \mathrm{Coker}(H^1(K_I, M) \to \mathrm{Hom}_A(H_1(K^I), M))$.

Proof: We have

$$\begin{aligned} D^2(A|R, M) &= H^1(A|R, H^1_{A|R}(\mathrm{Der}_R(-, M))) \\ &= \mathrm{Ker}(H^1(P_A^{(1)}|R, M) \rightrightarrows H^1(P_A^{(2)}|R, M)) \end{aligned}$$

since $[\underline{H}^1_{A|R}(\mathrm{Der}_R(-, M))](P_A^0) = [\underline{H}^1_{A|R}(\mathrm{Der}_R(-, M))](P) = 0$.

Let $0 \to K \to F \xrightarrow{\gamma} I \to 0$ be exact. If we set $P[F]$ to be the symmetric algebra over P generated by F, then $P[F]$ and $P[F]\otimes P[F]$ are polynomial algebras over R and we obtain the surjective arrows

$$P[F] \to P_A^{(1)} = P \times_A P \qquad \text{given by} \qquad X \to (0, \gamma(X))$$

$$P[F] \otimes_P P[F] \to P_A^{(2)} = P \times_A P \times_A P \qquad X\otimes 1 \to (0, \gamma(X), 0),\ 1\otimes X \to (0, 0, \gamma(X))$$

where $X \in F$. If we set $J = \mathrm{Ker}(P[F] \to P_A^{(1)})$ and $J' = \mathrm{Ker}(P[F]\otimes_P P[F] \to P_A^{(2)})$, then

$$J = (F) \cap (F_\gamma) = (K) + (F\cdot F_\gamma)$$
$$J' = (F\otimes 1 + 1\otimes F) \cap (F_\gamma\otimes 1 + 1\otimes F) \cap (F\otimes 1 + 1\otimes F_\gamma)$$
$$= (K\otimes 1 + 1\otimes K) + (F\cdot F_\gamma\otimes 1 + 1\otimes F\cdot F_\gamma) + (F\otimes F)$$

where F_γ = the ideal generated by $\{X - \gamma(X) \mid X \in F\}$. Now $\pi_i : P_A^{(2)} \to P_A^{(1)}$ $i = 0, 1, 2$ can be lifted to $\hat{\pi}_i : P[F]\otimes_P P[F] \to P[F]$ where, for each $X \in F$,

$$\pi_0 = \begin{cases} X\otimes 1 \to \gamma(X) - X \\ 1\otimes X \to X \end{cases} \qquad \pi_1 = \begin{cases} X\otimes 1 \to 0 \\ 1\otimes X \to X \end{cases} \qquad \pi_2 = \begin{cases} X\otimes 1 \to X \\ 1\otimes X \to 0 \end{cases} .$$

A trivial computation shows that $\pi_0 - \pi_1 + \pi_2$ sends $K\otimes 1 + 1\otimes K + 1\otimes F\cdot F_\gamma$ to zero, whereas it sends $(F\cdot F_\gamma\otimes 1 + F\otimes F)$ onto $(F\cdot F_\gamma)$. Now for any $D \in \mathrm{Der}_R(P[F]\otimes_P P[F], M)$, $D(F\cdot F_\gamma\otimes 1 + F\otimes F) = 0$ since $I\cdot M = 0$, and consequently

$$D^2(A|R, M) = \mathrm{Ker}(D^1(P_A^{(1)}|R, M) \rightrightarrows D^1(P_A^{(2)}|R, M))$$
$$= \{[f] \in D^1(P_A^{(1)}|R, M) \mid f(F\cdot F_\gamma) = 0\}$$
$$= \mathrm{Coker}(\mathrm{Der}_R(P[F], M) \to \mathrm{Hom}_{P[F]}((F) \cap (F_\gamma)/(F\cdot F_\gamma), M))$$
$$= \mathrm{Coker}(\mathrm{Der}_P(P[F], M) \to \mathrm{Hom}_{P[F]}((F) \cap (F_\gamma)/(F)\cdot(F_\gamma), M)) .$$

Now
$$0 \to (F) \to P[F] \xrightarrow{P[0]} P \to 0$$
$$0 \to (F_\gamma) \to P[F] \xrightarrow{P[\gamma]} P \to 0 .$$

are exact and hence $(F) \cap (F_\gamma)/(F)\cdot(F_\gamma) = \mathrm{Tor}_1^{P[F]}(P, P_\gamma) = H_1(K_I)$ where K_I is the Koszul complex associated to the P-linear map $F \xrightarrow{\gamma} I(\subset P)$. We thus have

$$D^2(A|R, M) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_P(F, M) \to \mathrm{Hom}_P(H_1(K_I), M))$$
$$= \mathrm{Coker}(H^1(K_I, M) \to \mathrm{Hom}_A(H^1(K_I), M)) .$$

We can now state all the basic facts needed for our purpose, summarizing the various results we have already established.

Theorem 3.12.

(1) If $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ is an exact sequence of A-modules, then

$$0 \to D^0(A|R, M') \to D^0(A|R, M) \to D^0(A|R, M'') \to D^1(A|R, M') \to$$
$$D^1(A|R, M) \to D^1(A|R, M'') \to \ldots\ldots\ldots \to D^n(A|R, M') \to$$
$$D^n(A|R, M) \to D^n(A|R, M'') \to \ldots$$

is exact.

(2) Let $S \to R \to A$ be ring homomorphisms. Then for any A-module M we have the exact sequence

$$0 \to D^0(A\ R, M) \to D^0(A\ S, M) \to D^0(R\ S, M) \to D^1(A\ R, M) \to$$
$$D^1(A\ S, M) \to D^1(R\ S, M) \to \ldots\ldots\ldots \to D^n(A\ R, M) \to$$
$$D^n(A\ S, M) \to D^n(R\ S, M) \to \ldots.$$

(3) Let A, S be R-algebras such that $\mathrm{Tor}_i^R(A, S) = 0$ for all $i > 0$. Then for any $A \otimes_R S$-module M, the canonical map $D^i(A \otimes_R S|S, M) \to D^i(A|R, M)$ is an isomorphism for all i. In particular, if A is R-flat we have

$$D^i(A \otimes S|S, M) \simeq D^i(A|R, M)$$

for all i and for all R-algebras S.

(4) Let S be a multiplicative subset of A. Then for any $S^{-1}A$-module N, the canonical map

$$D^i(S^{-1}A|R, N) \to D^i(A|R, N)$$

is an isomorphism for all i. Consequently, for any A-module M we have the canonical isomorphism

$$D^i(S^{-1}A|R, S^{-1}M) \simeq S^{-1}D^i(A|R, M)$$

for all i.

(5) If A, B are R-algebras such that $\mathrm{Tor}_i^R(A, B) = 0$ for all $0 < i \leq n$, then for any $A \otimes_R B$-module M, the canonical map

$$D^i(A \otimes_R B|R, M) \to D^i(A|R, M) \oplus D^i(B|R, M)$$

is an isomorphism for all $i \leq n$. In particular, if $\mathrm{Tor}_i^R(A, A) = 0$ for all

$i > 0$ and

$$\Delta : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A) \underset{\mathrm{Spec}(R)}{\times} \mathrm{Spec}(A)$$

is an open immersion (for instance A/R etale), then $D^i(A|R, M) = 0$ for all $i > 0$ and for all A-modules M.

(6) Let A be an R-algebra of essentially finite type over R, where R is noetherian, and let E be a flat A-module. Then we have a canonical isomorphism

$$E \underset{A}{\otimes} D^i(A|R, M) \xrightarrow{\sim} D^i(A|R, E \underset{A}{\otimes} M)$$

for all $i \geq 0$ and for all A-modules M.

(7) If R is noetherian and A is an R-algebra of essentially finite type, then $D^i(A|R, M)$ is A-module of finite type for all i, provided M is an A-module of finite type.

(8) Let P be a polynomial algebra over R and let $0 \to I \to P \to A \to 0$ be exact. Then $D^0(A|R, M) = \mathrm{Der}_R(A, M)$,

$$\begin{aligned} D^1(A|R, M) &= \mathrm{Coker}(\mathrm{Der}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(I/I^2, M)) \\ &= \text{the set of isomorphism classes of} \\ &\quad\ R\text{-algebra extensions of } A \text{ by } M, \\ D^2(A|R, M) &= \mathrm{Coker}(H^1(K_I, M) \to \mathrm{Hom}_A(H_1(K_I), M)) . \end{aligned}$$

Proof:

(1) If $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ is an exact sequence of A-modules, then for any polynomial algebra P over R, $0 \to \mathrm{Der}_R(P, M') \to \mathrm{Der}_R(P, M) \to \mathrm{Der}_R(P, M'') \to 0$ is exact and hence $0 \to \mathrm{Der}_R(-, M') \to \mathrm{Der}_R(-, M) \to \mathrm{Der}_R(-, M'') \to 0$ is an exact sequence of sheaves by 3.3(c).

(2) $\mathrm{Der}_S(-, M)$ is an additive sheaf on $\underline{C}_{A|S}$, and $\mathrm{Der}_R(B, M) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Der}_S(B, M) \to \mathrm{Der}_S(R, M))$ for every $B \in \mathrm{ob}(\underline{C}_{A|R})$. Therefore our assertion follows from 3.7(c).

(3) Let $S : \underline{C}_{A|R} \to \underline{C}_{A\otimes_R S|S}$ be the functor given by $X \longmapsto X \underset{R}{\otimes} S$. Then $\tilde{S}\mathrm{Der}_S(-, M) = \mathrm{Der}_R(-, M)$ and hence our assertion follows from 3.7(a).

(4) Follows from 3.9. Indeed, $F = \mathrm{Der}_R(-, N)$ is an additive sheaf on $\underline{C}_{S^{-1}A|R}$, and $F_A \in \mathrm{ob}\left(\underline{C}^{\sim}_{S^{-1}A|A}\right)$ is also additive since $F_A(X) = \mathrm{Ker}(F(X) \to F(A)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Der}_R(X, N) \to \mathrm{Der}_R(A, N)) = \mathrm{Der}_A(X, N)$ i.e., $F_A = \mathrm{Der}_A(-, N)$.

(5) The first assertion follows from 3.8(a). Now assume that $\mathrm{Tor}_i^R(A, A) = 0$ for all $i > 0$ and that

$$\Delta : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A) \underset{\mathrm{Spec}(R)}{\times} \mathrm{Spec}(A)$$

is an open immersion i.e., $(A \otimes_R A)_{\varphi^{-1}(\underline{m})} \to A_{\underline{m}}$ is an isomorphism for all maximal ideals $\underline{m}$ of A , where $\varphi : A \otimes_R A \to A$ is the multiplication map. Then the first assertion combined with 3.12(4) entails that the diagonal map

$$\Delta_{\underline{m}} : D^i(A|R, M)_{\underline{m}} \to D^i(A|R, M)_{\underline{m}} \oplus D^i(A|R, M)_{\underline{m}}$$

is an isomorphism for every maximal ideal $\underline{m}$ of A and hence

$$\Delta : D^i(A|R, M) \to D^i(A|R, M) \oplus D^i(A|R, M)$$

is an isomorphism, which entails that $D^i(A|R, M) = 0$ for all i .

(6) In view of 3.12(4), we may assume that A is an R-algebra of finite type. Now consider the map

$$E \otimes_A \mathrm{Der}_R(-, M) \to \mathrm{Der}_R(-, E \otimes_A M)$$

in $\underline{C}^{\sim}_{A|R}$. Since E is A-flat, we have an isomorphism

$$E \otimes_A \mathrm{Der}_R(B, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_R(B, E \otimes_A M)$$

whenever $B \in \mathrm{ob}(\underline{C}_{A|R})$ is of finite type over R . It follows from 3.3(b) that

$$D^i(A|R, E \otimes_A \mathrm{Der}_R(-, M)) \to D^i(A|R, E \otimes_A M)$$

is an isomorphism. On the other hand, the functor $E \otimes_A - : (A\text{-mod}) \to (A\text{-mod})$ is exact, and therefore we have

$$E \otimes_A D^i(A|R, M) = D^i(A|R, E \otimes_A \mathrm{Der}_R(-, M)) ,$$

and hence our assertion.

(7) follows from 3.3(a).

(8) In view of 3.10 and 3.11, it suffices to show that $\mathrm{Coker}(\mathrm{Der}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(I/I^2, M)) = \mathrm{Exalcomm}(A|R, M)$, where $\mathrm{Exalcomm}(A|R, M)$ denotes the set of isomorphism classes of R-algebra extensions of A by M . Let $0 \to M \to A' \to A \to 0$ be an R-algebra extension of A by M . Since P is a polynomial algebra over R , we obtain a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

where $I \to M$ is uniquely determined by the extensions A' up to $\mathrm{Der}_R(P, M)$. We thus obtain a map

$$\Phi : \mathrm{Exalcomm}(A|R, M) \to \mathrm{Coker}(\mathrm{Der}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(I/I^2, M)) .$$

Conversely a P-linear map $I \to M$ yields an extension by push-out

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Two P-linear maps $I \rightrightarrows M$ which differ by $\mathrm{Der}_R(P, M)$ is trivially seen to yield isomorphic extensions and therefore we obtain a map

$$\Psi : \mathrm{Coker}(\mathrm{Der}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(I/I^2, M)) \to \mathrm{Exalcomm}(A|R, M) .$$

It is straightforward to verify that Φ, Ψ are inverse process to each other.

Corollary 3.13. (a) R-algebra A is formally smooth over R if and only if $D^1(A|R, M) = 0$ for every A-module M .

(b) Let R be noetherian and A an R-algebra of finite type. Then A is a relative complete-intersection over R if and only if $D^2(A|R, M) = 0$ for every A-module M .

(c) Let R be noetherian and A an R-algebra of finite type. Then for any multiplicative subset S in A , we have a canonical isomorphism $D^i(S^{-1}A|R, S^{-1}M) \xrightarrow{\sim} S^{-1}D^i(A|R, M)$ for all $i \geq 0$.

(d) <u>Let</u> R <u>be noetherian and</u> A <u>a local</u> R-<u>algebra of essentially finite type. We denote by</u> $\hat{A}$ <u>the</u> m-<u>adic completion of</u> A <u>where</u> $\underline{m}$ = <u>the maximal ideal of</u> A . <u>Then for any</u> A-<u>module</u> E <u>of finite type we have a canonical isomorphism</u>

$$D^1(\hat{A}|R, \hat{A} \otimes_A E) \cong \hat{A} \otimes_A D^1(A|R, E) .$$

<u>Proof</u>: (a) follows immediately from $D^1(A|R, M) = \mathrm{Exalcomm}(A|R, M)$.

(b) Let P be a polynomial algebra over R in a finite number of variables and let $0 \to I \to P \to A \to 0$ be exact. Localizing if necessary, we may assume that I is generated by a P-regular sequence which would imply that $H_1(K_I) = 0$ and therefore $D^2(A|R, M) = \mathrm{Coker}(H^1(K_I, M) \to \mathrm{Hom}_A(H_1(K_I), M)) = 0$. Conversely assume that $D^2(A|R, M) = 0$ for every A-module M .

Let $0 \to I \to P \to A \to 0$ be exact where P is a polynomial algebra over R in a finite number of variables. We have

$$0 = D^2(A|R, M) = \mathrm{Coker}(H^1(K_I, M) \to \mathrm{Hom}_A(H_1(K_I), M))$$

i.e., $H^1(K_I, M) \to \mathrm{Hom}_A(H_1(K_I), M)$ is surjective for all A-module M . Choose an exact sequence $0 \to K \to F \to I \to 0$ where F is a free P-module of finite type. We note that $H_1(K_I) = K/K_0$ where $K_0 = \mathrm{Im}(\overset{2}{\wedge} F \to \overset{1}{\wedge} F)$. The fact that $D^2(A|R, H_1(K_I)) = 0$ i.e.,

$$H^1(K_I, H_1(K_I)) \to \mathrm{Hom}_A(H_1(K_I), H_1(K_I)) \text{ is surjective}$$

entails that $0 \to K/K_0 \to F/IF \to I/I^2 \to 0$ is exact and splits as A-modules and in particular I/I^2 is projective as A-module. Therefore, localizing A if necessary, we may assume that I/I^2 is A-free, and that $F/IF \to I/I^2$ is an isomorphism. Then the fact that $0 \to K/K_0 \to F/IF \to I/I^2 \to 0$ is exact and splits as A-modules entails that $H_1(K_I) = K/K_0 = 0$. This means that I is generated by a P-regular sequence i.e., A is a relative complete intersection over R .

(c) follows immediately from 3.12(4) and (6).

(d) Firstly it follows from 3.12(6) that

$$D^i(A\ R, \hat{A} \otimes_A E) \cong \hat{A} \otimes_A D^i(A|R, E)$$

is an isomorphism for all i , and therefore it suffices to show that

$D^1(\hat{A}|R, \hat{A}\otimes_A E) \to D^1(A|R, \hat{A}\otimes_A E)$ is an isomorphism. Our proof is based on the description of D^1 in terms of algebra extensions. Let $0 \to \hat{A}\otimes_A E \to A' \xrightarrow{\varphi} A \to 0$ be an R-algebra extension. The fact that $\hat{A}\otimes_A E$ is an $\hat{A}$-module of finite type entails readily that A' is a local R-algebra, complete with respect to $\underline{m}'$-adic topology where $\underline{m}'$ = the maximal ideal of A'. Therefore if there is an R-algebra map $\psi : A \to A'$ such that $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_A$, then ψ extends uniquely to $\hat{\psi} : \hat{A} \to A'$ such that $\varphi \circ \hat{\psi} = \mathrm{id}_{\hat{A}}$. This proves that

$$D^1(\hat{A}|R, \hat{A}\otimes_A E) \to D^1(A|R, \hat{A}\otimes_A E)$$

is injective. Now let $0 \to \hat{A}\otimes_A E \to B \xrightarrow{\varphi} A \to 0$ be an R-algebra extension. Firstly we claim that the topology on $\hat{E} = \hat{A}\otimes_A E$ induced from $\underline{m}_B$-adic topology on B coincides with the topology on $\hat{E}$ as $\hat{A}$-module. Indeed, since A is essentially of finite type over R, one can find a subalgebra B_0 of B such that B_0 is a local R-algebra of essentially finite type over R and that $\varphi(B_0) = A$. Set $E_0 = E \cap B_0$ and denote by $\underline{m}_B$, $\underline{m}_0$, $\underline{m}$ the maximal ideals of B, B_0, A respectively. Then $\underline{m}_B = \underline{m}_0 + \hat{E}$ and hence $\underline{m}_B^{n+1} = \underline{m}_0^{n+1} + \underline{m}^n\hat{E}$ for all n. Since B_0 is noetherian, there exists an integer $r > 0$ by Artin-Rees Theorem such that

$$\begin{aligned} \hat{E} \cap \underline{m}_B^{n+1} &= \underline{m}^n\hat{E} + \hat{E} \cap \underline{m}_0^{n+1} = \underline{m}^n\hat{E} + E_0 \cap \underline{m}_0^{n+1} \\ &= \underline{m}^n\hat{E} + \underline{m}^{n+1-r}(E_0 \cap \underline{m}_0^r) \subset \underline{m}^{n+1-r}\hat{E} \end{aligned}$$

for all $n \geq r$, which proves our assertion about the two topologies on E. In particular $\hat{E} = \hat{A}\otimes_A E$ is complete with respect to the topology induced from $\underline{m}_B$-adic topology on B, and hence we obtain the exact commutative diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \hat{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \hat{E} \arrow[r] & \hat{B} \arrow[r] & \hat{A} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

where $\hat{B}$ stands for $\underline{m}_B$-adic completion of B. This proves that D^1
$D^1(\hat{A}|R, \hat{E}) \to D^1(A|R, \hat{E})$ is surjective and hence we are done.

Corollary 3.14. Let R be noetherian and A an R-algebra of finite type, smooth everywhere except at one closed point $x \in \mathrm{Spec}(A)$. We then have isomorphisms

$$D^1(A|R,\ A) \simeq D^1(A_x|R,\ A_x) \simeq D^1(\hat{A}_x|R,\ \hat{A}_x)\ .$$

Proof: Since A is smooth over R except at $x \in \mathrm{Spec}(A)$, $D^1(A|R, A)$ is an A-module of finite type with its support on the set $\{x\}$, and therefore we have

$$D^1(A|R,\ A) = D^1(A|R,\ A)_x = \widehat{D^1(A|R,\ A)_x}\ .$$

Therefore our assertion follows from 3.13.

Remark 3.15. Let R be topological ring and A a topological R-algebra. We then define, for any A-module M,

$$D^i_{top}(A|R,\ E) = \varinjlim_{\alpha} D^i(A_\alpha|R_\alpha,\ A_\alpha \otimes_\alpha E)$$

where $A_\alpha = A/J_\alpha$, $R_\alpha = R/I_\alpha$, and J_α, I_α are both open in A, R respectively. Then A is formally smooth topological R-algebra means that $D^1_{top}(A|R, E) = 0$ for every A-module E.

Now let X be a scheme over a ring R and $\underline{E}$ a quasi-coherent X-module. We then define the sheaves $\underline{D}^i_{X|R}(\underline{E}) = \underline{D}^i(X|R,\ \underline{E})$ on X via presheaves on X given by

$$[\underline{D}^i_{X|R}(\underline{E})](U) = D^i(\Gamma(U,\ \underline{O}_X)|R,\ \Gamma(U,\ \underline{E}))$$

for every affine open set $U \subset X$. If R is noetherian and X is of finite type over R, then the property 3.13(a) shows that $\underline{D}^i_{X|R}(\underline{E})$ can actually be constructed canonically, as a quasi-coherent X-module.

In case when there is no possible confusion we shall abreviate by setting $\underline{D}^i_{X|R} = \underline{D}^i_{X|R}(\underline{O}_X)$. All the statements of 3.13 can now be translated in terms of these quasi-coherent sheaves $\underline{D}^i_{X|R}(\underline{E})$, which we leave to the readers. We list below a few properties which is most relevant to our purpose.

Corollary 3.15. Let R be noetherian and X an R-scheme of finite type. Then

(a) For any coherent X-module $\underline{E}$, $\underline{D}^i_{X|R}(\underline{E})$ is again a coherent X-module for all i, and furthermore $\operatorname{Supp} \underline{D}^i_{X|R}(\underline{E}) \subset X^{\mathrm{Sing}}$ for all $i > 0$ where $X^{\mathrm{Sing}} = \{x \in X \mid X$ is non-smooth over R at the point $x \in X\}$.

(b) If X is flat over R, then for any R-algebra S, we have the canonical isomorphism

$$\underline{D}^i_{X\otimes_R S|S}(\underline{E}) \xrightarrow{\sim} \underline{D}^i_{X|R}(\underline{E})$$

for all i .

(c) If X is a relative complete intersection over R, then for every surjective ring homomorphism $S \to R$ we have the exact sequence

$$0 \to \underline{D}^1_{X|R}(\underline{E}) \to \underline{D}^1_{X|S}(\underline{E}) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(I/I^2\otimes_R \underline{O}_X, \underline{E}) \to 0$$

where $I = \operatorname{Ker}(S \to R)$. If, furthermore, R is local with the residue field k and X is R-flat, then we have the exact sequence

$$0 \to \underline{D}^1_{X_0|h}(\underline{O}_{X_0}) \to \underline{D}^1_{X|S}(\underline{O}_{X_0}) \to D^1(R|S,\ k)\otimes_k \underline{O}_{X_0} \to 0$$

where $X_0 = X\otimes_R k$.

Proof: (a) Follows from 3.12(6) and (8) whereas (b) follows from 3.12(3).

(c) Since X is a relative complete-intersection over R, we have $\underline{D}^i_{X|R}(\underline{E}) = 0$ for all $i \geq 2$ by 3.12(10) and hence

$$0 \to \underline{D}^0_{X|R}(\underline{E}) \to \underline{D}^0_{X|S}(\underline{E}) \to \underline{D}^0_{R|S}(\underline{E}) \to \underline{D}^1_{X|R}(\underline{E}) \to \underline{D}^1_{X|S}(\underline{E}) \to \underline{D}^1_{R|S}(\underline{E}) \to 0$$

is exact by 3.12(2), where $\underline{D}^i_{R|S}(\underline{E})$ are quasi-coherent sheaves of X defined by

$$[\underline{D}^i_{R|S}(\underline{E})](U) = D^i(R|S,\ \underline{E}(U))$$

for every affine open subset $U \subset X$. In particular, $\underline{D}^0_{R|S}(\underline{E}) = 0$ since $S \to R$ is surjective, and

$$\underline{D}^1_{R|S}(\underline{E}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_X}(I/I^2\otimes_R \underline{O}_X, \underline{E})$$

by 3.12(7), and hence the first exact sequence. If X is R-flat, we have

$\underline{D}^i_{X_0|k}(\underline{E}) \xrightarrow{\sim} \underline{D}^i_{X|R}(\underline{E})$ for all i and for all quasi-coherent X_0-module $\underline{E}$ and in particular

$$\underline{D}^1_{X_0|k}(\underline{O}_{X_0}) \xrightarrow{\sim} \underline{D}^1_{X|R}(\underline{O}_{X_0})$$

from which the second exact sequence follows.

Remark 3.16: The quasi-coherent sheaves $\underline{D}^i_{X|R}(\underline{E})$ we have defined should appear as $E_2^{0,i}$ of a spectral sequence relating the local ones and the global ones. L. Illusie has obtained such a theory (Lecture Notes in Mathematics 239). His method is via "homotopical algebra" generalizing the methods of M. Andre and D. Quillen rather than "cohomological algebra" . It seems that the approach we have taken here can be globalized via Grothendieck cohomology on the category of schemes with an appropriate topology generalizing the one on the affine category.

4. Formal moduli of deformations

One amongst the nice cofibered categories in which the isomorphism classes of objects are usually not prorepresentable, but nevertheless admit a formal versal object is the cofibered category of deformations. We now come back to the situations and notations of paragraph 1. Thus, throughout the section, Λ is a fixed complete local noetherian ring with the residue field k , and $\underline{C}_\Lambda$ is the category of artinian local Λ-algebras with the same residue field k .

Let X_0 be a fixed scheme over the field k . By an (infinitesimal) deformation of X_0 , we mean a pair (R, X) where $R \in ob(\underline{C}_\Lambda)$ and X is a flat R-scheme together with a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_X} & X \\ \downarrow & & \downarrow \text{flat} \\ \mathrm{Spec}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(R) \end{array}$$

such that the induced morphism $X_0 \to X \times_{\mathrm{spec}(R)} \mathrm{Spec}(k)$ is an isomorphism. We note that, since R is an artinian local ring, $i_X : X_0 \to X$ is necessarily a closed immersion which is a homeomorphism on underlying topological spaces. If (R, X), (R', X') are deformations of X_0 to R, R' respectively, we define an arrow $(R', X') \to (R, X)$ to consist of a map $R' \xrightarrow{\varphi} R$ in $\underline{C}_\Lambda$ and a morphism $\Phi : X \to X'$ of schemes with a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[ddd] & & X' \arrow[ddd] \\
& X_0 \arrow[ul, "i_X"'] \arrow[ur, "i_{X'}"] \arrow[d] & \\
& \mathrm{Spec}(k) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathrm{Spec}(R) \arrow[rr, "\mathrm{Spec}(\varphi)"'] & & \mathrm{Spec}(R')
\end{tikzcd}$$

We thus obtain the category $\underline{M}_{X_0}$ of (infinitesimal) deformations of X_0 in which the objects and the arrows are defined as above. The category $\underline{M}_{X_0}$ is provided with a functor $p : \underline{M}_{X_0} \to \underline{C}_\Lambda$ defined by $(R, X) \to R$. Now let $(R, X) \in \mathrm{ob}(\underline{M}_{X_0})$ and a map $R \xrightarrow{\varphi} S$ in $\underline{C}_\Lambda$ be given. We then obtain a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
X \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(S) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\text{flat}"'] & X \arrow[d, "\text{flat}"] \\
\mathrm{Spec}(S) \arrow[r, "\mathrm{Spec}(\varphi)"'] & \mathrm{Spec}(R)
\end{tikzcd}$$

and φ-arrow $(\varphi, p_1) : (R, X) \to (S, X \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(S))$ is obviously cocartesian in $\underline{M}_{X_0}$. It follows that the category $\underline{M}_{X_0}$ is a cofibered category over $\underline{C}_\Lambda$ via $P : \underline{M}_{X_0} \to \underline{C}_\Lambda$. We observe the following facts:

4.1(a): Let $(1_R, \Phi) : (R, X_1) \to (R, X_2)$ be an arrow in $\underline{M}_{X_0}$ i.e., $\Phi : X_2 \to X_1$ is a morphism over R such that $X_2 \otimes_R k \to X_1 \otimes_R k$ is an isomorphism. Since R is artinian and X_i is R-flat, it follows immediately that Φ is an isomorphism so that $(1_R, \Phi) : (R, X_1) \to (R, X_2)$ is an isomorphism in $\underline{M}_{X_0}$. Consequently, $\underline{M}_{X_0}$ is a cofibered category in groupoids over $\underline{C}_\Lambda$.

4.1(b): Suppose that X_0 is affine, say $X_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$. Then for any object $(R, X) \in \mathrm{ob}(\underline{M}_{X_0})$, X is also affine. Consequently, for any $R \in \mathrm{ob}(\underline{C}_\Lambda)$, the category $\underline{M}_{X_0}(R)$ is canonically equivalent, via the sections, to the category in which an object is a flat algebra A over R together with an R-algebra map $j_A : A \to A_0$ inducing an isomorphism $A \otimes_R k \xrightarrow{\sim} A_0$, and a map $\Phi : A_1 \to A_2$ is an R-algebra map with a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "j_{A_1}"'] & A_2 \arrow[d, "j_{A_2}"] \\ A_0 \arrow[r, equal] & A_0 \end{tikzcd}$$

4.1(c): Consider the cofibered category $\hat{\underline{M}}_{X_0}$ in groupoids over $\hat{\underline{C}}_\Lambda$. By definition, the category $\hat{\underline{M}}_{X_0}(R)$ for any $R \in \mathrm{ob}(\hat{\underline{C}}_\Lambda)$ is canonically equivalent to the category of formal schemes $\mathfrak{X}$, adic over the formal spectrum $\mathrm{Spf}(R)$, such that $\mathfrak{X}_n = \mathfrak{X} \otimes_R R/\underline{m}^{n+1}$ is flat over $R/\underline{m}^{n+1}$ for every $n \geq 0$ (or what amounts to the same, if X_0 is noetherian, such that $\mathfrak{X}$ is flat over $\mathrm{Spf}(R)$) . Consequently, if X_0 is noetherian, $\hat{\underline{M}}_{X_0}$ is canonically $\hat{\underline{C}}_\Lambda$-equivalent to the category of deformations of X_0 over the objects in $\hat{\underline{C}}_\Lambda$, in the sense of formal schemes.

4.1(d): Let $(R, X) \in \mathrm{ob}(\underline{M}_{X_0})$ i.e., we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\quad i_X \quad} & X \\ \downarrow & & \downarrow \text{flat} \\ \mathrm{Spec}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(R) \end{array}$$

such that $X_0 \to X \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(k)$ is an isomorphism. Now let $U_0 \subset X_0$ be a fixed open subscheme of X_0. Since $i_X : X_0 \to X$ is a closed immersion which is a homeomorphism on the underlying topological spaces, we obtain a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{\quad i_X|U_0 \quad} & X|U_0 \\ \downarrow & & \downarrow \text{flat} \\ \mathrm{Spec}(k) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(R) \end{array}$$

such that $U_0 \to (X|U_0) \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(k) = X \otimes_R k|U_0$ is an isomorphism, so that $(R, X|U_0)$ is a deformation of U_0 to R. Furthermore, for any arrow $(\varphi, \Phi) : (R, X) \to (R', X')$ in $\underline{M}_{X_0}$, $(\varphi, \Phi|U_0) : (R, X|U_0) \to (R', X'|U_0)$ is an arrow in $\underline{M}_{U_0}$. Consequently we have the restriction functor $\underline{M}_{X_0} \to \underline{M}_{U_0}$ over $\underline{C}_\Lambda$. One may also consider a localization as well as a formalization at a point. Namely let x_0 be a fixed point in X_0. If $(R, X) \in \mathrm{ob}(\underline{M}_{X_0})$, then $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x_0})$ is a deformation of $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_0,x_0})$ to R and $\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X,x_0})$ is a deformation of $\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0,x_0})$ over R, where $\hat{}$ stands for the completion with respect to the linear topology given by the powers of the maximal ideal. We thus obtain functors $\underline{M}_{X_0} \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_0,x_0})} \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0,x_0})}$.

Firstly we establish that $\underline{M}_{X_0}$ is a homogeneous cofibered category over $\underline{C}_\Lambda$.

Lemma 4.2. Consider a diagram

$$\begin{array}{ccc} & & R' \\ & & \downarrow \\ R & \xrightarrow[\text{surjective}]{} & \bar{R} \end{array}$$

in $\underline{C}_\Lambda$, and let E, E' be flat modules over R, R' respectively. Then for any R'-homomorphism $E' \to \bar{E} = E \otimes_R \bar{R}$, the fibre-product $E \times_{\bar{E}} E'$ is flat as $R \times_{\bar{R}} R'$-module

Proof: Let $0 \to I \to R \to \bar{R} \to 0$ be exact so that $0 \to I \to R \times_{\bar{R}} R' \to R' \to 0$ is exact. Since E is R-flat, $0 \to I \otimes_R E \to E \to \bar{E} \to 0$ is exact and hence we obtain the exact sequence

$$(*) \qquad 0 \to I \otimes_R E \to E \times_{\bar{E}} E' \to E' \to 0 \ .$$

Set $S = R \times_{\bar{R}} R$. Since I is nilpotent, $E \times_{\bar{E}} E'$ is flat as an S-module if and only if $(E \times_{\bar{E}} E') \otimes_S R'$ is flat as an R'-module and $\mathrm{Tor}_1^S (E \times_{\bar{E}} E', R') = 0$. However, we note that $I \otimes_R E = I \otimes_S (E \times_{\bar{E}} E')$ and $E' = R' \otimes_S (E \times_{\bar{E}} E')$ and therefore the exact sequence (*) can be rewritten as

$$0 \to I \otimes_S (E \times_{\bar{E}} E') \to E \times_{\bar{E}} E' \to R' \otimes_S (E \times_{\bar{E}} E') \to 0 \ .$$

This means that $\mathrm{Tor}_1^S (R', E \times_{\bar{E}} E') = 0$ and $R' \otimes_S (E \times_{\bar{E}} E') = E'$ is flat as R'-module, and therefore $E \times_{\bar{E}} E'$ is S-flat.

Corollary 4.3. Given a diagram

$$\begin{tikzcd}
(R, X) \arrow[dr, "(\varphi, \Phi)"'] & & (R', X') \arrow[dl, "(\varphi', \Phi')"] \\
& (\bar{R}, \bar{X}) &
\end{tikzcd}$$

in $\underline{M}_{X_0}$, the amalgamated sum $X \coprod_{\bar{X}} X'$ (in the sense of schemes) is a flat scheme over $R \times_{\bar{R}} R'$, provided $\varphi : R \to \bar{R}$ is surjective. Consequently, $\underline{M}_{X_0}$ is a homogeneous cofibered category in groupoids over $\underline{C}_\Lambda$.

Proof: For each affine open $U_0 \subset X_0$, we have by definition that $X \coprod_{\bar{X}} X' | U_0 \simeq \mathrm{Spec}(\Gamma(U_0, X) \times_{\Gamma(U_0, \bar{X})} \Gamma(U_0, X'))$. Consequently, if $\varphi : R \to \bar{R}$ is surjective, $X \coprod_{\bar{X}} X'$ is a flat scheme over $R \times_{\bar{R}} R'$ by 4.2, and the morphism $i_X \coprod_{i_{\bar{X}}} i_{X'} : X_0 \to X \coprod_{\bar{X}} X'$ induces an isomorphism $X_0 \to (X \coprod_{\bar{X}} X') \otimes_S k$, where $S = R \times_{\bar{R}} R'$. Therefore $(R \times_{\bar{R}} R' , X \coprod_{\bar{X}} X') \in \mathrm{ob}(\underline{M}_{X_0})$ and we obviously have that $(R \times_{\bar{R}} R', X \coprod_{\bar{X}} X') = (R, X) \times_{(\bar{R}, \bar{X})} (R', X')$ in the category $\underline{M}_{X_0}$, which means that $\underline{M}_{X_0}$ is homogeneous over $\underline{C}_\Lambda$.

Lemma 4.4. For any scheme X_0 over k , we have a canonical exact sequence

$$0 \to H^1(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) \to [\underline{M}_{X_0}(k[\epsilon])] \to H^0(X_0, \underline{D}^1_{X_0})$$

where $\underline{D}^i_{X_0}$ are as defined in paragraph 3.

Proof: (Special case) Assume that X_0 is affine and let $\Gamma(X_0, \underline{O}_{X_0}) = A_0$. Then as it was noted in 4.1(b), the category $\underline{M}_{X_0}(k[\epsilon])$ is canonically equivalent to the category $\underline{E}$, where

ob($\underline{E}$) : object in $\underline{E}$ is a flat algebra A over $k[\epsilon]$

together with a $k[\epsilon]$ -algebra map $j_A : A \to A_0$ inducing the isomorphism $k \otimes_{k[\epsilon]} j_A : k \otimes_{k[\epsilon]} A \xrightarrow{\sim} A_0$. Alternatively, an object in $\underline{E}$ is a k-algebra A together with an exact sequence $0 \to A_0 \xrightarrow{\epsilon} A \xrightarrow{j_A} A_0 \to 0$ in which $\epsilon(A_0)^2 = 0$ as an ideal in A .

Fl($\underline{E}$) : An arrow $A_1 \to A_2$ in $\underline{E}$ with respect to first description of the object in $\underline{E}$ is a $k[\epsilon]$-algebra map $\Phi : A_1 \to A_2$ such that $j_{A_1} = j_{A_2} \circ \Phi$. Therefore, an arrow $A_1 \to A_2$ in $\underline{E}$ with respect to the alternative description of objects in $\underline{E}$ is a k-algebra map $\Phi : A_1 \to A_2$ yielding a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{\epsilon} & A_1 & \xrightarrow{j_{A_1}} & A_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\Phi} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{j_{A_2}} & A_0 & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

It follows that $[\underline{M}_{X_0}(k[\epsilon])]$ is canonically isomorphic, via $\Gamma(X_0, -)$, to the set of isomorphism classes of k-algebra extensions of A_0 by A_0 . In other words, we have a canonical bijection $[\underline{M}_{X_0}(k[\epsilon])] \xrightarrow{\sim} H^0(X_0, \underline{D}^1_{X_0})$ via $\Gamma(X_0, -)$, which is trivially seen to respect the vector space structures on both sides.

(General case) For each affine open $U_0 \subset X_0$, we get a canonical map $[\underline{M}_{X_0}(k[\epsilon])] \to H^0(U_0, \underline{D}^1_{X_0})$ defined as the composite map $[\underline{M}_{X_0}(k[\epsilon])] \to [\underline{M}_{U_0}(k[\epsilon])] \xleftarrow{\sim} H^0(U_0, \underline{D}^1_{X_0})$ and hence we obtain a canonical map $[\underline{M}_{X_0}(k[\epsilon])] \to H^0(X_0, \underline{D}^1_{X_0})$. Its kernel is the set of isomorphism classes of locally-trivial deformations of X_0 to $k[\epsilon]$, i.e., the set of isomorphism classes of deformations of X_0 to $k[\epsilon]$, locally (on X) isomorphic to $X_0 \otimes_k k[\epsilon]$. Since $\underline{D}^0_{X_0} = \underline{\mathrm{Der}}_k(\underline{O}_{X_0}, \underline{O}_{X_0}) = \underline{\mathrm{Aut}}(X_0 \otimes_k k[\epsilon] | X_0)$ = the sheaf of germs of automorphisms of $X_0 \otimes_k k[\epsilon]$ inducing the identity on the subscheme X_0 , it is canonically isomorphic to $H^1(X_0, \underline{D}^0_{X_0})$, so that we obtain the desired exact sequence.

Theorem 4.5. *Let* X_0 *be a scheme of finite type over* k *for which either* (i) X_0 *is proper over* k *or* (ii) X_0 *is affine but* $X_0^{\mathrm{sing}} = \{x \in X_0 | X_0$ *is non-smooth over* k *at the point* $x\}$ *is a finite set. Then*

(a) $\underline{M}_{X_0}$ *admits a formal versal object* (*called a formal versal deformation of* X_0) *over* $\underline{C}_\Lambda$. *If* $(R, \mathfrak{X})$ *is a formal versal deformation of* X_0 , *then for any* $(S, \mathfrak{Y}) \in \mathrm{ob}(\hat{\underline{M}}_{X_0})$, *there is a map* $(\varphi, \Phi) : (R, \mathfrak{X}) \to (S, \mathfrak{Y})$ *in* $\hat{\underline{M}}_{X_0}$ *such that the diagram below is cartesian*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spf}(S) \arrow[r, "\mathrm{Spf}(\varphi)"'] & \mathrm{Spf}(R) \end{tikzcd} .$$

Furthermore a formal versal deformation $(R, \mathfrak{X})$ of X_0 *prorepresents the functor* $[\underline{M}_{X_0}]$ *if and only if, for every surjective map* $R' \to R$ *in* $\underline{C}_\Lambda$ *and a deformation* (R', X') *of* X_0 *to* R' , *the homomorphism*

$$\mathrm{Aut}_{R'}(X' | X_0) \to \mathrm{Aut}_R(X' \otimes_{R'} R | X_0)$$

is surjective.

(b) *If* X_0 *is proper over* k , *then* $\underline{M}_{X_0}$ *is smoothly pseudo-representable* over $\underline{C}_\Lambda$.

<u>Proof</u>: (a) Since $\underline{M}_{X_0}$ is a homogeneous cofibered category in groupoids over $\underline{C}_\Lambda$ by 4.3, it suffices to see that $[\underline{M}(k[\varepsilon])]$ is a finite-dimensional vector space over k by 1.11 and 2.9(b).

Now consider the exact sequence

$$(*) \qquad 0 \to H^1(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) \to [\underline{M}_{X_0}(k[\varepsilon])] \to H^0(X_0, \underline{D}^1_{X_0}) \quad .$$

If X_0 is proper over k , then $H^1(X_0, \underline{D}^0_{X_0})$ and $H^0(X_0, \underline{D}^1_{X_0})$ are both finite dimensional since $\underline{D}^i_{X_0}$ are coherent for all $i \geq 0$ by 2.13(a). Now assume that X_0 is affine such that X_0^{sing} is a finite set. Since $\underline{D}^1_{X_0}$ is a coherent sheaf on X_0 such that $\mathrm{Supp}\, \underline{D}^1_{X_0} \subset X_0^{sing}$ by 2.13(a), we find that $H^0(X_0, \underline{D}^1_{X_0})$ is a finite-dimensional vector space over k , whereas $H^1(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) = 0$ since X_0 is affine. Therefore, in either case, it follows from the exact sequence (*) that $[\underline{M}_{X_0}(k[\varepsilon])]$ is a finite dimensional vector space over k . The second statement of (a) follows from 2.7.

(b) If X_0 is proper, $\mathrm{Aut}\,(X_0 \otimes_k k[\varepsilon] | X_0) = H^0(X_0, \underline{D}^0_{X_0})$ is a finite dimensional vector space and hence our statement follows from 2.13.

<u>Remark 4.6(a)</u>: Let X_0 be affine. Then a formal versal deformation of X_0 exists if and only if $\underline{D}^1_{X_0}$ has its support on a finite number of points. However this does not imply that non-smooth points of X_0 are all isolated. There are affine schemes X_0 over k having a non-isolated non-smooth point but $\mathrm{supp}\, \underline{D}^1_{X_0}$ is a finite set.

<u>Remark 4.6(b)</u>: Henceforth a deformation of X_0 is meant by an object in $\underline{M}_{X_0}$. In case when there is a possible confusion, an object in $\underline{M}_{X_0}$ will be referred as an infinitesimal deformation of X_0 .

<u>Remark 4.6(c)</u>: Let X_0 be a scheme over k . We have fixed a complete local noetherian ring Λ with the residue field k , and considered the deformations

of X_0 over the category $\underline{C}_\Lambda$. (In practice one usually takes $\Lambda = k$ or $W(k)$ if k is a perfect field of positive characteristic). Now $\underline{C}_k \subset \underline{C}_\Lambda$ is a fully faithful imbedding, and that $\underline{M}_{X_0} | \underline{C}_k$ is simply the category of deformations of X_0 over S where $S \in \mathrm{ob}(\underline{C}_k)$. Therefore if $(R, \mathfrak{X})$ is a formal versal deformation of X_0 over $\underline{C}_\Lambda$, then $(k \otimes_\Lambda R, k \otimes_\Lambda \mathfrak{X})$ is a formal versal deformation of X_0 over $\underline{C}_k$. It follows, for example, that $\dim_{\underline{C}_\Lambda} \underline{M}_{X_0} = \dim k \otimes_\Lambda R$ does not depend on the choice of Λ but depends only on X_0 .

One can generalize the above theorem in many ways. Let us for instance consider a pair $Y_0 \to X_0$ where X_0 is a scheme of finite type over k and Y_0 a fixed closed subscheme of X_0 . For each $R \in \mathrm{ob}(\underline{C}_\Lambda)$, a deformation of (X_0, Y_0) to R is meant to be a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
Y_0 \arrow[rrr] \arrow[dr, hook] \arrow[ddr] & & & Y \arrow[dl, hook'] \arrow[ddl, "\text{flat}"] \\
& X_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\text{flat}"] & \\
& \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R) &
\end{tikzcd}$$

such that $(X_0, Y_0) \to (X \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(k), Y \times_{\mathrm{Spec}(R)} \mathrm{Spec}(k))$ is an isomorphism. Defining a morphism $(R'; X', Y') \to (R; X, Y)$ of deformations of (X_0, Y_0) to be the obvious ones, we obtain the cofibered category $\underline{M}_{X_0, Y_0}$ in groupoids over $\underline{C}_\Lambda$. (This is a process often used in rigidification of automorphisms in moduli problems of deformations.) One sees immediately, by the same argument as in 4.3 based on 4.2, that $\underline{M}_{X_0, Y_0}$ is a homogeneous cofibered category in groupoids over $\underline{C}_\Lambda$.

<u>Lemma</u> 4.7. $0 \to H^0(Y_0, \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{Y_0}}(\underline{I}/\underline{I}^2, \underline{O}_{Y_0})) \to [\underline{M}_{X_0, Y_0}(k[\epsilon])] \to [\underline{M}_{X_0}(k[\epsilon])]$

<u>is exact, where</u> $\underline{I}$ <u>is the ideal sheaf of</u> $\underline{O}_{X_0}$ <u>defining</u> Y_0 i.e.

$0 \to \underline{I} \to \underline{O}_{X_0} \to \underline{O}_{Y_0} \to 0$ <u>is exact.</u>

<u>Proof</u>: Let $\underline{B}$ be the full subcategory of $\underline{M}_{X_0,Y_0}(k[\varepsilon])$ whose objects are of the form $(k[\varepsilon];\ X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k[\varepsilon]),\ Y)$. We then have $[B] = \mathrm{Ker}\ ([\underline{M}_{X_0,Y_0}(k[\varepsilon])] \to [\underline{M}_{X_0}(k[\varepsilon])]\ )$. The category $\underline{B}$ is the groupoid of deformations of Y_0 to $k[\varepsilon]$ "inside $X_0 \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k[\varepsilon])$ ", i.e., an object in $\underline{B}$ is a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "i_Y"] \arrow[dr, "\text{flat}"'] & & X_0 \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k[\varepsilon]) \arrow[dl] \\ & \mathrm{Spec}(k[\varepsilon]) & \end{tikzcd}$$

such that $\mathrm{Spec}(k) \underset{\mathrm{Spec}(k[\varepsilon])}{\times} i_Y = i_{Y_0}$, and an arrow $(Y_1, i_{Y_1}) \to (Y_2, i_{Y_2})$ is a $k[\varepsilon]$-morphism $\Phi : Y_1 \to Y_2$ (necessarily an isomorphism) such that $\mathrm{Spec}(k) \underset{\mathrm{Spec}(k[\varepsilon])}{\times} \Phi = \mathrm{id}_{Y_0}$ and $i_{Y_2} \circ \Phi = i_{Y_1}$. Alternatively, an object in $\underline{B}$ is a pair (Y, j_Y) , where Y is a deformation of Y_0 to $k[\varepsilon]$ and $j_Y : Y \to X_0$ is a morphism over k such that the composite morphism $Y_0 \to Y \xrightarrow{j_Y} X_0$ is i_{Y_0} , and an arrow $(Y_1, j_{Y_1}) \to (Y_2, j_{Y_2})$ is a morphism $\Phi : Y_1 \to Y_2$ such that $k \otimes_{k[\varepsilon]} \Phi = \mathrm{id}_{Y_0}$ and $j_{Y_2} \circ \Phi = j_{Y_1}$. Therefore the association

$$(Y, j_Y) \longmapsto \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \underline{I} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{O}_{X_0} \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{J}_Y"] & \underline{O}_{Y_0} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \underline{O}_{Y_0} \arrow[r, "\varepsilon"] & \underline{O}_Y \arrow[r] & \underline{O}_{Y_0} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

gives rise to an isomorphism

$$[B] \xrightarrow{j|\underline{I}} \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{X_0}}(\underline{I}, \underline{O}_{Y_0}) = \mathrm{Hom}_{\underline{O}_{Y_0}}(\underline{I}/\underline{I}^2, \underline{O}_{Y_0}) = H^0(Y_0, \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{O}_{Y_0}}(\underline{I}/\underline{I}^2, \underline{O}_{Y_0})) \ .$$

Remark 4.8. For a more general formula implying the above lemma, see SGA3 III 4.4. One may also note the following fact. One can define for any S-scheme X and a quasi-coherent X-module $\underline{E}$ a quasi-coherent X-module $\underline{D}^i_{X|S}(\underline{E})$ for all $i \geq 0$, generalizing the case when S is affine. As usual we simply write $\underline{D}^i_{X|S}(\underline{O}_X) = \underline{D}^i_{X|S}$. We then have

$$H^0(Y_0, \underline{\mathrm{Hom}}_{Y_0}(\underline{I}/\underline{I}^2, \underline{O}_{Y_0})) = H^0(Y_0, \underline{D}^1_{Y_0|X})$$

where $0 \to \underline{I} \to \underline{O}_{X_0} \to \underline{O}_{Y_0} \to 0$ is exact.

Theorem 4.9. Let X_0 be k-scheme of finite type and Y_0 a closed subscheme of X_0. Assume that either (i) X_0 is proper over k or (ii) X_0 is affine and smooth over k outside a finite number of points and Y_0 is proper over k. We then have

(a) $\underline{M}_{X_0, Y_0}$ admits a formal versal deformation over $\underline{C}_\wedge$, and it pro-represents the functor $[\underline{M}_{X_0, Y_0}]$ if and only if, for every surjective map $R' \to R$ in $\underline{C}_\wedge$ and a deformation $(R'; X', Y')$,

$$\mathrm{Aut}_{R'}((X', Y')|X_0) \to \mathrm{Aut}_R(X' \otimes_{R'} R, Y' \otimes_{R'} R)|X_0)$$

is surjective.

(b) If furthermore $H^0(X_0, \underline{D}^0_{Y_0|k} \times_{\underline{D}^0_{X_0|k}(\underline{O}_{Y_0})} \underline{D}^0_{X_0|k})$ is finite dimensional, then $\underline{M}_{X_0, Y_0}$ is smoothly pseudo-representable.

Proof: It is obvious from 4.4 and 4.6 together with 1.11, 2.7, and 2.13.

We now consider the passage to localization and completion in the deformation theory of schemes. Firstly on a notation: Let X_0 be a k-scheme of finite type. Given a fixed point $x_0 \in X_0$, we have natural functors

$$\underline{M}_{X_0} \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_0, x_0})} \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0, x_0})}$$

and in turn we obtain the functors

$$\underline{\hat{M}}_{X_0} \to \underline{\hat{M}}_{\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_0},\, x_0)} \to \underline{\hat{M}}_{\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0},\, x_0)} .$$

As it was remarked in 4.1(c), $\underline{M}_{X_0}$ is canonically equivalent to the category in which an object is a pair $(R, \mathfrak{X})$ where $R \in \mathrm{ob}(\underline{C}_\Lambda)$ and $\mathfrak{X}$ is a flat R-adic formal scheme together with a fixed isomorphism $\mathfrak{X}_0 \longleftrightarrow X_0$. Henceforth we shall write, when there is no possible confusion, the images of $(R, \mathfrak{X})$ under $\underline{M}_{X_0} \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_0},\, x_0)}$ and $\underline{M}_{X_0} \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_0},\, x_0)}$ by $(R, \mathfrak{X}_{(x_0)})$ and $(R, \mathfrak{X}_{(x_0)})$ respectively. Therefore if $\mathfrak{X} = \varinjlim_{v} \mathfrak{X}_v$ where $\mathfrak{X}_v = \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spf}(R)} \mathrm{Spec}(R/\underline{m}^{v+1})$ then

$$\mathfrak{X}_{(x_0)} = \varinjlim_{v} \mathrm{Spec}(\underline{O}_{\mathfrak{X}_v},\, x_0)$$

$$\mathfrak{X}_{(\hat{x}_0)} = \varinjlim_{v} \mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{\mathfrak{X}_v},\, x_0) .$$

<u>Theorem</u> 4.10. <u>Let</u> X_0 <u>be an affine scheme of finite type over</u> k .

(a) <u>If</u> X_0 <u>is locally a complete-intersection, then</u> $\underline{M}_{X_0}$ <u>is smooth over</u> $\underline{C}_\Lambda$.

(b) <u>Assume that, for a fixed closed point</u> $x \in X_0$, $X_0 - \{x\}$ <u>is smooth over</u> k . <u>Then</u>

$$\underline{M}_{X_0} \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_0},\, x)} \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0},\, x)}$$

<u>are both minimally smooth functors. In particular, if</u> $(R, \mathfrak{X})$ <u>is a formal versal deformation of</u> X_0 , <u>then</u> $(R, \mathfrak{X}_{(x)})$ <u>and</u> $(R, \mathfrak{X}_{(\hat{x})})$ <u>are formal versal deformations of</u> $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_0},\, x)$ <u>and</u> $\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0},\, x)$ <u>respectively</u>.

<u>Proof</u>: In this proof we go back to the notations of the cohomology of commutative algebras defined in the paragraph 3. We set $X_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$

(a) It suffices to show that $P : [\underline{M}_{X_0}] \to \underline{C}_\Lambda$ is smooth.

Let $(R, \mathrm{Spec}(A))$ be a deformation of $\mathrm{Spec}(A_0)$ to R, where $R \in \mathrm{ob}(\underline{C}_\Lambda)$. Given a small extension $R' \to R$ in $\underline{C}_\Lambda$ (i.e., $0 \to k \to R' \to R \to 0$ is exact), we must show that $(R, \mathrm{Spec}(A))$ can be lifted to R'. The exact sequence of D^i with coefficient A_0 applied to the ring homomorphisms $R' \to R \to A$ gives us the exact sequence

$$\cdots \to D^1(A|R, A_0) \to D^1(A|R', A_0) \to D^1(R|R', k) \otimes_k A_0 \to D^2(A|R, A_0) \to \cdots$$

Since $R' \to R$ is a small extension, $D^1(R'|R, k)$ is 1-dimensional vector space over k generated by the element (denoted by $[R']$) represented by the extension $0 \to k \to R' \to R \to 0$. On the other hand, A is R-flat and hence $D^i(A|R, A_0) = D^i(A_0|k, A_0)$ for all $i > 0$ and in particular $D^2(A|R, A_0) = 0$ by 3.12(11) since A_0 is locally a complete-intersection. Consequently we get the exact sequence

$$\to D^1(A_0|k, A_0) \to D^1(A|R', A_0) \to D^1(R|R', k) \otimes_k A_0 \to 0$$

This means that there exists an R'-algebra extension of A by A_0, denoted by A', such that $[A'] \to [R'] \otimes 1$ under the map $D^1(A|R', A_0) \to D^1(R|R', k) \otimes_k A_0$, which means that the deformation $(R, \mathrm{Spec}(A))$ can be lifted to a deformation $(R', \mathrm{Spec}(A'))$.

(b) By 3.14 we have the isomorphisms

$$D^1(A_0|k, A_0) \simeq D^1((A_0)_x|k, (A_0)_x) \simeq D^1(\widehat{(A_0)_x}|k, \widehat{(A_0)_x})$$

i.e., $[\underline{M}_{X_0}(k[\varepsilon])] \simeq [\underline{M}_{\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_0,x})}(k[\varepsilon])] \simeq [\underline{M}_{\mathrm{Spec}(\widehat{\underline{O}_{X_0,x}})}(k[\varepsilon])]$.

It suffices to show, by 2.7(a), that

$$[\underline{M}_{X_0}] \to [\underline{M}_{\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_0,x})}] \to [\underline{M}_{\mathrm{Spec}(\widehat{\underline{O}_{X_0,x}})}]$$

are both smooth functors. Let $(R, \mathrm{Spec}(A))$ be a deformation of $X_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$, and let $0 \to k \to R' \to R \to 0$ be a small extension in $\underline{C}_\Lambda$. As above, the ring homomorphisms $R' \to R \to A$ gives us the exact commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\to D^1(A_0|k,A_0) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"'] & D^1(A|R',A_0) \arrow[r, "p"] \arrow[d] & D^1(R|R',k)\otimes_k A_0 \arrow[r] \arrow[d] & D^2(A_0|k,A_0) \to \cdots \arrow[d, "\approx"] \\
\to D^1(A_0|k,(A_0)_x) \arrow[r] & D^1(A|R',(A_0)_x) \arrow[r] & D^1(R|R',k)\otimes_k (A_0)_x \arrow[r] & D^2(A_0|k,(A_0)_x) \to \cdots \\
\to D^1((A_0)_x|k,(A_0)_x) \arrow[r] \arrow[u] & D^1(A_x|R',(A_0)_x) \arrow[r, "p_x"] \arrow[u] & D^1(R|R',k)\otimes_k (A_0)_x \arrow[r] \arrow[u] & D^2((A_0)_x|k,(A_0)_x) \to \cdots \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

where the indicated isomorphism comes from the fact that A_0 is smooth over k except at one closed point x so that

$$D^i(A_0|k,\ (A_0)_x) = D^i(A_0|k,\ A_0)_x = D^i(A_0|k,\ A_0)$$

for all $i > 0$. Now suppose that we are given an arrow $(R',\ \mathrm{Spec}(B)) \to (R,\ \mathrm{Spec}(A_x))$ in $[\underline{M}_{\mathrm{Spec}((A_0)_x)}]$. It means that we are given a class $[B] \in D^1(A_x|R',\ (A_0)_x)$ such that $p_x([B]) = [R']$. Then a trivial diagram chasing shows that there exists $[A'] \in D^1(A|R',\ A_0)$ such that $p([A']) = [R']$ and $A'_x = B$ i.e., $(R',\ \mathrm{Spec}(A'))$ is a deformation of $\mathrm{Spec}(A_0)$ to R' such that $\mathrm{Spec}(A')_x = \mathrm{Spec}(B)$. This proves that $\underline{M}_{X_0} \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_0},\ x)}$ is smooth. The smoothness of the functor $\underline{M}_{\mathrm{Spec}((A_0)_x)} \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\widehat{(A_0)_x})}$ comes from the similar diagram together with the fact that

$$D^i((A_0)_x|k,\ \widehat{(A_0)_x}) = \widehat{D^i((A_0)_x|k,\ (A_0)_x)} = D^i((A_0)_x|k,\ (A_0)_x)$$

for all $i > 0$ since x is an only possible non-smooth point.

<u>Theorem</u> 4.11. <u>Let</u> X_0 <u>be a</u> (<u>separated</u>) k-<u>scheme of finite type, smooth outside a finite closed set</u> $X_0^{\mathrm{Sing}} = \{x_1,\dots,x_r\}$ <u>of</u> X_0 . <u>Let</u> $U_0^1,\dots,U_0^r$ <u>be affine open neighbourhoods of</u> $x_1,\dots,x_r$ <u>such that</u> $U_0^i \cap X_0^{\mathrm{Sing}} = \{x_i\}$. <u>If</u> $H^2(X_0,\ \underline{D}^0_{X_0}) = 0$, <u>then the natural functor</u> $\underline{M}_{X_0} \to \underline{M}_{U_0^1} \times \dots \times \underline{M}_{U_0^r}$ <u>is smooth</u>.

<u>Proof</u>: We can complete $U_0^1, \dots, U_0^r$ into an affine open covering of X_0 by choosing $U_0^{r+1},\dots,U_0^N$ such that $U_0^j \cap X_0^{\mathrm{Sing}} = \emptyset$ for all $j > r$. Now let $R' \to R$ be a small extension in $\underline{C}_\Lambda$, and let $(R',\ U'^1),\dots,(R',\ U'^r)$ be deformations of $U_0^1,\dots,U_0^r$ to R' such that $U'^i \otimes_{R'} R = X|U_0^i$, $1 \le i \le r$, for

some deformation (R, X) of X_0 to R. We must show that there exists a deformation (R', X') of X_0 to R' such that $X' \otimes_{R'} R = X$ and $X'|U_0^i = U'^i$ for $1 \leq i \leq r$. Since U_0^j for $j > r$ is smooth over k, $X|U_0^j$ can be lifted, by 4.9(a), to a deformation (R', U'^j) i.e., there exist deformations (R', U'^j) of U_0^j to R' such that $U'^j \otimes_{R'} R = X|U_0^j$ for all $j > r$. Since, for any pair $i \neq j$, $U_0^i \cap U_0^j$ is affine and smooth over k, we obtain an isomorphism

$$\tau_{ij} : U'^i|U_0^i \cap U_0^j \overset{\sim}{\rightarrow} U'^j|U_0^i \cap U_0^j$$

such that $\tau_{ij} \otimes_{R'} R = \mathrm{id}_{X|U_0^i \cap U_0^j}$, and in turn defines a cohomology class in $H^2(X_0 \underline{D}_{X_0}^0)$ given by $U_0^i \cap U_0^j \cap U_0^k \to \tau_{ij}\tau_{jk}\tau_{ik}^{-1}$. Since $H^2(X_0, \underline{D}_{X_0}^0) = 0$ by hypothesis, the obstruction for glueing these to obtain a global deformation vanishes, and hence we get a deformation (R', X') of X_0 to R' such that $X' \otimes_{R'} R = X$ and $X'|U_0^j \simeq U'^j$. This completes our proof.

Remark 4.12. The previous proof assumes X_0 to be separated, which is unnecessary. In fact, for a fixed deformation (R, X) of X_0 and deformations (R', U'^j) of U_0^i, the deformations (R', V') of open set V of X to R' compatible with the deformation (R', U'^j) already given, form a "gerbe" (in Giraud's terminology) whose structure sheaf is $\underline{D}_{X_0}^0$. Hence the obstruction to the existence of a section of this "gerbe" (i.e., a global deformation (R', X') of X compatible with the given datum (R', U'^j)) is in $H^2(X_0, \underline{D}_{X_0}^0)$ which is zero by assumption.

Corollary 4.13. *Let X_0 be a k-scheme of finite type, smooth outside a finite subset $X_0^{Sing} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ of X_0 such that $H^2(X_0, \underline{D}_{X_0}^0) = 0$. Then*

(a) $\underline{M}_{X_0} \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\widehat{\underline{O}_{X_0,x_1}})} \times \cdots \times \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\widehat{\underline{O}_{X_0,x_r}})}$ *is smooth.*

In particular, $\dim \underline{M}_{X_0} = \dim H^1(X_0, \underline{D}_{X_0}^0) + \sum_{c=1}^{r} \dim \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\widehat{\underline{O}_{X_0,x_0}})}$.

(b) *If furthermore X_0 is locally a complete-intersection, then $\underline{M}_{X_0}$ is smooth.*

Proof:

(a) The first statement follows from 4.10 and 4.9(b). Now let $(R, \mathfrak{X})$ and $(R_1, \mathfrak{X}_1), \ldots, (R_r, \mathfrak{X}_r)$ be formal versal deformations of X_0 and $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_0,x_1}), \ldots, \mathrm{Spec}(\underline{O}_{X_0,x_r})$ respectively. We then obtain a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \underline{h}_R & \longrightarrow & \underline{h}_{R_1 \hat{\otimes}_\Lambda \cdots \hat{\otimes}_\Lambda R_r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{M}_{X_0} & \longrightarrow & \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0,x_1})} \times \cdots \times \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0,x_r})} \end{array}$$

Since the composite functor

$$\underline{h}_R \to \underline{M}_{X_0} \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0,x_1})} \times \cdots \times \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0,x_r})}$$

is smooth whereas

$$\underline{h}_{R_1 \hat{\otimes}_\Lambda \cdots \hat{\otimes}_\Lambda R_r} \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0,x_1})} \times \cdots \times \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0,x_r})}$$

is minimally smooth, it follows from 2.7(a) that

$\underline{h}_R \to \underline{h}_{R_1 \hat{\otimes}_\Lambda \cdots \hat{\otimes}_\Lambda R_r}$ is smooth i.e., R is a formal power-series ring over $R_1 \hat{\otimes}_\Lambda \cdots \hat{\otimes}_\Lambda R_r$. Since

$$0 \to H^1(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) \to [\underline{M}_{X_0}(k[\epsilon])] \to [\underline{M}_{\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0,x_1})}(k[\epsilon])] \cdots [\underline{M}_{\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0,x_r})}(k[\epsilon])]$$

is exact by 4.4 i.e.,

$$0 \to H^1(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R, k[\epsilon]) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R_1 \hat{\otimes}_\Lambda \cdots \hat{\otimes}_\Lambda R_r, k[\epsilon])$$

is exact, it follows that R is a formal power-series ring over $R_1 \hat{\otimes}_\Lambda \cdots \hat{\otimes}_\Lambda R_r$ in d-variables where $d = \dim_k H^1(X_0, \underline{D}^0_{X_0})$.

Therefore

$$\begin{aligned} \dim \underline{M}_{X_0} &= \dim k \otimes_\Lambda R = d + \dim k \otimes_\Lambda (R_1 \hat{\otimes}_\Lambda \cdots \hat{\otimes}_\Lambda R_r) \\ &= d + \dim(k \otimes_\Lambda R_1) \hat{\otimes}_k \cdots \hat{\otimes}_k (k \otimes_\Lambda R_r) \\ &= d + \sum_{i=1}^{r} \dim k \otimes_\Lambda R_i = d + \sum_{i=1}^{r} \dim \underline{M}_{\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0,x_i})} \end{aligned}$$

(b) follows from 4.10 and 4.9(a).

4.14. We close this paragraph with an explicit construction of a formal versal deformation in a simple situation. In fact, if X_0 is affine and is a complete-intersection, it is trivial to write down explicitely. Thus let

$$A_0 = k[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_r) \quad S/J$$

where $S = k[x_1,\dots,x_n]$, $J = (f_1,\dots,f_r)$, and $f_1,\dots,f_r$ is an S-regular sequence. We then obtain the exact sequence

$$\dots \to \mathrm{Der}_k(S, A_0) \to \mathrm{Hom}_{A_0}(J/J^2, A_0) \to D^1(A_0|k, A_0) \to 0$$

We note that J/J^2 is A_0-free module of rank r generated by $f_1(\mathrm{mod}\ J^2),\dots,f_r(\mathrm{mod}\ J^2)$, since $f_1,\dots,f_r$ is an S-regular sequence. We now assume that $D^1(A_0|k, A_0)$ is a finite-dimensional vector space over k , say A has isolated non-smooth points only. Let $d = \dim_k D^1(A_0|k, A_0)$ and choose $p_j : J/J^2 \to A_0$ $(j = 1, 2,\dots,d)$ which form a k-basis of $D^1(A_0|k, A_0)$. Now choose $P_{jk} \in \Lambda[x_1,\dots,x_n]$ such that $p_j(f_i) = P_{ji}$ (mod $\underline{m}_\Lambda + J$) where $\underline{m}_\Lambda$ is the maximal ideal of Λ . We then consider

$$R = \Lambda[[t_1,\dots,t_d]]$$
$$B = R[x_1,\dots,x_n]/(G_1,\dots,G_r)$$

where $G_j = F_j - \sum_{i=1}^{d} t_i P_{ji}$ and F_j is a polynomial with coefficients in Λ gotten from f_j by lifting the coefficients from k to Λ . Since $R[x_1,\dots,x_n]$ is R-flat and $G_1,\dots,G_r$ modulo $\underline{m}_R$ (which becomes $f_1,\dots,f_r$) is a regular sequence in $k \otimes_R R[x_1,\dots,x_n]$, it follows that B is R-flat, and $k \otimes_R B = A_0$. Furthermore,

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-alg}}(R, k[\epsilon]) \to D^1(A_0|k, A_0) = [\underline{M}_{\mathrm{Spec}(A_0)}(k[\epsilon])]$$

is bijective by our construction of B . Therefore, if we set

$$\mathrm{Spf}(B) = \varinjlim_{v} \mathrm{Spec}(R/\underline{m}^{v+1} \underset{R}{\otimes} B)$$

then $(R, \mathrm{Spf}(B))$ is an object in $\widehat{\underline{M}_{\mathrm{Spec}(A_0)}}$ and the functor $\underline{h}_R \to \underline{M}_{\mathrm{Spec}(A_0)}$ induced by $(R, \mathrm{Spf}(B))$ is smooth by 1.6, since R is a formal power-series ring over Λ. In other words, $(R, \mathrm{Spf}(B))$ is a formal versal object of $\underline{M}_{\mathrm{Spec}(A_0)}$.

We note, by 4.10(b), that if we set

$$B = R[[X_1,\dots,X_n]]/(G_1,\dots,G_r) \quad ,$$

then $(R, \mathrm{Spf}(B))$ is a formal versal deformation of $\mathrm{Spec}(A_0)$ where $A_0 = k[[X_1,\dots,X_n]]/(f_1,\dots,f_r)$.

Remark 4.15. Let X_0 be a k-scheme of finite type with isolated non-smooth points only, and let $(R, \mathfrak{X})$ be a formal versal deformation of X_0. The above construction shows that if X_0 is affine and locally a complete-intersection, then $\mathfrak{X}$ is a formalization of an R-scheme of finite type. This fact can easily be generalized to the case when X_0 is not necessarily affine but $H^2(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) = 0$.

Remark 4.16. The global theory of the relative cotangent complex (the latter theory being reduced to the truncated complex of length 1, which is sufficient however for many purposes of deformation theory) allows to generalize and simplify certain results, such as 4.10. Namely let S be a scheme, $S_0 \subset S' \subset S$ two subschemes of S defined by ideals $J \supset I$ such that $JI = 0$, X' a scheme flat over S', $L. = L^{X_0/S_0}$ the relative cotangent complex of X_0 over S_0, which is an element of the derived category $D(X_0, \underline{O}_X)$. We consider the category $\underline{F}$ of all flat schemes X over S which extend X'/S', i.e. together with an S'-isomorphism $X \underset{S}{\times} S' \simeq X'$. Then

(a) For an object X' of $\underline{F}$, the group of automorphisms is canonically isomorphic to $\mathrm{Ext}^0(X_0; L., I_{X_0})$ (where I_{X_0} is the inverse image of I, viewed as a module on S_0, on X_0).

(b) The set of isomorphism classes of objects of $\underline{F}$ is empty or a torsor (= a principal homogeneous space) under the group $\mathrm{Ext}^1(X_0; L.,I_{X_0})$.

(c) One can define a canonical element $c \in \mathrm{Ext}^2(X_0; L.,I_{X_0})$ whose vanishing is necessary and sufficient for $\underline{F}$ to be non empty.

In order to study the $\mathrm{Ext}^i(X_0; L.,I_{X_0})$, it is often convenient to write

$$\mathrm{Ext}^i(X_0;L.,I_{X_0}) = H^i(X_0, \underline{\mathrm{RHom}}(L.,I_{X_0})) \quad .$$

and to notice that the complex $\underline{\mathrm{RHom}}(L.,I_{X_0})$ has as cohomology sheaves the sheaves $\underline{D}^i_{X_0}(I_{X_0})$ introduced in § 3. For $i = 0, 1, 2,$ these sheaves may be viewed respectively as the sheaf of automorphisms of any object X of $\underline{F}$ (understood: automorphisms inducing the identity on X') , the sheaf of indeterminacy of isomorphism classes of local solutions to the flat deformation problem, and the sheaf of obstructions to the existence of local solutions. On the other hand, the standart spectral sequence gives us

$$\mathrm{Ext}^*(X_0 \; L.,I_{X_0}) \Leftarrow E_2^{p,q} = H^p(X_0, \underline{D}^q_{X_0}(I_{X_0})) \quad ,$$

which yields the well-known isomorphism

$$\mathrm{Aut}(X/X') \simeq H^0(X_0,\underline{D}^0_{X_0}(I_{X_0})) \simeq H^0(X_0,\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\Omega}^1_{X_0/S_0},I_{X_0})) = \mathrm{Hom}(\underline{\Omega}^1_{X_0/S_0},I_{X_0}) \quad ,$$

and the exact sequence in low degrees

$$0 \to H^1(X_0,\underline{D}^0_{X_0}) \to \mathrm{Ext}^1 \to H^0(X_0,\underline{D}^1_{X_0}) \to H^2(X_0,\underline{D}^0_{X_0}) \to \mathrm{Ext}^2$$

This shows in particular that if $H^2(X_0,\underline{D}^0_{X_0}) = 0$, and if there exists any local flat deformation X of X'/S' , then there exists a flat global deformation which corresponds to given local deformations. More precisely and generally, for a given local deformations (i.e. a section of the "sheaf of isomorphism classes of local flat deformations"), the argument 4.10 shows that the obstruction to finding a global flat deformation compatible with these is in $H^2(X_0, \underline{D}^0_{X_0})$, hence such a global flat deformation exists if $H^2(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) = 0$: this is essentially 4.10.

On the other hand, the spectral sequence shows that the Ext^2 is zero whenever we have the relations

$$(*) \quad H^0(X_0, \underline{D}^2_{X_0}) = 0 \ , \ H^1(X_0, \underline{D}^1_{X_0}) = 0 \ , \ H^2(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) = 0 \ .$$

The first relation is always satisfied if X_0 is a relative complete intersection over S_0 (as then $\underline{D}^2_{X_0} = 0$ for any module M on X_0), the second is satisfied provided the support of $\underline{D}^1_{X_0}$ is discrete, as is the case if X_0 is smooth over S_0 except on a discrete subset of X_0 over S_0 . When the previous three relations (*) are all satisfied, then by (c) above, $\underline{F}$ is non empty, which generalizes 4.12(b).

More geometrically, and without using the global theory of the relative cotangentcomplex (but only the globalizing of the functors $\underline{D}^i_{X_0}$), one can get a simple geometric interpretation of the three successive obstructions to deforming flatly X' to X , lying in the three left hand terms of (*). Namely by the local theory, the first obstruction c_1 in $H^0(X_0, \underline{D}^2_{X_0})$ can be defined as the obstruction to finding local solutions, when this obstruction vanishes, the sheaf $\underline{F}$ of isomorphism classes of local solutions of the problem is (by the local theory) in a canonical way a torsor under $\underline{D}^1_{X_0}$, and the second obstruction c_2 , lying in $H^1(X_0, \underline{D}^1_{X_0})$, is the obstruction to finding a section of this torsor, i.e. of finding a "coherent system of isomorphism classes of local solutions" ; if this second obstruction also vanishes, then, choosing arbitrarily a section of $\underline{F}$, one gets, as noted above, an obstruction c_3 in $H^2(X_0, \underline{D}^0_{X_0})$ to finding a global solution corresponding to the given system of (isomorphism classes of) local solutions. Using the fact that the section of F is determined up to adding a section of $\underline{D}^1_{X_0}$, we get a map $d : H^0(X_0, \underline{D}^1_{X_0}) \to H^2(X_0, \underline{D}^0_{X_0})$, and a solution to the deformation problem exists if and only if $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, and c_3 is zero as an element of Coker d (each c_i being defined when the previous ones are zero). Of course, the groups $H^0(X_0, \underline{D}^2_{X_0})$, $H^1(X_0, \underline{D}^1_{X_0})$ and

$H^2(X_0, \underline{D}^0_{X_0})/\mathrm{Im}\ d$ are just the initial terms $E_2^{0,2}$, $E_2^{1,1}$, and $E_3^{2,0}$ of the spectral sequence above, d being the differential (up to sign ?) $d_2 : E_2^{0,1} \to E_2^{2,0}$.

5. Formal Jacobian subschemes

Let X_0 be a scheme of finite type over a field k , and let $(R, \mathfrak{X})$ be a formal versal deformation of X_0 . Then $\mathfrak{X}$ is not an ordinary scheme over R but an R-adic formal scheme. The purpose of this section is to clarify "the non-smooth locus of $\mathfrak{X}$ over R ".

We fistly recall the definition of Fitting ideals associated to a module of finite type: Let A be a commutative ring and E an A-module of finite type. Choose a presentation

$$K \to F \to E \to 0$$

where F is locally-free of constant rank n . We define

$$I_A^p(E) = \mathrm{Im}(^{n-p}\!\wedge K \otimes {}^{n-p}\!\wedge F^* \to A) \qquad \text{for } p = 0, 1, 2, \ldots$$

The ideals $I_A^p(E)$ thus defined does not depend on the choice of a presentation and therefore are invariants of A-module E , called the Fitting ideals of A-module E . The following properties readily follow from the definition.

5.1. (a) For any ring homomorphism $A \to B$, the canonical map

$$B \otimes_A A/I_A^p(E) \to B/I_B^p(B \otimes_A E)$$

is an isomorphism for all P . In particular we have

$$I^p_{S^{-1}A}(S^{-1}E) = S^{-1}I_A^p(E)$$

for any multiplicative subset S in A .

(b) We have $I^0_A(E) \subset I^1_A(E) \subset I^2_A(E) \subset \ldots$, and, for each point $x \in \mathrm{Spec}(A)$, $I^p_A(E)_x = A_x$ for all $p \geq \dim_{\kappa(x)} E(x)$, where $E(x) = \kappa(x) \otimes_A E$.

(c) $x \in \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{Supp}\, A/I^p_A(E)$ if and only if, for any (or for some) presentation

$$K \to F \to E \to 0$$

where $F \approx A^n$, K_x contains A_x^{n-p} which is isomorphic to a direct summand of F_x . In particular, we have that

$$\mathrm{Supp}\, A/I^0_A(E) = \mathrm{Supp}\, E \quad .$$

(d)

$$I^r_A(E_1 \oplus E_2) = \sum_{p+q=r} I^p_A(E_1) \cdot I^q_A(E_2)$$

(e) If A is a noetherian adic ring, then

$$A/I^p_A(E) = \varprojlim_{v} A_v/I^p_{A_v}(E_v)$$

where $A = \varprojlim_{v} A_v$ and $E_v = E \otimes_A A_v$.

In view of the property 5.1(a), our definition of Fitting ideals is readily globalized. Thus let X be any scheme, and $\underline{E}$ a quasi-coherent X-module of finite presentation. We then obtain a sequence of quasi-coherent ideal sheaves $\underline{I}^p_X(\underline{E})$ for $p \geq 0$ defined by

$$\Gamma(U, \underline{I}^p_X(\underline{E})) \cong I^p_{\Gamma(U, \underline{O}_X)}(\Gamma(U, \underline{E}))$$

for every affine open subset $U \subset X$.

Now let $X \to Y$ be a morphism of schemes. The relative Kähler-differentials $\underline{\Omega}_{X|Y} (= \underline{\Omega}^1_{X|Y})$ is a quasi-coherent X-module. If the morphism $X \to Y$ is of essentially finite presentation, then $\underline{\Omega}_{X|Y}$ is a quasi-coherent X-module of finite presentation, and in turn we may consider the ideal sheaves $\underline{I}^p_X(\underline{\Omega}_{X|Y})$ ..

Definition 5.2. *Let* $X \to Y$ *be a morphism of essentially finite presentation. For each integer* $p \geq 0$ *, we define* $J^p_X(X|Y)$ *to be the closed subscheme of* X

115

defined by the ideal sheaf $\underline{I}^p_X(X|Y) = \underline{I}^p_X(\underline{\Omega}_{X|Y})$, called the Jacobian subschemes of X over Y . For each point $x \in X$, we set $X_x = \operatorname{Spec}(\underline{O}_{X,x})$.

Theorem 5.3. Let $X \to Y$ be a morphism of essentially finite presentation. Then

(1) For any base change $Y \leftarrow Y'$, the canonical map $J^p_{X'}(X'|Y') \simeq J^p_X(X|Y) \underset{Y}{\times} Y'$ is an isomorphism for all p where $X' = X \underset{Y}{\times} Y'$.

(2) For each point $x \in X$, we have the canonical isomorphism $J^p_{X_x}(X_x|Y) \simeq J^p_X(X|Y)_x$.

(3) $J^0_X(X|Y) \supset J^1_X(X|Y) \supset J^2_X(X|Y) \supset \ldots$, and $x \notin J^p_X(X|Y)$ for all $p \geq \dim_{\kappa(x)} \Omega_{X|Y}(x)$.

(4) $x \notin J^p_X(X|Y)$ if and only if there exists an open neighbourhood U of x which admits a closed immersion into a Y-scheme U' such that U' is smooth over Y at x' and $\dim_{x'} U'_{f(x)} = p$ where x' is the image of x under $U \to U'$.

(5) $$\underline{I}^r_{X_1 \underset{Y}{\times} X_2}(X_1 \underset{Y}{\times} X_2|Y) = \sum_{p+q=r} \pi_1^* \underline{I}^p_{X_1}(X_1|Y) \cdot \pi_2^* \underline{I}^q_{X_2}(X_2|Y)$$

where $\pi_i : X_1 \underset{Y}{\times} X_2 \to X_i$ is the projection.

Proof: (3) follows from 5.1(b) whereas (1) follows from 5.1(a) together with the fact that $P^* \underline{\Omega}_{X|Y} \simeq \underline{\Omega}_{X'|Y'}$ is an isomorphism where $P : X \underset{Y}{\times} Y' \to X$ is the projection. (2) also follows from 5.1(a) since $\underline{O}_{X,x} \underset{\underline{O}_X}{\otimes} \underline{\Omega}_{X|Y} \simeq \underline{\Omega}_{X_x|Y}$ is an isomorphism (5) follows from 5.1(d) and the isomorphism

$$\pi_1^* \underline{\Omega}_{X_1|Y} \oplus \pi_2^* \underline{\Omega}_{X_2|Y} \simeq \underline{\Omega}_{X_1 \underset{Y}{\times} X_2|Y}$$

(4) Assume the existence of a diagram

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "f"'] & & U' \arrow[ll, "i"'] \arrow[dll] \\ Y & & \end{tikzcd}$$

where U' is smooth over Y at $x' = i(x)$ and $\dim_{x'} U'_{f(x)} = p$. Then $\dim_{\kappa(x')} \Omega_{U'|Y}(x') = p$ and $i^{*}\Omega_{U'|Y} \to \Omega_{U|Y} \to 0$ is exact, so that $\dim_{\kappa(x)} \Omega_{U|Y}(x) \leq p$ which implies that $x \notin J^p_U(U|Y)$ by 5.3(3). Since $J^p_U(U|Y) = J^p_X(X|Y)|U$, this means that $x \notin J^p_X(X|Y)$. Now assume conversely that $x \notin J^p_X(X|Y)$.

The question being local, we may assume that X, Y are both affine, say $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$. Choose a presentation over A

$$0 \to J \to P \to B \to 0$$

where $P = A[x_1,\dots,x_n]$. Then $J/J^2 \xrightarrow{d} B \underset{P}{\otimes} \Omega_{P|A} \to \Omega_{B|A} \to 0$ is exact and $B \underset{P}{\otimes} \Omega_{P|A}$ is B-free of rank n , and therefore

$I^p_B(\Omega_{B|A}) = \mathrm{Im}(^{n-p}\!\wedge J/J^2 \underset{B}{\otimes} (B \underset{P}{\otimes} {}^{n-p}\!\wedge \Omega_{P|A})^{*} \to B)$. Therefore, $x \notin J^p_X(X|Y)$ $\Leftrightarrow$ there exists $f_1,\dots,f_{n-p}$ in J such that $[\det\left(\frac{f_i}{x_j}\right)](x) \neq 0$ for some choice of $n-p$ variables among $x_1, x_2,\dots,x_n$ there exists $f_1, f_2,\dots,f_{n-p}$ in J such that $\mathrm{Spec}(P/(f_1,\dots,f_{n-p})) \to \mathrm{Spec}(A)$ is smooth at x' where x' is the image of x under $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(P/(f_1,\dots,f_{n-p}))$. Thus it suffices to take $U' = \mathrm{Spec}(P/(f_1,\dots,f_{n-p}))$.

The following is a generalization of the usual Jacobian criteria for relative situation.

<u>Theorem</u> 5.4. <u>Let</u> $X \xrightarrow{f} Y$ <u>be a morphism of essentially finite presentation. Assume that there exists a fixed integer</u> $n \geq 0$ <u>with either conditions:</u>

(1) f <u>is flat and</u> $\dim_x X_{f(x)} = n$ <u>for every point</u> $x \in X$.

(2) f <u>is a relative complete-intersection with virtual dimension</u> n (SGA6 VIII 1.9).

<u>Then</u> $x \notin J^n_X(X|Y)$ <u>if and only if</u> f <u>is smooth at</u> x .

<u>Proof:</u> We have, by 5.3(4) that $x \notin J^n_X(X|Y)$ if and only if there exists a diagram

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & U' \arrow[dl, "f'"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

such that f' is smooth at x' and $\dim_{x'} U'_{f(x)} = n$, where i is a closed immersion and $x' = i(x)$. Thus it suffices to show that either conditions (1) or (2) entails the isomorphism of i at the point x. Set $A = \underline{O}_{Y,f(x)}$, $B' = O_{U',x'}$, $B = O_{U,x}$ and let

$$0 \to I \to B' \to B \to 0$$

be exact. We must show that $I = 0$. Assume (1). Since B is A-flat,

$$0 \to I/\underline{m}I \to B'/\underline{m}B' \to B/\underline{m}B \to 0$$

is exact where $\underline{m}$ is the maximal ideal of A. By hypothesis, $\dim_x U_{f(x)} = \dim_{x'} U'_{f(x)}$ so that $\dim B'/\underline{m}B' = \dim B/\underline{m}B$. However $B'/\underline{m}B'$ is a regular local ring and therefore it entails that $I/\underline{m}I = 0$ so that $I = 0$. Now assume (2), and consider the exact sequence

$$I/I^2 \xrightarrow{d} B \otimes_{B'} \Omega_{B'|A} \to \Omega_{B|A} \to 0$$

Since X is a relative complete-intersection over Y and $U' \to Y$ is smooth at x, it follows that $d : I/I^2 \to B \otimes_{B'} \Omega_{B'|A}$ is injective at x and I/I^2 and $B \otimes_{B'} \Omega_{B'|A}$ are both free at x. Therefore by the definition of virtual dimension of relative complete-intersection we must have that

$$n = \dim_{\kappa(x)} \Omega_{B'|A}(x') - \dim_{\kappa(x)} I/I^2(x) = n - \dim_{\kappa(x)} I/I^2(x)$$

i.e., $I/I^2 = 0$ i.e., $I = 0$.

<u>Definition</u> 5.5. <u>Let</u> $X \xrightarrow{f} Y$ <u>be a morphism of essentially finite presentation. In case when there exists a fixed integer</u> n <u>with the property</u> (1) <u>or</u> (2) <u>in</u> 5.4,

we set $\underline{I}_X(X|Y) = \underline{I}_X^n(X|Y)$ *and* $J_X(X|Y) = J_X^n(X|Y)$.

We can extend this notion to formal schemes in an obvious manner.

Thus let $\mathfrak{X}$ be a noetherian formal scheme and $\underline{E}$ a coherent $\mathfrak{X}$-module. Then we can define the ideal sheaf $\underline{I}_{\mathfrak{X}}^P(\underline{E})$ by setting

$$\underline{I}_{\mathfrak{X}}^P(\underline{E})(U) = I_{\mathfrak{X}(U)}^P(\underline{E}(U))$$

for every affine open $U \subset \mathfrak{X}$. If $\mathfrak{X} = \varinjlim_{v} X_v$, then $\underline{E} = \varinjlim_{v} \underline{E}_v$ where $\underline{E}_v = \underline{E} \otimes_{\underline{O}_{\mathfrak{X}}} \underline{O}_{X_v}$ and it follows from the fact that $\mathfrak{X}$ is noetherian that

$$\underline{I}_{\mathfrak{X}}^P(\underline{E}) = \varprojlim_{v} \underline{I}_{X_v}^P(\underline{E}_v)$$

Now let S be a noetherian formal scheme and $\mathfrak{X}$ an S-adic formal scheme of essentially finite type. Let $\underline{I}_{\mathfrak{X}}$ be the ideal sheaf defining the closed immersion $\Delta : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ (= the fibre-product in the category of formal schemes) i.e.,

$$0 \to \underline{I}_{\mathfrak{X}} \to \underline{O}_{\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}} \to \underline{O}_{\mathfrak{X}} \to 0$$

is exact. We define $\underline{\Omega}_{\mathfrak{X}|S} = \underline{I}_{\mathfrak{X}}/\underline{I}_{\mathfrak{X}}^2$. Since $\mathfrak{X}$ is an S-adic formal scheme of essentially finite type, it follows that $\mathfrak{X} = \varinjlim_{v} X_v$ where $X_v = \mathfrak{X} \times_S S_v$, and hence $\underline{\Omega}_{\mathfrak{X}|S} \simeq \varprojlim_{v} \underline{\Omega}_{X_v|S_v}$ is a coherent $\mathfrak{X}$-module. We note that for any formal S-scheme S' of finite type, we have a canonical isomorphism

$$\underline{\Omega}_{\mathfrak{X} \times_S S'|S'} \simeq \underline{O}_{S'} \otimes_{\underline{O}_S} \underline{\Omega}_{\mathfrak{X}|S} \quad .$$

Definition 5.6. Let S *be a noetherian formal scheme and* $\mathfrak{X}$ *an S-adic formal scheme of essentially finite type. We define the ideal sheaf* $\underline{I}_{\mathfrak{X}}^p(\mathfrak{X}|S)$ *by*

$$\underline{I}_{\mathfrak{X}}^p(\mathfrak{X}|S) = \underline{I}_{\mathfrak{X}}^p(\underline{\Omega}_{\mathfrak{X}|S})$$

and we set $J_{\mathfrak{X}}^p(\mathfrak{X}|S)$ *the formal closed subscheme of* $\mathfrak{X}$ *defined by* $\underline{I}_{\mathfrak{X}}^p(\mathfrak{X}|S)$.

Since $\Omega_{\mathfrak{X}|S} = \varprojlim_{n} \Omega_{X_n|S_n}$ we have

$$I^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S) = \varprojlim_n I^p_{X_n}(X_n|S_n)$$

$$J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S) = \varinjlim_n J^p_{X_n}(X_n|S_n) \quad .$$

$\mathfrak{X}_{(x)}$ is an S-adic formal scheme of essentially finite type and we have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}_{(\hat{x})} \arrow[rr, "i_{(\hat{x})}"] \arrow[dr] & & \mathfrak{X} \\
& \mathfrak{X}_{(x)} \arrow[ur, "i_{(x)}"'] &
\end{tikzcd}$$

We note that if x is an isolated point of $\mathfrak{X}$, then $i_{(x)}$, $i_{(\hat{x})}$ are both isomorphisms to the connected component of $\mathfrak{X}$ containing the point x .

In particular, if $|\mathfrak{X}| = \{x_1,\dots,x_m\}$ is a finite discrete space, then we have a canonical identification $\mathfrak{X} = \coprod_{1\leq i\leq m} \mathfrak{X}_{(x_i)}$ (disjoint union).

Corollary 5.7. Let S be a noetherian formal scheme, and $\mathfrak{X}$ an S-adic formal scheme of essentially finite type. We then have

(1) $J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)$ commutes with base change i.e., $J^p_{\mathfrak{X}'}(\mathfrak{X}'|S') = J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S) \times_S S'$ where $\mathfrak{X} = \mathfrak{X} \times_S S'$.

(2) The connected components of $J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)$ is in bijective correspondence with that of $J^p_{X_0}(X_0|S_0)$. For each point $x \in |J^p_{X_0}(X_0|S_0)|$ we have a canonical isomorphism $J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)_{(x)} \simeq J^p_{\mathfrak{X}_{(x)}}(\mathfrak{X}_{(x)}|S)$. In particular if

$$|J^p_{X_0}(X_0|S_0)| = \{x_1,\dots,x_m\}$$

is discrete, then

$$J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S) - \coprod_{1\leq i\leq m} J^p_{\mathfrak{X}_{(x_i)}}(\mathfrak{X}_{(x_i)}|S)$$

(disjoint union).

(3) Let S be an ordinary noetherian scheme and X an S-scheme of essentially finite type. Given a closed subscheme $S_0 \subset S$, let $\hat{S}$ be the formal completion of S along S_0.

If we set

$\hat{X} = X \underset{S}{\times} \hat{S}$ = the formal completion of X along $X_0 = X \underset{S}{\times} S_0$, then

$J^p_{\hat{X}}(\hat{X}|\hat{S}) = J^p_X(X|S) \underset{S}{\times} \hat{S}$ = the formal completion of $J^p_X(X|S)$ along $J^p_{X_0}(X_0|S_0)$.

(4) If there exists a fixed integer $n \geq 0$ with the property 5.4(1) or (2) for $X_\nu \to S_\nu$ for all ν, then $x \notin J^n_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)$ if and only if $\mathfrak{X}$ is formally smooth over S at x.

Proof: (1) follows from $\underline{\Omega}_{\mathfrak{X}'|S'} \simeq \underline{O}_{S'} \hat{\otimes}_{\underline{O}_S} \underline{\Omega}_{\mathfrak{X}|S}$ whereas (2) follows from $\underline{O}_{\mathfrak{X}_{(x)}} \hat{\otimes}_{\underline{O}_{\mathfrak{X}}} \underline{\Omega}_{\mathfrak{X}|S} \simeq \underline{\Omega}_{\mathfrak{X}_{(x)}|S}$.

(3) $J^p_{\hat{X}}(\hat{X}|\hat{S}) = \varinjlim_{\nu} J^p_{X \times_S S_\nu}(X \times_S S_\nu|S_\nu) = \varinjlim_{\nu} J^p_X(X|S) \times_S S_\nu = J^p_X(X|S) \times_S \hat{S}$.

(4) Since $\mathfrak{X}$ is an S-adic formal scheme, $\mathfrak{X} \to S$ is formally smooth at $x \Leftrightarrow X_\nu \to S_\nu$ is formally smooth at x for all $\nu \Leftrightarrow x \notin J^n_{X_\nu}(X_\nu|S_\nu)$ for all ν
$\Leftrightarrow x \notin \varinjlim_{\nu} J^n_{X_\nu}(X_\nu|S_\nu) = J^n_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)$.

Remark 5.8. Let $\mathfrak{X}$ be an S-adic formal scheme of essentially finite type. Given a point $x \in \mathfrak{X}$ we also consider the S-adic formal scheme $\mathfrak{X}_{(\hat{x})} = \varinjlim_{\nu} \operatorname{Spec}(\widehat{\underline{O}_{X_\nu,x}})$. We thus have the natural morphisms $\mathfrak{X}_{(\hat{x})} \to \mathfrak{X}_{(x)} \to \mathfrak{X}$. Now $\widehat{\underline{O}_{X_0,x}}$ is in general not essentially finite type over $S_{(y)}$ where y = the image of x under $\mathfrak{X} \to S$. For simplicity, let us set $A_\nu = \underline{O}_{X_\nu,x}$, $R_\nu = \underline{O}_{S_\nu,y}$. Now the natural map $\Omega_{A_\nu|R_\nu} \to \Omega_{\hat{A}_\nu|R_\nu}$ induces an isomorphism $\widehat{\Omega_{A_\nu|R_\nu}} \to \widehat{\Omega_{\hat{A}_\nu|R_\nu}}$, and therefore $\varprojlim_{\nu} \widehat{\Omega_{A_\nu|R_\nu}} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\nu} \widehat{\Omega_{\hat{A}_\nu|R_\nu}}$ where $\widehat{\ }$ stands for the separable completion of a module with respect to the topology induced from the ring. Therefore if we define $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_{(\hat{x})}|S} = \varprojlim_{\nu} \widehat{\Omega_{\underline{O}_{X_\nu,x}|\underline{O}_{S_\nu}}}$, then $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{X}_{(\hat{x})}|S}$ is a coherent $\mathfrak{X}_{(\hat{x})}$-module. Thus if we set $J^p_{\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})}}(\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})}|S)$ to be the formal closed subscheme of $\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})}$ defined by the ideal sheaf $I^p_{\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})}}(\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})}|S) = I^p_{\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})}}(\Omega_{\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})}}|S)$, then we have

$$J^p_{\mathfrak{X}_{(x)}}(\mathfrak{X}_{(x)}|S)_{(\mathfrak{x})} \simeq J^p_{\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})}}(\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})}|S) \ .$$

We note that if x is an isolated point of $J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)$, then $J^p_{\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})}}(\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})}|S) \to J^p_{\mathfrak{X}_{(x)}}(\mathfrak{X}_{(x)}|S)$ is an isomorphism.

To consider the "image" of $J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)$ under the morphism $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} S$, one may simply take the formal subscheme of S defined by the ideal sheaves $\mathrm{Ker}(\underline{O}_S \to \underline{O}_{\mathfrak{X}}/I^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S))$. However, it is more convenient for our purpose to use the Fitting ideal again.

Definition 5.9. Let S be a noetherian formal scheme and $f : \mathfrak{X} \to S$ an S-adic formal scheme of essentially finite type. Assume that $J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)$ is proper over S , so that $f_*\underline{O}_{J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)}$ is a coherent $\underline{O}_S$-module. We then define the ideal sheaf $\underline{I}^p_S(\mathfrak{X}|S)$ of $\underline{O}_S$ by

$$\underline{I}^p_S(\mathfrak{X}|S) = \underline{I}^0_S(f_*\underline{O}_{J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)})$$

and set $J^p_S(\mathfrak{X}|S)$ to be the closed formal subscheme of S defined by the ideal sheaf $\underline{I}^p_S(\mathfrak{X}|S)$. In case when there exists a fixed integer n having the property (1) or (2) in 5.4 for $X_v \to S_v$ for all v , we set

$$\underline{I}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S) = \underline{I}^n_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S) \ , \qquad J_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S) = J^n_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)$$

$$\underline{I}_S(\mathfrak{X}|S) = \underline{I}^n_S(\mathfrak{X}|S) \ , \qquad J_S(\mathfrak{X}|S) = J^n_S(\mathfrak{X}|S)$$

Corollary 5.10. Let S be a noetherian formal scheme and $\mathfrak{X} \xrightarrow{f} S$ an S-adic formal scheme, essentially of finite type such that $J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)$ is proper over S . Then

(1) $|J^p_S(\mathfrak{X}|S)|$ = the image of $|J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)|$ under $f : \mathfrak{X} \to S$.

(2) $J^p_S(\mathfrak{X}|S)$ <u>commute with base change</u> i.e., $J^p_{S'}(\mathfrak{X}'|S') = J^p_S(\mathfrak{X}|S) \underset{S}{\times} S'$.

(3) If $J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S) = \coprod_{1 \le i \le m} \mathcal{Y}^{(i)}$ <u>(disjoint union), then</u>

$\underline{I}^p_S(\mathfrak{X}|S) = \prod_{1 \le i \le m} \underline{I}^0_S(f_* \underline{O}_{\mathcal{Y}(i)})$. <u>In particular if</u>

$$|J^p_{X_0}(X_0|S_0)| = \{x_1, \dots, x_m\}$$

<u>is discrete, then</u>

$$\underline{I}^p_S(\mathfrak{X}|S) = \prod_{1 \le i \le m} \underline{I}^p_S(\mathfrak{X}_{(x_i)}|S) = \prod_{1 \le i \le m} \underline{I}^p_S(\mathfrak{X}_{(\hat{x}_i)}|S)$$

(4) <u>Let</u> S <u>be an ordinary noetherian scheme and</u> X <u>an</u> S-<u>scheme of essentially finite type. Given a closed subscheme</u> $S_0 \to S$, <u>let</u> $\hat{S}$ <u>be the formal completion of</u> S <u>along</u> S_0 . <u>If we set</u> $\hat{X} = X \underset{S}{\times} \hat{S}$ = <u>the formal completion of</u> X <u>along</u> $X_0 = X \underset{S}{\times} S_0$, <u>then</u> $J^p_{\hat{S}}(\hat{X}|\hat{S}) = J^p_S(X|S) \underset{S}{\times} \hat{S}$ = <u>the formal completion of</u> $J^p_S(X|S)$ <u>along</u> $J^p_{S_0}(X_0|S_0)$.

<u>Proof</u>: Supp $f_* \underline{O}_{J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)} = |J^p_S(\mathfrak{X}|S)|$ by 5.1(c), and hence (1) follows. (2) and (4) are clear from 5.1(a), and (3) follows from 5.1(d), and the isomorphism $J^p_{\mathfrak{X}_{(\hat{x})}}(\mathfrak{X}_{(\hat{x})}|S) \xrightarrow{\sim} J^p_{\mathfrak{X}_{(x)}}(\mathfrak{X}_{(x)}|S)$ for an isolated point x in $J^p_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|S)$.

<u>Remark</u> 5.11. Our definition of Jacobian ideal, adopted from the classical one over base field, commutes with base change and gives a smoothness criteria under a mild condition of 5.4. However one can define, probably in many different ways, a canonical subscheme which gives the non-smooth locus in a general setting. We shall outline one here: Given an A-algebra B , define $I_{B|A} = \bigcap_E \operatorname{Ann} D^1(B|A,E)$ where E runs through all B-modules of finite type. This ideal $I_{B|A}$ commutes with localizations by 3.13(c), and therefore, given a morphism $X \xrightarrow{f} Y$, we obtain the ideal sheaf $\underline{I}_{X|Y}$. If f is a morphism of essentially finite type, then f is smooth at x if and only if $x \notin \operatorname{Supp} \underline{O}_X/\underline{O}_{X|Y}$ by 3.13(a). This notion is in an obvious way carried over to adic formal schemes of essentially

finite type and thus it is equally suitable for deformation theory.

6. Non-degenerate quadratic singularities

The objective in this section is to investigate the deformations of a k-scheme having non-degenerate quadratic singularities only. In view of 4.13, it becomes purely a local problem in an appropriate situation.

We go back to the notations of §4. Thus Λ is a fixed complete noetherian local ring with the residue field k, and $\underline{C}_\Lambda$ stands for the category of local artinian Λ-algebras with the same residue field k.

Let X be a k-scheme of finite type, and let x be a closed point of X. We recall that the point x is said to be a non-degenerate quadratic singularity rational over k if $\hat{O}_{X,x} - k[[x_1,\dots,x_n]]/(f)$ with $(\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n) = (x_1,\dots,x_n)$. One can always assume f to be a quadratic form. Indeed we have

<u>Lemma</u> 6.1. <u>Let</u> $f \in k[[x_1,\dots,x_n]]$. <u>If</u> $(\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n) = M$ $(= (x_1,\dots,x_n))$, <u>then one can find</u> $x_1',\dots,x_n'$ <u>with</u> $x_i = x_i' \pmod{M^2}$ <u>such that</u> $f = q(x_1',\dots,x_n')$ <u>where</u> q <u>is a quadratic form.</u>

<u>Proof</u>: We do this by a successive approximation. Write $f = f_2 + h_3$ where f_2 is a quadratic form and $h_3 \in M^3$. Since $(\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n) = M$, there exists $\epsilon_1^{(1)},\dots,\epsilon_n^{(1)}$ in M^2 such that $\Sigma\, \epsilon_i^{(1)}\, \partial f/\partial x_i \equiv h_3 \pmod{M^4}$. If we set $x_i^{(1)} = x_i - \epsilon_i^{(1)}$, then $f(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)}) =$
$f(x_1,\dots,x_n) - \Sigma\, \epsilon_i^{(1)}\, \partial f/\partial x_i + \dots \equiv f_2(x_1,\dots,x_n) \pmod{M^4}$ i.e., $f(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)}) \equiv f_2(x_1,\dots,x_n) + h_4$ with $h_4 \in M^4$. Now $(\partial f/\partial x_1^{(1)},\dots,\partial f/\partial x_n^{(1)}) = (\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n) = M$ and therefore we can choose

$\epsilon_1{}^{(2)},\dots,\epsilon_n{}^{(2)}$ in M^3 such that $\Sigma\ \epsilon_i{}^{(2)}\ \partial f/\partial x_u{}^{(1)} \equiv h_4 \pmod{M^5}$. Then $f(x_1{}^{(1)} - \epsilon_1{}^{(2)},\dots,x_n{}^{(1)} - \epsilon_n{}^{(2)}) = f(x_1{}^{(1)},\dots,x_n{}^{(1)}) - \Sigma\ \epsilon_i{}^{(2)}\partial f/\partial x_i{}^{(1)} + \dots$
$\equiv f_2(x_1,\dots,x_n) \pmod{M^5}$. Continuing this process we can find $\epsilon_i{}^{(1)},\ \epsilon_i{}^{(2)},\ \epsilon_i{}^{(3)},\dots$ $(i = 1,2,\dots,n)$ with $\epsilon_i{}^{(v)} \in M^{v+1}$ such that if we set $x_i{}^{(v)} = x_i - (\epsilon_i{}^{(1)} + \dots + \epsilon_i{}^{(v)})$ then $f(x_1{}^{(v)},\dots,x_n{}^{(v)}) \equiv f_2(x_1,\dots,x_n)$ $\pmod{M^{v+3}}$. Thus if we set $\epsilon_i = \sum_v \epsilon_i{}^{(v)}$ then $f(x_1-\epsilon_1,\dots,x_n-\epsilon_n) =$
$= f_2(x_1,\dots,x_n)$ i.e., $f(x_1,\dots,x_n) = f_2(x_1+\epsilon_1,\dots,x_n+\epsilon_n)$.

Lemma 6.2. Let A_0 be a local k-algebra, essentially of finite type such that

$$\hat{A}_0 \simeq k[[x_1,\dots,x_n]]/(f)$$

where f is a non-degenerate quadratic form, and let $(R, \mathfrak{X})$ be a formal versal deformation of $X_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$. Then

(1) $J_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|R) \to J_R(\mathfrak{X}|R) \to \mathrm{Spec}(\Lambda)$ are both isomorphisms.

(2) $J_R(\mathfrak{X}|R)$ is a principal ideal in R generated by a free formal generator of R over Λ i.e. $I_R(\mathfrak{X}|R) = (t)$ and $R = \Lambda[[t]]$.

(3) $\mathfrak{X} \to \mathrm{Spec}(\Lambda)$ is formally smooth.

Proof: We set $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$. By 4.10(b), $(R, \mathrm{Spf}(\hat{A}))$ is a formal versal deformation of $\hat{X}_0 = \mathrm{Spec}(\hat{A}_0)$ where $\hat{A}_0 = \varprojlim_v A \otimes_R R_v$.
Now $\hat{A}_0 \simeq k[[x_1,\dots,x_n]]/(f)$ and $(\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n) = (x_1,\dots,x_n)$ in $k[[x_1,\dots,x_n]]$. It follows readily that $[\underline{M}_{\hat{X}_0}(k[\epsilon])] \simeq k$ and, by 4.14, we get

$$R \simeq \Lambda[[t]] \quad\text{and}\quad \hat{A} \simeq R[[x_1,\dots,x_n]]/(F - t)$$

where F is a quadratic polynomial in $\Lambda[x_1,\dots,x_n]$ $(\subset R[[x_1,\dots,x_n]])$ obtained from f by lifting the coefficients to Λ . Now

$$0 \to \hat{A} \xrightarrow{df} \hat{A}dx_1 \oplus \dots \oplus \hat{A}dx_n \longrightarrow \hat{\Omega}_{\hat{A}|R} \to 0$$

is exact where $df : \hat{A} \to \hat{A}dx_1 \oplus \ldots \oplus \hat{A}dx_n$ is given by $1 \to (\partial f/\partial x_1)dx_1 + \ldots + (\partial f/\partial x_n)dx_n$, and therefore $I_{\hat{A}}(\hat{A}|R) = (\partial F/\partial x_1, \ldots, \partial F/\partial x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$, and hence $\hat{A}/I_{\hat{A}}(\hat{A}|R) = \hat{A}/(x_1, \ldots, x_n) = R[[x_1, \ldots, x_n]]/(x_1, \ldots, x_n, F - t) \simeq \Lambda$ i.e., the canonical map $\Lambda \to \hat{A}/I_{\hat{A}}(\hat{A}|R)$ is an isomorphism. It follows that $\hat{A} \to A/I_A(A|R)$ is an isomorphism, and consequently $\Lambda \to R/I_R(A|R)$ is also an isomorphism. This proves (1) and (2). On the other hand, (3) follows from $\hat{A} \simeq R[[x_1, \ldots, x_n]]/(F - t) \simeq \Lambda[[t, x_1, \ldots, x_n]]/(F - t) \simeq \Lambda[[x_1, \ldots, x_n]]$ as Λ-algebras.

Corollary 6.3. *Let* X_0 *be a k-scheme of finite type, and let* x *in* X_0 *be a non-degenerate quadratic singularity rational over* k .

(1) *Let* $(R, \mathfrak{X})$, $(R, \mathfrak{Y})$ *be any two deformations of* X_0 *where* $R \in ob(\hat{\underline{C}}_\Lambda)$. *Assume that* $k = k^2$. *Then* $\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})} \simeq \mathfrak{Y}_{(\mathfrak{x})}$ *as R-adic formal schemes if and only if* $I_R(\mathfrak{X}_{(x)}|R) = I_R(\mathfrak{Y}_{(x)}|R)$.

(2) *Let* $R \in ob(\hat{\underline{C}}_\Lambda)$ *be a regular local ring, and let* $(R, \mathfrak{X})$ *be a deformation of* X_0 . *Then* $O_{\mathfrak{X},x}$ *is a regular local ring if and only if* $I_R(\mathfrak{X}_{(x)}|R) \notin \underline{m}_R^2$ i.e., *if and only if* $I_R(\mathfrak{X}_{(x)}|R)$ *is a regular divisor in* $Spf(R)$.

Proof: Let (R_0, Z) be a formal versal deformation of $Spec(\hat{\underline{O}}_{X_0,x})$. Since x in X_0 is a non-degenerate quadratic singularity rational over k , we may assume that $R_0 \simeq \Lambda[[t]]$ and $Z \simeq Spf(R_0[[x_1, \ldots, x_n]]/(F - t))$ as in 6.2.

(1) $(R, \mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})})$, $(R, \mathfrak{Y}_{(\mathfrak{x})})$ are deformations of $Spec(\hat{\underline{O}}_{X_0,x})$, and therefore they are induced from (R_0, Z) by continuous local Λ-algebra maps $\varphi, \psi : R_0 \to R$ respectively, i.e., if we set $a = \varphi(t)$, $b = \psi(t)$, then

$$\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})} \simeq Spf(R[[X_1, \ldots, X_n]]/(R - a)) \quad ,$$

$$\mathfrak{Y}_{(\mathfrak{x})} \simeq Spf(R[[X_1, \ldots, X_n]]/(F - b))$$

as R-adic formal schemes. Assume that $I_R(\mathfrak{X}_{(x)}|R) = I_R(\mathfrak{Y}_{(x)}|R)$ i.e.,

$(a) = (b)$ in R . Then $a = ab$ for some unit u in R . Since $k = k^2$ and R is complete, we can write $u = v^2$ for some unit v in R , i.e., $a = v^2 b$. Then $(F - b) = (v^2F - a)$, so that $X_i \to vX_i$ establishes an R-algebra isomorphism $R[[X_1,\dots,X_n]]/(F - a) \xrightarrow{\sim} R[[X_1,\dots,X_n]]/(F - b)$ since F is a quadratic form. The other direction is trivial.

(2) There exists a continuous local Λ-algebra map $\varphi : R_0 = \Lambda[[t]] \to R$ such that $\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})} \simeq \mathrm{Spf}(R[[X_1,\dots,X_n]]/(F - \varphi(t)))$. We note that $I_R(\mathfrak{X}_{(x)}|R) = I_R(\mathfrak{X}_{(\mathfrak{x})}|R) = (\varphi(t))$, and that $R[[X_1,\dots,X_n]]/(F - \varphi(t)) = \hat{\underline{O}}_{\mathfrak{X},x}$ is regular if and only if $\underline{O}_{\mathfrak{X},x}$ is regular. Now R is regular and hence $R[[X_1,\dots,X_n]]$ is also a regular local ring. Thus if we set M to be the maximal ideal of $R[[X_1,\dots,X_n]]$, then $R[[X_1,\dots,X_n]]/(F - \varphi(t))$ is regular if and only if $F - \varphi(t)$ is not in M^2 , i.e. if and only if $\varphi(t) \notin \underline{m}_R{}^2$, i.e., if and only if $I_R(\mathfrak{X}_{(x)}|R) \notin \underline{m}_R{}^2$.

Theorem 6.4. Let X_0 be a k-scheme of finite type with isolated non-smooth points only, and let $(R, \mathfrak{X})$ be a formal versal deformation of X_0 . Denote by $\{z_1,\dots,z_m\}$ the set of non-smooth points in X_0 . Assume that $H^2(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) = 0$, and all z_i's are non-degenerate quadratic singularity rational over k . Then

(1) R is formally smooth over Λ i.e., R is a formal power-series ring over Λ ;

(2) $J_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|R) = \coprod_{1 \le i \le m} J_{\mathfrak{X}_{(z_i)}}(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R)$ (disjoint union), and $J_{\mathfrak{X}_{(z_i)}}(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R) \xrightarrow{\sim} J_R(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R)$ is an isomorphism;

(3) $I_R(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R)$ is a principal ideal and in turn so is $I_R(\mathfrak{X}|R) = \prod_{1 \le i \le m} I_R(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R)$. Furthermore if we set $I_R(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R) = (t_i)$, then $t_1,\dots,t_m$ can be extended to a system of free formal generators of R over Λ (as formal power-series ring over Λ).

(4) $\mathfrak{X} \to \mathrm{Spec}(\Lambda)$ is smooth, i.e. $J_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}|\Lambda) = \varphi$.

(5) <u>If X_0 is a complete irreducible curve, then</u> $\dim \underline{M}_{X_0} = 3g - 3 + a$ <u>where</u> $g = \dim_k H^1(X_0, \underline{O}_{X_0})$ <u>and</u> $a = \dim_k H^0(X_0, \underline{D}^0_{X_0})$.

<u>Proof</u>: (1) follows from (2) and (3): The first statement of (2) follows from 5.7(2). Now let $(R_i, \mathcal{Y}_i)$ be a formal versal deformation of $\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0,z_i})$. Since $(R, \mathfrak{X}_{(\hat{z}_i)})$ is a deformation of $\mathrm{Spec}(\hat{\underline{O}}_{X_0,z_i})$, there exists a continuous local Λ-algebra maps $\varphi_i = R_i \to R$ with a cartesian diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_{(\hat{z}_i)} & \longrightarrow & \mathcal{Y}_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spf}(R) & \xrightarrow[\mathrm{Spf}(\varphi_i)]{} & \mathrm{Spf}(R_i) \end{array}$$

Therefore we have

$$J_{\mathfrak{X}_{(z_i)}}(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R) = J_{\mathfrak{X}_{(\hat{z}_i)}}(\mathfrak{X}_{(\hat{z}_i)}|R) \simeq J_{\mathcal{Y}_i}(\mathcal{Y}_i|R_i) \underset{\mathrm{Spf}(R_i)}{\times} \mathrm{Spf}(R)$$

$$J_R(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R) = J_R(\mathfrak{X}_{(\hat{z}_i)}|R) \simeq J_{R_i}(\mathcal{Y}_i|R_i) \underset{\mathrm{Spr}(R_i)}{\times} \mathrm{Spf}(R) .$$

Since $J_{\mathcal{Y}_i}(\mathcal{Y}_i|R_i) \to J_{R_i}(\mathcal{Y}_i|R_i)$ is an isomorphism by 6.2(1), we have that the canonical morphism $J_{\mathfrak{X}_{(z_i)}}(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R) \to J_R(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R)$ is an isomorphism. Now $I_{R_i}(\mathcal{Y}_i|R_i) = (u_i) = (u_i)$ with $R_i = \Lambda[[u_i]]$ by 6.2(2), and therefore

$$I_R(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R) = I_R(\mathfrak{X}_{(\hat{z}_i)}|R) = (t_i)$$

where $t_i = \varphi_i(u_i)$, and therefore $I_R(\mathfrak{X}|R) = \prod_{1 \le i \le m} I_R(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R) = (\prod_{i=1}^{n} t_i)$.

Now $\underline{M}_{X_0} \to \underline{M}_{X_0,(\hat{z}_1)} \times \dots \times \underline{M}_{X_0,(\hat{z}_m)}$ is smooth by and therefore $R_1 \hat{\otimes}_\Lambda \dots \hat{\otimes}_\Lambda R_m \to R$ is formally smooth by 4.13, which implies that $t_1,\dots,t_m$ is extended to a system of free formal generators of R over Λ .

(4) The projection morphism $\mathfrak{X}_{(\mathfrak{z}_i)} \cong \mathcal{U}_i \times_{\mathrm{Spf}(R_i)} \mathrm{Spf}(R) \to \mathcal{U}_i$ is formally smooth since $\mathrm{Spf}(R) \xrightarrow{\mathrm{Spf}(\varphi_i)} \mathrm{Spf}(R_i)$ is formally smooth. On the other hand, $\mathcal{U}_i \to \mathrm{Spec}(\Lambda)$ is formally smooth by 6.2(3) and therefore $\mathfrak{X}_{(\mathfrak{z}_i)} \to \mathrm{Spec}(\Lambda)$ is formally smooth. Consequently $\mathfrak{X} \to \mathrm{Spec}(\Lambda)$ is formally smooth since $\{z_1, \dots, z_m\}$ is the set of non-smooth points of X_0 .

(5) Since R is formally smooth over Λ and

$$0 \to H^1(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) \to [\underline{M}_{X_0}(k[\epsilon])] \to H^0(X_0, \underline{D}^1_{X_0}) \to 0$$

is exact by 4.4 and 4.11, we have

$$\begin{aligned} \dim \underline{M}_{X_0} &= \dim k \otimes R = \dim_k H^1(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) + \dim H^0(X_0, \underline{D}^1_{X_0}) \\ &= \dim_k H^1(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) + m \ . \end{aligned}$$

Then it suffices to show that

$$\dim_k H^1(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) + m = 3g - 3 + \dim_k H^0(X_0, \underline{D}^0_{X_0})$$

i.e., $\chi(\underline{D}^0_{X_0}) = 3 - 3g + m$

where we set $\chi(\underline{E}) = \dim_k H^0(X_0, \underline{E}) - \dim_k H^1(X_0, \underline{E})$ for any coherent X_0-module $\underline{E}$. Since $\lambda(\underline{D}^0_{X_0})$ does not change when one replaces the base field k by its algebraic closure, we may assume that k is algebraically closed. Set $A = \underline{O}_{X_0, z}$, where z is a non-smooth point of X_0 , and let A' be its normalization. By hypothesis, we have $A \simeq k[[x,y]]/(f)$ where f is a non-degenerate quadratic form. Since k is algebraically closed, we may assume that $f = xy$, i.e., $A \simeq k[[x,y]]/(xy)$. From this we conclude immediately that $\ell(A'/A) = 1$ and $\mathrm{Der}_k(A, \underline{m}_A) = \mathrm{Der}_k(A, A)$. Let C be the conductor of A in A' . Since A is a complete-intersection we must have that $\ell(A/C) = \ell(A'/A) = 1$ so that $C = \underline{m}_A$. We thus obtain that $A' = \{a' \in K \mid a'\underline{m}_A \subset \underline{m}_A\}$ where K is the fraction field of A . We now claim that $\mathrm{Der}_k(A, A) \subset \mathrm{Der}_k(A', A')$ as A-modules contained in $\mathrm{Der}_k(K, K)$. Indeed, let $X \in \mathrm{Der}_k(A, A)$. Then for any $a' \in A'$ and

$x \in \underline{m}_A$ we have $xa' \in \underline{m}_A$ so that $X(xa') \in \underline{m}_A$ and $a'X(x) \in \underline{m}_A$ since $\mathrm{Der}_k(A, \underline{m}_A) = \mathrm{Der}_k(A, A)$. Consequently $X(xa') = a'X(x) + xX(a')$ entails that $xX(a') \in \underline{m}_A$ for all $x \in \underline{m}_A$, and therefore $X(a') \in A'$. Furthermore, the exact sequence

$$0 \to \mathrm{Der}_k(A, A) \to \mathrm{Der}_k(A', A') \to A'/\underline{m}_A A' \to 0$$

entails the exact sequence

$$0 \to \mathrm{Der}_k(A, A) \to \mathrm{Der}_k(A', A') \to A'/C \to 0$$

Therefore if we set X_0' to be the normalization of X_0 , then

$$0 \to \underline{D}^0_{X_0} \to \underline{D}^0_{X_0'} \to \underline{O}_{X_0'}/C \to 0$$

is exact. Since X_0 is locally a complete-intersection, we have $\ell(\underline{O}_{X_0'}/C) = 2\ell(\underline{O}_{X_0'}/\underline{O}_{X_0}) = 2m$, whereas $\chi(\underline{D}^0_{X_0'}) = 3 - 3(g-m)$ by Riemann-Roch theorem. Consequently

$\chi(\underline{D}^0_{X_0}) = \chi(\underline{D}^0_{X_0'}) - \ell(\underline{O}_{X_0'}/C) = 3 - 3(g-m) - 2m = 3 - 3g + m$.

This completes our proof.

Remark 6.5. In the formula 6.4(5), the number $a = H^0(X_0, \underline{D}^0_{X_0})$ can be easily computed in terms of Riemann-Roch theorem. Thus

$$a = \begin{cases} 0 & \text{if } g \geq 2 \\ 1 & \text{if } g = 1 \\ 3 & \text{if } g = 0 \end{cases}$$

Finally we add a remark on characteristic 2. If the characteristic of the base field k is 2 , there is no non-degenerate quadratic form on n variables if n is odd. In other words there does not exist a non-degenerate quadratic singularity of even dimension if $\mathrm{char}\ k = 2$. In this case one may consider a quadratic form of maximum non-degeneracy:

Definition 6.6. *Let X be a k-scheme of finite type. A closed point $z \in X$ is called an ordinary quadratic singularity rational over k if the following holds:*

(i) *If either* char $k \neq 2$ *or* char $k = 2$ *and* $\dim O_{X,z}$ *is odd, then a is a non-degenerate quadratic singularity rational over* k .

(ii) *If* char $k = 2$ *and* $\dim O_{X,z}$ *is even, then* $\bar{k} \underset{k}{\otimes} \hat{O}_{X,z} \simeq \bar{k}[[X_0, X_1, \ldots, X_{2n}]]/(f)$ *with*

$$f = X_0^2 + X_1X_2 + X_3X_4 + \ldots + X_{2n-1}X_{2n}$$

where $\bar{k}$ *is the algebraic closure of* k .

Lemma 6.7. *Let* k *be a field of characteristic* 2 *and set* $A_0 = k[[X_0, X_1, \ldots, X_{2n}]]/(f)$ *where*

$$f = X_0^2 + X_1X_2 + X_3X_4 + \ldots + X_{2n-1}X_{2n} \quad ,$$

and let $(R, \mathfrak{X})$ *be a formal versal deformation of* $X_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$. *Then* $R = \Lambda[[t, t_1]]$, *where* t, t_1 *are free formal generators of* R *over* Λ , *such that* $I_R(\mathfrak{X}|R) = (t^2)$, *and* $\mathfrak{X} \to \mathrm{Spec}(\Lambda)$ *is formally smooth.*

Proof: We set $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$. Since

$$(f, \frac{\partial f}{\partial X_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial X_{2n}}) = (X_0^2, X_1, \ldots, X_{2n}) \quad ,$$

it follows that $D^1(A_0|k, A_0) \simeq k[X_0]/(X_0^2)$ and therefore $[\underline{M}_{X_0}(k[\epsilon])]$ is 2-dimensional vector space over k . Furthermore, it follows from 4.14 that

$$R \simeq \Lambda[[t, t_1]] \text{ and } A \simeq R[[X_0, X_1, \ldots, X_{2n}]]/(F)$$

where $F = f + t_1 + tX_0$. Now the exact sequence

$$0 \to A \xrightarrow{dF} AdX_0 \oplus \ldots \oplus AdX_{2n} \to \hat{\Omega}_{A|R} \to 0$$

where

$$dF = 1 \to \sum_{0 \leq i \leq 2n} \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i + dX_0 \quad ,$$

entails that

$$I_A(A|R) = (t, x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = (x_0^2 + t_1, t, x_1, \ldots, x_{2n})$$

so that

$$A/I_A(A|R) \simeq A/(x_0^2 + t_1, t, x_1, \ldots, x_{2n}) \simeq \Lambda[[t_1, x_0]]/(x_0^2 - t_1) \quad .$$

Since $\Lambda[[t_1, x_0]]/(x_0^2 - t_1) \simeq R/(t) \oplus R/(t)$ as R-modules, it follows that $I_R(A|R) = (t^2)$, which proves our first assertion. On the other hand,

$$A \simeq \Lambda[[t, t_1, x_o, x_1, \ldots, x_{2n}]]/(X_0^2 + X_1X_2 + \ldots + X_{2n-1}X_{2n} + tX_0 + t_1)$$
$$\simeq \Lambda[[t, X_0, X_1, \ldots, X_{2n}]]$$

and therefore A is formally smooth over Λ .

The above statement 6.7 yields a similar result as 6.4, proof of which we leave to the readers.

Corollary 6.8. Let X_0 be a k-scheme of finite type with isolated non-smooth points only such that $H^2(X_0, \underline{D}^0_{X_0}) = 0$, and let $(R, \mathfrak{X})$ be a formal versal deformation of X_0 . Denote by $\{z_1, \ldots, z_m\}$ the set of non-smooth points in X_0 , and assume that char $k = 2$, dim X_0 is even, and all z_i's are ordinary quadratic singularities. Then

(1) R is formally smooth over Λ

(2) $I_R(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R)$ is a principal ideal and in turn so is $I_R(\mathfrak{X}|R) = \prod_{1 \le i \le m} I_R(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R)$. Furthermore, $I_R(\mathfrak{X}_{(z_i)}|R) = (t_i^2)$ and $t_1, \ldots, t_m$ can be extended to a system of free formal generators of R over Λ .

(3) $\mathfrak{X} \to \mathrm{Spec}(\Lambda)$ is formally smooth

(4) If k is algebraically closed and X_0 is a complete irreducible curve, then $\dim \underline{M}_{X_0} = 3g - 3 + a$ where $g = \dim_k H^1(X_0, \underline{O}_{X_0})$ and $a = \dim_k H^0(X_0, \underline{D}^0_{X_0})$.

E X P O S E VII

BIEXTENSIONS DE FAISCEAUX DE GROUPES

par A. Grothendieck

0. Introduction

La notion de biextension a été introduite par D. MUMFORD [6], dans le contexte des groupes formels, pour exprimer de façon commode les relations entre les groupes formels associés à un schéma abélien et le schéma abélien dual. Dans le présent exposé, nous faisons une étude systématique de cette notion dans le contexte général des faisceaux en groupes sur un site donné, et montrons notamment que cette notion s'insère de façon remarquablement simple dans le formalisme cohomologique classique des $\overset{L}{\otimes}$ et $\underline{RHom}$ (3.6.4 et 3.6.5). Dans l'exposé suivant, nous expliciterons les cas particuliers les plus intéressants, et notamment le cas des biextensions de schémas en groupes par le groupe multiplicatif $\underline{G}_m$ (en travaillant avec des sites tels que le site zariskien, ou le site fpqc, ou quelque site intermédiaire) ; on verra en particulier que si A et B sont deux schémas abéliens sur un schéma S, les biextensions de (A,B) par $\underline{G}_m$ ont une interprétation remarquable comme étant, essentiellement, les classiques correspondances divisorielles sur A,B . Ainsi se trouve explicité de façon fort commode la signification cohomologique de la notion de correspondance divisorielle (implicite déjà dans le théorème de dualité de Tate des variétés abéliennes sur des corps p-adiques). Cette interprétation des correspondances divisorielles est également commode pour "suivre" le destin d'une telle correspondance, quand on fait "dégénérer"

A et B (supposés définis sur le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète) à l'aide de la théorie de Néron : les résultats de VIII nous montreront qu'on trouve par exemple une biextension du couple des composantes neutres des modèles de Néron, d'où une biextension des fibres spéciales connexes des modèles de Néron, jouant le rôle d'une spécialisation de la correspondance divisorielle de départ. Ces résultats seront utilisés dans IX, en conjonction avec le théorème de monodromie (I 3), pour prouver certains résultats sur les modèles de Néron des variétés abéliennes (le plus important étant le "théorème de réduction semi-stable" pour le modèle de Néron).

Dans tout ce qui suit, on travaille (sauf mention expresse du contraire) dans un $\underline{U}$-topos fixé, noté $\underline{T}$, i.e. (SGA 4 IV) $\underline{T}$ est une catégorie équivalente à la catégorie des faisceaux sur un $\underline{U}$-site convenable (qu'on peut prendre, si on veut, égal à $\underline{T}$, muni de sa topologie canonique). On identifiera souvent, dans la terminologie, les objets de $\underline{T}$ avec les faisceaux (d'ensembles) sur $\underline{T}$. Les Groupes, extensions de Groupes etc. dont il s'agira seront tous relatifs à ce topos $\underline{T}$.

1. Compléments sur les extensions de Groupes

1.1. Soient P et G deux Groupes de $\underline{T}$, et

(1.1.1) $$1 \longrightarrow G \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} P \longrightarrow 1$$

une extension de P par G ; donc E est un Groupe, $j : E \longrightarrow P$ est un épimorphisme de Groupes, et i induit un isomorphisme de G avec Ker j. Nous allons réinterpréter la donnée d'une telle extension en termes différents, qui nous seront commodes dans la définition et l'étude des biextensions.

1.1.2. Tout d'abord, l'homomorphisme i permet de faire opérer G de deux façons sur E, à gauche et à droite, en posant

$$gxg' = i(g)xi(g')$$

pour $g,g' \in G(S)$, $x \in E(S)$ (S un objet quelconque de $\underline{T}$). Si on considère E grâce à j comme un objet "au-dessus de P" i.e. comme un objet du topos induit $E_{/P}$, alors il revient au même de dire que le groupe induit $G_P = G \times P$ par G dans $\underline{T}_{/P}$ opère sur E à gauche et à droite. De plus, il est bien connu que l'une et l'autre opération fait de E un <u>torseur</u> (à gauche resp. à droite) sur P, de groupe G_P , et que l'on obtient même, plus précisément, un <u>bitorseur</u> sous (G_P,G_P). Rappelons [2] que cela signifie que E est un torseur à droite E_d par l'action droite de G_P , et que l'action gauche induit un isomorphisme de G_P avec le Groupe des automorphismes de E_d (= faisceau en groupes des automorphismes de E qui commutent à l'action droite de G_P sur E). Cette condition est équivalente à la condition symétrique, savoir que l'action gauche de G_P sur E fait de E un torseur à gauche E_s, et que l'action droite induit un isomorphisme du Groupe opposé G_P° de G_P avec le Groupe des automorphismes de E_s.

1.1.2.1. Lorsque $\underline{T}$ est le "topos ponctuel" i.e. est la catégorie des ensembles (équivalente à la catégorie des faisceaux sur l'espace topologique ponctuel), donc que P et G sont des groupes ordinaires, alors la donnée d'un bitorseur E sous (G_P,G_P) équivaut manifestement à la donnée, pour tout $p \in P$, d'un bitorseur E_p sous (G,G) (savoir la fibre de E en p). Une interprétation analogue peut-être donnée dans le cas général, par la remarque que la donnée d'un bitorseur E sous (G_P,G_P) équivaut à la donnée, pour tout "point" $p \in P(S)$ (S un objet quelconque de $\underline{T}$), d'un bitorseur E_p sous le couple de Groupes (G_S, G_S) sur S, de façon que la formation de E_P soit "compatible avec les changements de base pour tout morphisme $S' \longrightarrow S$" ; i.e. si $p' : S' \longrightarrow P$ est le morphisme composé, on suppose donné de plus un isomorphisme de bitorseurs de P_p, avec l'image inverse de P_p par $S' \to S$, - ces isomorphismes étant soumis à la condition habituelle de transitivité pour le cas d'un composé de deux morphismes $S'' \to S' \longrightarrow S$. Quand on explicite cet énoncé en langage canonique (SGA 1 VI), il se réduit à la tautologie suivante : la donnée d'un bitorseur sous le couple de Groupes (G_P, G_P) sur P équivaut à une section cartésienne, sur la catégorie $\underline{T}_{/P}$, de la catégorie fibrée des bitorseurs de groupe (G_S, G_S) sur une base variable $S \in \mathrm{ob}\, \underline{T}_{/P}$; plus précisément encore, le foncteur "valeur en P" induit une équivalence de la catégorie des sections cartésiennes en question, avec la catégorie des bitorseurs sous (G_P, G_P). Cet énoncé résulte bien entendu trivialement du fait que P est objet final de la catégorie base $\underline{T}_{/P}$ de notre catégorie fibrée ; donc pour <u>toute</u> catégorie fibrée sur $\underline{T}_{/P}$ le foncteur "valeur en S" est une équivalence entre la catégorie des sections cartésiennes de ladite catégorie fibrée, et la catégorie fibre en P. Néanmoins, malgré la nature tautologique, cette interprétation nous sera utile pour exprimer certaines compatibilités dans un langage proche du cas "ensembliste", en utilisant des points à valeurs dans un objet S au lieu des points ordinaires.

1.1.3. La structure de bitorseur 1.1.2 sous (G_P, G_P) sur E, en termes de la structure d'extension (1.1.1), n'utilisait qu'une partie de la structure multiplicative de E, savoir la multiplication de couples de "points" dont l'un au moins provient d'un point de G (via i). Nous allons maintenant interpréter la structure multiplicative de E comme une structure supplémentaire sur le bitorseur envisagé. Pour ceci, considérons d'abord deux sections p, p' de P, d'où, avec les notations de 1.1.2.1 , deux bitorseurs E_p , $E_{p'}$ sous (G,G), savoir les images inverses dans E desdites sections p,p' : e $\longrightarrow$ P (NB e désigne l'objet final de $\underline{T}$). Il est trivial alors que la multiplication de E induit un morphisme d'objets de $\underline{T}$

$$\varphi : P_p \times P_{p'} \longrightarrow P_{pp'}$$

qui satisfait, en termes des structures gauches et droites des trois bitorseurs en jeu (et en prenant comme d'habitude des points à valeurs dans un objet S $\in$ ob $\underline{T}$ arbitraire)

$$(1.1.3.0) \qquad \begin{cases} \varphi(gx,x') = g\,\varphi(x,x') \ , \ \varphi(x,x'g') = \varphi(x,x')g' \\ \varphi(xg,x') = \varphi(x,gx') \end{cases}$$

$(g,g' \in G(S),\ x \in P_p(S),\ x' \in P_{p'}(S))$. La troisième de ces relations s'interprète, en termes du produit fibré contracté [2]

$$P_p \overset{G}{\times} P_{p'} \quad ,$$

en disant que le morphisme φ se factorise en

$$P_p \times P_{p'} \longrightarrow P_p \overset{G}{\times} P_{p'} \xrightarrow{\varphi_{p,p'}} P_{pp'} \quad ,$$

où la première flèche est le morphisme canonique de passage au quotient. D'autre part, les deux premières relations signifient que le morphisme

$$(1.1.3.1) \qquad \varphi_{p,p'} \ : \ P_p \overset{G}{\times} P_{p'} \longrightarrow P_{pp'}$$

qu'on vient d'obtenir est un homomorphisme de bitorseurs, compte tenu de la structure de bitorseur sur le premier membre pour laquelle les opérations gauches (resp. droites) de G proviennent des opérations gauches (resp. droites) de G sur le premier facteur P_p (resp. sur le deuxième facteur $P_{p'}$). Notons que (comme tout homomorphisme de bitorseurs sous un couple de Groupes donné) l'homomorphisme $\varphi_{p,p'}$ est nécessairement un isomorphisme.

La définition de l'isomorphisme précédent (1.1.3.1) s'étend aussitôt au cas où p,p', au lieu d'être des sections de P, sont des points de P à valeurs dans un objet quelconque S de $\underline{T}$: il suffit d'appliquer ce qui précède au topos induit $\underline{T}_{/S}$ et à l'extension de Groupes sur S déduite de (1.1.1) par changement de base . On constate alors que la formation des isomorphismes $\varphi_{p,p'}$ précédents est "compatible avec tout changement de base" $S' \longrightarrow S$ (i.e. correspond à un homomorphisme de sections cartésiennes de la catégorie fibrée qu'on pense sur la catégorie $\underline{T}_{/P\times P}$ des doubles flèches $p,p' : S \rightrightarrows P$ de but P). La donnée du système des $\varphi_{p,p'}$ satisfaisant cette condition revient encore, bien entendu, à la donnée de $\varphi_{p,p'}$ dans le cas "universel", correspondant au cas où $S=P\times P$ et où p,p' sont respectivement les deux projections pr_i (i=1,2) de $P\times P$ dans P. Il s'interprète alors comme un isomorphisme de bitorseurs sous $(G_{P\times P}, G_{P\times P})$:

(1.1.3.2) $$\varphi : pr_1^*(E)\ pr_2^*(E) \xrightarrow{\sim} \pi^*(E) \quad ,$$

où

$$\pi \ : \ P\times P \longrightarrow P$$

est le morphisme d'objets de $\underline{T}$ définissant la structure multiplicative du Groupe P. C'est cependant sous la forme des données (1.1.3.1) que les propriétés de compatibilité qui vont suivre s'énoncent le plus commodément, en évitant le recours à des diagrammes moins proches de l'intuition.

1.1.4. En écrivant les relations (1.1.3.0), qui nous ont permis d'exprimer la loi de composition donnée sur E en termes d'isomorphismes de bitorseurs (1.1.3.1), on a utilisé l'associativité de cette loi de composition seulement dans le cas du produit de trois "points" de E dont un au moins provient d'un point de G. Si on veut exprimer l'associativité complète en termes des $\varphi_{p,p'}$, on est amené à écrire, pour trois points p,p',p'' de P (à valeurs dans un objet S de $\underline{T}$), que le diagramme suivant est commutatif :

(1.1.4.1)

$$
\begin{tikzcd}
 & E_{pp'}E_{p''} \arrow[dr, "\varphi_{pp',p''}"] & \\
E_pE_{p'}E_{p''} \arrow[ur, "\varphi_{p,p'}\wedge id"] \arrow[dr, "id\wedge\varphi_{p',p''}"'] & & E_{pp'p''} \\
 & E_pE_{p'p''} \arrow[ur, "\varphi_{p,p'p''}"'] &
\end{tikzcd}
$$

.

Dans ce diagramme, nous avons écrit le produit contracté de bitorseurs sans signes $\overset{G_S}{x}$, étant entendu que la multiplication contractée de deux bitorseurs Q.R se fait en utilisant (pour le passage au quotient dans Q×R) l'opération du groupe structural G <u>à droite sur</u> Q <u>et à gauche sur</u> R. On sait par ailleurs que cette opération de produit contracté est associative à un isomorphisme canonique près [2], et nous faisons l'identification $(E_pE_{p'})E_{p''} \simeq E_p(E_{p'}E_{p''})$, en écrivant simplement les deux membres comme $E_pE_{p'}E_{p''}$. Les conventions évidentes de cette nature seront utilisées dans la suite de cet exposé, sans être expressément signalées à chaque fois.

1.1.4.2. De même que la donnée des isomorphismes $\varphi_{p,p'}$ (1.1.3.1) se ramène au cas "universel" $S=P\times P$, $p=pr_1, p' = pr_2$ envisagé dans (1.1.3.2), de même pour la vérification des conditions d'associativité (1.1.4.1), on peut encore se borner au cas "universel" où $S=P\times P\times P$, $p=pr_1, p'=pr_2, p''=pr_3$. Nous laissons au lecteur le soin d'écrire le diagramme en question avec les notations de son choix.

1.1.5. Réciproquement, les Groupes P et G de $\underline{T}$ étant supposés donnés, supposons donné de plus un bitorseur

(1.1.5.1) $$j : E \longrightarrow P$$

sous (G_P, G_P) (NB les deux actions de G_P sur E, ou ce qui revient au même, de G sur P, sont sous-entendues dans les notations), et d'autre part un système d'isomorphismes de bitorseurs sur une base S variable

(1.1.5.2) $$\varphi_{p,p'} \ : \ E_p E_{p'} \xrightarrow{\sim} E_{pp'} \qquad (p,p' \in P(S)),$$

compatibles avec changement de base $S' \longrightarrow S$; en d'autres termes, un isomorphisme de bitorseurs (1.1.3.2). Supposons que les diagrammes correspondants (1.1.4.1) sont commutatifs. Je dis qu'il existe sur E une unique structure d'extension de P par G, telle que les données précédentes se déduisent de cette structure par les constructions de 1.1.2 et 1.1.3.

Notons d'abord que lorsqu'on prend dans (1.1.5.2) pour p,p' la section unité 1 de P, on trouve un isomorphisme

(1.1.5.3) $$\varphi_{1,1} : E_1 \xleftarrow{\sim} E_1 \overset{G}{\times} E_1 \quad ,$$

d'où, en prenant le produit contracté (à gauche, disons) des deux membres avec le bitorseur inverse E_1^{-1} de E_1 [2], un isomorphisme canonique

(1.1.5.4) $$E_1 \xrightarrow{\sim} \text{bitorseur unité } {}_sG_d$$

(= G opérant sur lui-même par translations gauche et droite), compte tenu de l'isomorphisme canonique

$$E_1^{-1}.E_1 \xrightarrow{\sim} \text{bitorseur unité } {}_sG_d$$

de loc.cit (valable pour tout bitorseur). Il revient au même de dire qu'on a une section 1_E de E_1 donc de E :

(1.1.5.5) $$1_E \in \Gamma(E_1) = \mathrm{Hom}(e,E_1) \subset \Gamma(E)$$

(savoir l'image par (1.1.5.4) de la section marquée de ${}_sG_d$), satisfaisant la relation

$$g.1_E = 1_E.g \quad (g \in G(S)) \quad ,$$

et par construction cette section est caractérisée par la condition

(1.1.5.6) $$\varphi_{1,1}(1_E,1_E) = 1_E \quad .$$

D'autre part, la donnée d'un morphisme de torseurs φ (1.1.3.2) équivaut manifestement à la donnée d'un morphisme

(1.1.5.7) $$\pi_E : E\times E \longrightarrow E \quad , \quad \text{noté aussi } (x,y) \longmapsto xy$$

satisfaisant les conditions

(1.1.5.8) $$j(xy) = j(x)j(y) \qquad (x,y \in E(S))$$

(i.e. j est compatible avec les structures multiplicatives π_E resp. π sur E resp. P), et les trois relations (1.1.3.0) (en commençant de préférence par la dernière de celles-ci). Enfin, on définit un morphisme d'objets de $\underline{T}$

$$i : G \longrightarrow E$$

par la formule

(1.1.5.9) $$i(g) = g.1_E = 1_E.g$$

(l'identité des deux derniers membres dans cette formule ayant déjà été noté avec la construction de 1_E). Ceci posé, je dis que <u>la loi de multiplication</u> π_E <u>sur</u> E <u>fait de</u> E <u>un</u> Groupe, <u>admettant</u> 1_E <u>comme section unité</u>, <u>que</u> $j : E \to P$ <u>et</u> $i : G \to E$ <u>sont des homomorphismes de Groupes qui font du Groupe</u> E <u>une extension de</u> P <u>par</u> G.

En effet, l'associativité de la loi de composition de E n'est autre que la commutativité des diagrammes (1.1.4.1). La construction de π_E via les isomorphismes $\varphi_{p,p'}$ (1.1.3.1) montre d'autre part que pour tout $x \in E(S)$, les translations à gauche et à droite par x dans E(S) sont injectives. Comme $1_E 1_E = 1_E$ par (1.1.5.6), on en conclut aussitôt que 1_E est une unité bilatère de E. Nous laissons au lecteur la vérification de l'existence d'un inverse d'un $x \in E(S)$ sur $p \in P(S)$, utilisant un isomorphisme canonique déduit de $\varphi_{p,p^{-1}}$:

(1.1.5.10) $$P_{p^{-1}} \simeq (P_p)^{\circ} \quad .$$

Donc E est bien un <u>Groupe</u>. On a déjà signalé que j est compatible avec les lois de composition (1.1.5.8), et il en est de même de i, car on aura, pour $g,g' \in G(S)$:

$i(g)i(g') = (g.1_E)(g'.1_E) = (g.1_E.g')\ 1_E$ (dernière relation de (1.1.3.0)) $= g.1_E.g'$ (car 1_E est unité) $= g.(1_E.g') = g.(g'.1_E)$ (1.1.5.9) $= (gg').1_E = i(gg')$.

Comme j est la projection structurale d'un torseur, c'est un épimorphisme d'objets de <u>T</u>, il reste à voir que i induit un isomorphisme de G avec $\mathrm{Ker}\, j = E_1$, ce qui est clair par la définition (1.1.5.9) et la construction de 1_E .

1.1.6. Nous admettrons que les raisonnements précédents prouvent que pour un topos fixé $\underline{T}$, les constructions précédentes fournissent une <u>équivalence entre la catégorie des extensions de Groupes de $\underline{T}$</u> (1.1.1) (où P et G comme E sont supposés variables), <u>et la catégorie des systèmes</u> (P,G,E,φ), <u>où</u> P <u>et</u> G <u>sont des Groupes de</u> $\underline{T}$, E <u>un bitorseur sous</u> (G_P,G_P) <u>sur</u> P, <u>enfin</u> φ <u>un isomorphisme de bitorseurs</u> (1.1.3.2) (ou si on préfère, un système d'isomorphismes de bitorseurs (1.1.3.1) compatibles aux changements de base), <u>satisfaisant la condition d'associativité exprimée par la commutativité du diagramme</u> (1.1.4.2) (ou si on préfère, des diagrammes (1.1.4.1)).

Nous laissons au lecteur le soin de faire l'explicitation évidente, en termes du dictionnaire précédent, de la notion d'image inverse (resp. directe) d'une extension (1.1.1) par un morphisme de Groupes

$$P' \longrightarrow P \quad (\text{resp. } G \longrightarrow G') \quad ,$$

ou par ces deux opérations simultanément. Nous lui laissons également le soin d'expliciter une compatibilité de l'équivalence de catégories précédente avec le foncteur image inverse f^* par un morphisme de topos

$$f : \underline{T}' \longrightarrow \underline{T} \quad ;$$

pour ceci, il y a lieu d'utiliser la donnée φ sous la forme (1.1.3.2) (de préférence aux $\varphi_{P,P'}$ de (1.1.3.1)), qui définit alors une donnée correspondante $f^*(\varphi)$ sur le topos $\underline{T}'$.

1.2. <u>Cas commutatif</u>. Dans toute la suite à partir de 1.4, nous ne nous intéresserons qu'aux extensions <u>commutatives</u> de Groupes. Nous supposerons donc P et G commutatifs, et nous proposons ici d'expliciter, en termes de la description (P,G,E,φ) d'une extension en termes de bitorseurs, le fait que E est un Groupe commutatif. Une première condition évidemment nécessaire (et qui exprime en fait celle que $i(G)$ soit un sous-Groupe <u>central</u> de E) est que les bitorseurs E_p $(p \in P(S))$ soient des torseurs ordinaires, i.e. que les opérations gauches et droites de G sur P_p coïncident. Il revient évidemment au même de dire que E sur P est un torseur ordinaire sous G_P . (Il sera donc inutile dorénavant de parler de bitorseurs, et on ne regardera plus que des torseurs ordinaires.) Cette condition préliminaire étant supposée remplie, la condition de commutativité de E s'exprime alors par la commutativité des diagrammes suivants (où $p,p' \in P(S)$) :

(1.2.1)
$$\begin{tikzcd} E_p E_{p'} \arrow[r, "\varphi_{p,p'}"] \arrow[d, "sym"'] & E_{pp'} \arrow[d, "id"] \\ E_{p'}E_p \arrow[r, "\varphi_{p',p}"] & E_{p'p} \end{tikzcd} ,$$

où la première flèche verticale est l'isomorphisme canonique de commutativité (défini grâce au fait que G est maintenant commutatif ; on a de plus $pp' = p'p$ puisque P est commutatif). Cette condition est évidemment équivalente à la condition correspondante dans la situation universelle $S=P\times P$, $p=pr_1, p' = pr_2$, que nous nous dispensons de réécrire ici.

1.3. <u>Relations avec les torseurs rigidifiés ou birigidifiés</u>

1.3.1.0. Soient P un objet de T muni d'une section e_P, G un Groupe de <u>T</u>, E un torseur sous G_P . On appelle <u>rigidification de</u> E (relativement à la section donnée e_P de P) une trivialisation du torseur $E_1 = e_P^*(E)$ sous G, i.e. une section de ce torseur. La terminologie adoptée est inspirée par le cas où G est commutatif et où l'on a

(1.3.1.1) $$\mathrm{Hom}_{pt}(P,G) \simeq (e) \quad ,$$

où le premier membre désigne l'ensemble des morphismes transformant e_P en la section unité e_G de G, -relation qui équivaut au fait que l'homomorphisme naturel $\Gamma(G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,G)$, associant à une section g de G le morphisme constant $P \longrightarrow G$ de valeur g, est un isomorphisme :

(1.3.1.2) $$\Gamma(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(P,G) \quad .$$

On voit en effet immédiatement que les relations équivalentes précédentes équivalent encore à dire que tout automorphisme du torseur E qui respecte la rigidification donnée est l'automorphisme identique (puisque les automorphismes en question correspondent précisément aux éléments du premier membre de (1.3.1.1)) ; en particulier, moyennant la condition (1.3.1.1), la catégorie des torseurs sous G_P rigidifiés relativement à e_P est "rigide".

1.3.2. Soit de plus Q un objet de $\underline{T}$ muni d'une section e_Q , et désignons maintenant par E un torseur sous $G_{P\times Q}$. Comme e_Q définit une section $e_{P\times Q/P}$ de P×Q sur P, on peut considérer sur E les rigidifications α relativement à cette section (en se plaçant dans le topos induit $\underline{T}_{/P}$), qui s'explicitent comme les sections du torseur induit par E sur $P\times e_Q$. Echangeant le rôle de P et Q, on peut considérer les rigidifications β sur E relatives à la section $e_{P\times Q/Q}$ de P×Q sur Q définie par e_P. Deux telles rigidifications partielles sont dites <u>compatibles</u> si les sections α et β coïncident sur $e_P\times e_Q$, i.e. définissent une même section du torseur $E_{1,1}$ sous G, image inverse de E par la section (e_P, e_Q) de $P \times Q$. On appelle aussi <u>birigidification</u> du torseur E relativement au couple de sections (e_P, e_Q), un couple de deux rigidifications partielles compatibles. Si G est commutatif, on voit tout de suite que pour que le torseur E admette une birigidification (α, β), il faut et il suffit qu'il admette des rigidifications partielles α et β, et on peut trouver alors une birigidification dans laquelle α (ou β) est choisie à l'avance ; en effet, il suffit alors de corriger β par le morphisme $Q \longrightarrow G$ composé $Q \longrightarrow e \xrightarrow{\lambda} G$, où la deuxième flèche λ est définie par la propriété que $\beta e_Q = (\alpha e_P)\lambda$. Toujours dans le cas commutatif, notons que si E,E' sont deux torseurs birigidifiés sous $G_{P\times Q}$, il revient au même de dire qu'ils sont isomorphes comme $G_{P\times Q}$-torseurs tout court, ou comme $G_{P\times Q}$ - torseurs birigidifiés ; en d'autres termes, s'il existe un isomorphisme $u : E \longrightarrow E'$ de $G_{P\times Q}$-torseurs, on peut trouver un isomorphisme $v : E \longrightarrow E'$ de $G_{P\times Q}$-torseurs qui respecte les birigidifications. En effet, regardant l'écart de u pour les birigidifications données, on trouve des morphismes $f : P \longrightarrow G$ et $g : Q \longrightarrow G$ tels que $fe_P = ge_Q$, soit $a \in G(e)$; il existe alors un morphisme $P \times Q \longrightarrow G$ dont les composés avec $e_{P\times Q/P}$ et $e_{P\times Q/Q}$ soient respectivement f et g (savoir $h(p,q) = f(p)g(q)a^{-1}$), et on peut prendre $v = uh$.

1.3.3. La terminologie de 1.3.1 s'étend aussitôt au cas où on a un <u>bitorseur</u> E sous (G_P, G_P), étant entendu qu'une rigidification du bitorseur E doit être un isomorphisme de $e_P(E)$ avec le bitorseur trivial ${}_sG_d$, i.e. est défini par une section e_E de $e_P(E)$ qui est <u>centrale</u>, i.e. qui satisfait à la condition $g.e_E = e_E.g$ $(g \in G(S)$. On étend de même la terminologie des birigidifications au cas des bitorseurs.

1.3.4. Revenons au cas où on se donne deux Groupes P et G et choisissons la section unité e_P pour définir des rigidifications de bitorseurs sur P, et des birigidifications de bitorseurs sur P×P. On a des foncteurs naturels

$$\mathbf{EXT}(P;\ G) \xrightarrow{i} \mathrm{BITORSRIG}(P,G) \xrightarrow{\delta} \mathbf{BITORSBIRIG}(P,P;G) \quad , \tag{1.3.4.1}$$

où les trois expressions écrites désignent respectivement la catégorie des extensions de Groupes de P par G, la catégorie des bitorseurs sous (G_P,G_P) rigidifiés pour e_P, et la catégorie des bitorseurs sous $(G_{P\times P},G_{P\times P})$ birigidifiés pour (e_P,e_P). On définit le foncteur i en associant à l'extension E de P par G le bitorseur correspondant sur P (1.1.6), rigidifié par la section unité de E. On définit le foncteur δ par la formule

$$\delta(E) = \pi^*(E)\mathrm{pr}_1^*(E)^{-1}\mathrm{pr}_2^*(E)^{-1} \quad , \tag{1.3.4.2}$$

où $\pi : P\times P \longrightarrow P$ est la loi de composition de P, pr_1 et pr_2 sont les deux projections. On a une <u>birigidification canonique sur</u> δ(E). En effet, la restriction de δ(E) à $P\times e_P$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{id}_P^*(E)\mathrm{id}_P^*(E)^{-1}e^*(E)^{-1}$, où $e = \mathrm{pr}_2\mathrm{inj}_1$ est le morphisme constant $P \longrightarrow P$ de valeur e_P , de sorte que grâce à la rigidification donnée de E, on a un isomorphisme $e^*(E) \simeq$ bitorseur trivial, d'où un isomorphisme de la restriction de δ(E) à $P\times e_P$ avec le bitorseur trivial. On définit de façon symétrique une rigidification partielle relativement à $e_P\times P$, et on vérifie trivialement que ces deux rigidifications partielles sont compatibles.

1.3.4.3. On observera que le composé δi des foncteurs δ et i de (1.3.4.1) est canoniquement isomorphe au foncteur trivial, i.e. au foncteur constant de valeur la bitorseur birigidifié trivial sur $P\times P$. En effet, pour toute extension E de P par G, l'isomorphisme φ de (1.1.3.2) définit évidemment une trivialisation de $\delta i(E)$ compatible avec sa birigidification canonique.

Proposition 1.3.5. *Soient* P *et* Q *deux Groupes de* $\underline{T}$.

a) *Supposons que tout morphisme de faisceaux d'ensembles de* $P\times P$ *dans* G *qui est trivial sur* $P\times e_P$ *et sur* $e_P\times P$ *soit trivial. Alors le foncteur* i *de* (1.3.4.1) *est pleinement fidèle. En particulier, sur un bitorseur* E *sous* (G_P,G_P), *biridifié relativement à* e_P *i.e. muni d'une section centrale* e_E *de* $E_1 = e_P^*(E)$, *il y a au plus une structure d'extension de* P *par* G, *compatible avec sa structure de bitorseur et admettant* e_E *comme section unité*.

b) *Supposons de plus que tout morphisme de faisceaux d'ensembles de* $P\times P\times P$ *dans* G *qui est trivial sur les produits partiels* $P\times P\times e_P$, $P\times e_P\times P$ *et* $e_P\times P\times P$ *soit trivial. Soit* E *un torseur sous* G_P . *Pour qu'il existe sur* E *une structure d'extension de* P *par* G *compatible avec sa structure de bitorseur, il faut et il suffit que le bitorseur sous* $(G_{P\times P},G_{P\times P})$ *sous-jacent à* $\delta(E) = \pi^*(E)\mathrm{pr}_1^*(E)^{-1}\mathrm{pr}_2^*(E)^{-1}$ *soit trivial. Lorsqu'il en est ainsi, pour toute section centrale* e_E de $E_1=e_P^*(E)$, *i.e. toute rigidification de* E *relativement à* e_P, *il existe une structure d'extension unique sur* E, *compatible avec sa structure de bitorseur et admettant* e_E *comme section unité*, *i.e.* E , *considéré comme bitorseur rigidifié relativement à* e_P, *est dans l'image essentielle de* i . *D'autre part, il existe une et une seule trivialisation du bitorseur birigidifié* $\delta(E)$.

En termes du diagramme (1.3.4.1), on peut donc dire que l'image essentielle du foncteur pleinement fidèle i est "le noyau" du foncteur δ, ou encore, de façon imagée, que le diagramme (1.3.4.1) est une "suite exacte de catégories ponctuées", - et même de catégories à structures de pseudo-groupes (dans la terminologie introduite dans 2.5.1 ci-dessous).

Démontrons 1.3.5. a) Soient E,E' deux extensions de P par G, $f : E \longrightarrow E'$ un morphisme des bitorseurs rigidifiés sous-jacents, montrons que f est un morphisme d'extensions, ou ce qui revient manifestement au même, un morphisme de Groupes. Il faut prouver que l'on a $f(xy) = f(x)f(y)$, or (désignant par $j' : E' \longrightarrow P$ le morphisme structural du torseur E' sur P) on aura $j'f(xy) = j'(f(x)f(y))$, car les deux membres sont respectivement égaux à $j(f(xy))$ et à $j(f(x)f(y))$, qui sont égaux puisque j est multiplicatif. On a donc

$$f(xy) = u(j(x),j(y))f(x)f(y) \quad ,$$

où

$$u : P\times P \longrightarrow G$$

est un morphisme bien déterminé. Faisant $x=1$ puis $y=1$ dans la relation précédente, on trouve que l'on a (compte tenu de $f(1)=1$)

$$u(p,1) = u(1,p) = 1 \quad ,$$

i.e. u est trivial sur $P\times e_P$ et sur $e_P\times P$, d'où il résulte par hypothèse que u est trivial, donc $f(xy) = f(x)f(y)$, cqfd.

b) La nécessité de la condition envisagée sur E pour qu'il admette une structure d'extension compatible avec sa structure de bitorseur étant triviale (1.3.4.3), il reste à prouver sa suffisance pour prouver la première assertion de b). Or, utilisant une trivialisation φ

de $\delta(E)$, on en déduit par image inverse par la section unité de $P\times P$ une trivialisation de $E_1 = e_P(E)$ (comparer 1.5.1), i.e. une rigidification de E relativement à e_P. Supposons-la fixée. Une trivialisation donnée φ de $\delta(E)$ n'est pas nécessairement compatible avec cette birigidification ; ces restrictions à $P\times e_P$ et à $e_P\times P$ s'expriment, en termes des rigidifications partielles naturelles de $\delta(E)$, par des morphismes <u>centraux</u>

$$f : P \longrightarrow G \ , \ g : P \longrightarrow G \ ,$$

ayant mêmes restrictions à la section unité de P : $f(1) = g(1) = a \in \Gamma\, G$. Alors le morphisme <u>central</u>

$$h : P\times P \longrightarrow G \quad , \quad h(p,q) = f(p)g(q)a^{-1}$$

a comme restrictions à $P\times e_P$ et $e_P\times P$ les morphismes f et g. Par suite, corrigeant φ par h (i.e. le remplaçant par $\varphi(p,q)h(p,q)^{-1}$), on trouve une trivialisation de $\delta(E)$ compatible avec sa birigidification. On notera d'ailleurs qu'une telle trivialisation est déterminée modulo un morphisme central $P\times P \longrightarrow G$ qui est trivial sur $P\times e_P$ et sur $e_P\times P$, donc qui est trivial, donc cette φ est unique, ce qui est la dernière assertion de 1.3.5 b). La démonstration sera terminée si nous prouvons que cette φ, considérée comme un isomorphisme de la forme (1.1.3.2), satisfait à la condition d'associativité (1.1.4.1), compte tenu que l'on sait déjà par le choix de φ que e_E est une unité bilatère pour la loi de composition définie par φ. Or, les deux composés dans (1.1.4.1) sont des isomorphismes de bitorseurs sous $(G_{P\times P\times P}\ , \ G_{P\times P\times P})$, donc diffèrent par un morphisme central

$$u : P\times P\times P \longrightarrow G \quad ,$$

grâce à la formule

$$(xy)z = u(jx,jy,jz)\ x(yz) \quad .$$

Faisant dans cette formule successivement $y=z=1$, puis $z=x=1$, puis $x=y=1$, et utilisant le fait que 1 est unité bilatère pour la loi de composition envisagée, on trouve que u est trivial sur les trois morceaux $P\times e_P\times e_P$, $e_P\times P\times e_P$, $e_P\times e_P\times P$, ce qui implique par hypothèse qu'il est trivial, donc que $(xy)z = x(yz)$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1.3.6. Supposons que tout morphisme de faisceaux d'ensembles $P\times G \longrightarrow G$ qui est trivial sur $P\times e_G$ et sur $e_P\times G$ soit trivial. Alors, si G est commutatif, G est central dans toute extension de Groupes de P par G. Si P est également commutatif, et si l'hypothèse de 1.3.5 a) est vérifiée, alors toute extension de Groupes E de P par G est commutative.

Pour la première assertion, il faut prouver que l'opération de P sur G définie par l'extension G est triviale. Or cette opération s'exprime par un morphisme $u : P\times G \longrightarrow G$, tel que les restrictions à $P\times e_G$ et à $e_P\times G$ du morphisme correspondant $(p,g) \longmapsto u(p,g)g^{-1}$ sont évidemment triviales, donc ce dernier morphisme est trivial i.e. on a $u(p,g) = g$, ce qu'on voulait établir. Notons maintenant que si E est une extension de P par G, alors le Groupe opposé E^o à E, qui est une extension de P^o par G^o, a comme structure de bitorseur sous-jacente $i(E^o)$ celle déduite du bitorseur $i(E)$ en y échangeant les opérations gauches et droites. Lorsque E est une extension centrale, on a donc $i(E)=i(E^o)$, et si de plus P est commutatif i.e. $P=P^o$, on trouve par l'assertion d'unicité 1.3.5 a) que $E=E^o$ i.e. que E est commutatif. Cela établit le corollaire.

1.3.7. Un cas particulier intéressant où toutes les hypothèses envisagées dans 1.3.5 et 1.3.6 sont satisfaites est celui où on a

(1.3.7.1) $$\underline{\mathrm{Hom}}_{pt}(P,G) = e \text{ (faisceau final)} \quad ,$$

où le premier membre désigne le faisceau des morphismes de faisceaux d'ensembles ponctués de P dans G. Cette condition s'écrit encore, indépendamment des sections marquées, sous la forme (analogue à (1.3.1.2))

(1.3.7.2) $$G \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}_{ens}(P,G) \quad ,$$

où le deuxième membre désigne le faisceau des morphismes pour les faisceaux d'ensembles sous-jacents à P et G. Ces conditions signifient aussi que pour tout objet Q de $\underline{T}$, l'application $u \longmapsto u \circ pr_2$

(1.3.7.3) $$\mathrm{Hom}_{ens}(Q,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{ens}(P \times Q, G)$$

est bijective. On voit que cette propriété de P (pour G fixé) est stable par produits cartésiens, donc en particulier qu'elle implique la même propriété pour les produits cartésiens $P \times P$, $P \times P \times P$ etc. Il est immédiat dès lors qu'elle implique les hypothèses faites dans 1.3.5 et dans 1.3.6 ; de plus, elle implique que les catégories qui interviennent dans (1.3.4.1) sont toutes rigides, i.e. que tout automorphisme d'un objet d'une de ces catégories est l'identité. De plus, comme la condition (1.3.7.1) sur P, G est stable par tout changement de base $S \longrightarrow e$, il s'ensuit aussitôt par descente, du résultat d'unicité 1.3.5 a), que pour qu'un bitorseur rigidifié E sur P corresponde bien à une extension de P par G, il suffit qu'il en soit ainsi localement sur e, ce qui (en vertu de 1.3.5 b)) s'exprime aussi par la nullité de la section

$$\underline{\delta}(E) \in \Gamma\, R^1 h_*(G_{P \times P})$$

définie par $\delta(E)$, où

$$h : P\times P \longrightarrow e$$

est le morphisme structural.

1.3.8. Soit $p : P \longrightarrow S$ un morphisme de schémas, tel que p soit <u>cohérent</u> (i.e. quasi-compact et quasi-séparé) <u>et plat</u>, et tel qu'on ait

(1.3.8.1) $$p_*(\underline{O}_P) \xleftarrow{\sim} \underline{O}_S \quad .$$

Utilisant le fait que (grâce à la cohérence de p) la formation de $p_*(\underline{O}_P)$ commute à tout changement de base plat, on constate aussitôt que les conditions envisagées sur le schéma relatif P/S sont stables par produits cartésiens, et sont vérifiées en particulier pour les puissances cartésiennes $P\times P$, $P\times P\times P$, ... Elles sont également stables par tout changement de base plat.

Si maintenant G est un schéma <u>affine</u> sur S, il résulte aussitôt de (1.3.8.1) que la relation (1.3.7.2) est vérifiée, puisque l'on a $\mathrm{Hom}_S(P,G) = \mathrm{Hom}_{alg}(\underline{A},p_*(\underline{O}_P)) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{alg}(\underline{A},\underline{O}_S)$, si $\underline{A}$ est l'Algèbre quasi-cohérente sur S telle que $G = \mathrm{Spec}(\underline{A})$. D'après ce qu'on vient de dire, la même conclusion s'applique aux produits $P\times P$, $P\times P\times P$, et de même, si G est plat sur S, la même conclusion s'applique au schéma relatif P_G sur G vis-à-vis du schéma relatif G_G sur G.

Lorsque P et G sont des schémas en groupes sur S, et qu'on travaille avec une topologie sur $(\mathrm{Sch})_{/S}$ moins fine que la topologie canonique, ce qui permet d'identifier P et G à des faisceaux sur le site précédent, on voit que tout morphisme de P, $P\times P$, $P\times P\times P$ ... dans G, compatible avec les sections marquées, est trivial ; de même si G est plat, tout S-morphisme $P\times G \longrightarrow G$ compatible avec les sections marquées est trivial, comme on voit en l'interprétant comme un G-morphisme de P_G dans G_G. Cela montre donc que l'on est sous les conditions d'application de 1.3.5, et également de 1.3.6 lorsque G est plat. De plus, les trois catégories intervenant dans (1.3.4.1) sont rigides.

1.3.8.2. Le cas le plus intéressant où la condition (1.3.8.1) est vérifiée, et reste vérifiée après toute extension de la base, est celui où P est un <u>schéma abélien</u> sur S ; on est donc même sous les conditions de 1.3.7. Dans ce cas, les conclusions de 3.5 et de 3.6 sont donc valables pour tout Groupe G affine sur S. C'est le cas initialement envisagé par J.P. SERRE, dont les développements précédents sont visiblement inspirés. Un cas intéressant où (1.3.8.1) est vérifié sans l'être universellement est celui où P est le <u>modèle de Néron</u> d'un schéma abélien sur le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète de spectre S.

1.4. <u>Extensions d'un Groupe commutatif libre</u>

Soit I un objet de <u>T</u>, et prenons

(1.4.1) $$P = \mathbb{Z}[I] \quad ,$$

le $\mathbb{Z}$-Module libre engendré par I (SGA 4 IV 11). A toute extension E de P par un $\mathbb{Z}$-Module donné G (NB il ne sera plus par la suite question que d'extensions commutatives de groupes), associons le torseur correspondant sous G_P, puis sa restriction à I par le morphisme canonique

$$I \longrightarrow P = \mathbb{Z}[I] \quad .$$

On trouve ainsi un foncteur canonique

(1.4.2) $$\mathrm{EXT}(P,G) \longrightarrow \mathrm{TORS}(I,G_I) \quad .$$

Je dis que ce foncteur est une <u>équivalence de catégories</u>. Il revient évidemment au même de dire que pour tout G, les applications

(1.4.3) $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P,G) \longrightarrow H^o(I,G_I) = G(I)$$

(1.4.4) $$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(P,G) \longrightarrow H^1(I,G_I)$$

sont des isomorphismes. En fait, plus généralement, lorsque A est un Anneau (pas nécessairement commutatif) de $\underline{T}$ et $P = \underline{A}[I]$ le A-Module libre engendré par I, on trouve des isomorphismes canoniques fonctoriels en le A-Module variable G

(1.4.5) $$\mathrm{Ext}^i_A(A[I],\ G) \xrightarrow{\sim} H^i(I,G_I) \quad ,$$

qui pour $A=\mathbb{Z}$ et $i=0,1$ coïncident avec (1.4.3) et (1.4.4). Pour définir les isomorphismes (1.4.5), on se rappelle que le premier membre est le foncteur dérivé du foncteur $G \longmapsto \mathrm{Hom}_A(A[I],G)$, qui par définition de $A[I]$ est isomorphe au foncteur $G \longmapsto G(I) = H^o(I,G_I)$. Comme $G \longmapsto G_I$ transforme Modules injectifs en Modules injectifs de $\underline{T}_{/I}$ (SGA 4 V), on en déduit la conclusion voulue. On laisse au lecteur le soin de vérifier la compatibilité annoncée avec les homomorphismes (1.4.3) et (1.4.4).

On notera que le foncteur 1.4.2 est compatible aux images inverses par un morphisme de topos

$$f : \underline{T}' \longrightarrow \underline{T} \quad .$$

2. La notion de biextension de faisceaux abéliens

2.0. Dans toute la suite du présent numéro, P,Q,G désignent des Groupes commutatifs du topos $\underline{T}$. Nous aurons à utiliser fréquemment le diagramme cartésien

(2.0.1)
$$\begin{tikzcd} P \arrow[d] & P\times Q \arrow[l] \arrow[d] \\ e & Q \arrow[l] \end{tikzcd} ,$$

et les Groupes G_P (resp. G_Q resp. $G_{P\times Q}$) sur P (resp. Q, resp. $P\times Q$) images inverses du Groupe G sur e. On identifiera $G_{P\times Q}$ indifféremment à l'image inverse $(G_P)_{P\times Q}$ de G_P par pr_1 ou $(G_Q)_{P\times Q}$ de G_Q par pr_2 . Dans ces notations, les structures de Groupes de $P,Q,P\times Q$ n'interviennent pas. Nous n'aurons d'ailleurs partiquement jamais à utiliser la structure de groupe produit sur $P\times Q$. Par contre, il nous sera utile de considérer sur $P\times Q$ la structure de P-Groupe image inverse de celle de Q sur e,

(2.0.2)
$$P\times Q = Q_P \quad ,$$

et de même la structure de Q-Groupe image inverse de celle de P sur e,

(2.0.3)
$$P\times Q = P_Q \quad .$$

Ainsi, sur P on aura à considérer les deux Groupes G_P et Q_P , et sur Q les deux Groupes G_Q et P_Q . Si E est un torseur sur $P\times Q$ de Groupe $G_{P\times Q}$, il peut être envisagé indifféremment comme un torseur sur Q_P de groupe $G_{P\times Q} = (G_P)_{Q_P}$, ou comme un torseur sur P_Q de groupe $G_{P\times Q}=(G_Q)_{P_Q}$. Cela a donc un sens de considérer sur E une structure d'extension (commutative) de Q_P par G_P compatible avec sa structure de torseur, ou (symétriquement) une structure d'extension de P_Q par G_Q compatible avec sa structure de torseur. De plus, 1.6, appliqué aux topos induits $T_{/P}$ resp. $T_{/Q}$, nous fournit une façon commode d'expliciter de telles structures. Utilisant les isomorphismes canoniques $T_{/P\times Q} \xrightarrow{\sim} (T_{/P})_{/P\times Q}$ et $T_{/P\times Q} \xrightarrow{\sim} (T_{/Q})_{/P\times Q}$, on trouve les descriptions suivantes. Une structure d'extension de Q_P par G_P sur le torseur E équivaut à la donnée, pour tout objet S de $\underline{T}$ et des éléments $p,p' \in P(S)$, $q \in Q(S)$, d'un isomorphisme de torseurs sous G_S

$$\varphi_{p,p';q} \ : \ E_{p,q}E_{p',q} \xrightarrow{\sim} E_{pp',q} \ , \tag{2.0.4}$$

satisfaisant aux conditions qu'on va rappeler ; comme d'habitude (cf. 1.1.2.1), pour tout point $(p,q) \in (P\times Q)(S) = P(S)\times Q(S)$, on désigne par $E_{p,q}$ le torseur sous G_S image inverse du torseur E sous $G_{P\times Q}$ par $(p,q) : S \longrightarrow P\times Q$. Les conditions à imposer aux données (2.0.4) sont la <u>fonctorialité en S</u> (i.e. la compatibilité aux images inverses par des morphismes $S' \longrightarrow S$ dans $\underline{T}$), l'<u>associativité</u> qui s'exprime par la commutativité des diagrammes de la forme (1.1.4.1)

$$\begin{tikzcd}
 & E_{pp',q}E_{p'',q} \arrow[dr, "\varphi_{pp',p'';q}"] & \\
E_{p,q}E_{p',q}E_{p'',q} \arrow[ur, "\varphi_{p,p;q}\wedge \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\wedge\varphi_{p',p'';q}"'] & & E_{pp'p'',q} \\
 & E_{p,q}E_{p'p'',q} \arrow[ur, "\varphi_{p,p'p'';q}"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.0.5}$$

(où $p,p',p'' \in P(S)$, $q \in Q(S)$), enfin la <u>commutativité</u> qui s'exprime par la commutativité des diagrammes de la forme (1.2.1)

$$(2.0.6)\qquad \begin{tikzcd} E_{p,q}E_{p',q} \arrow[r, "\varphi_{p,p';q}"] \arrow[d, "\mathrm{sym}"'] & E_{pp',q} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ E_{p',q}E_{p,q} \arrow[r, "\varphi_{p',p;q}"] & E_{p'p,q} \end{tikzcd}$$

(où $p,p' \in P(S)$, $q \in Q(S)$). On explicite de même une structure d'extension de P_Q par G_Q sur E à l'aide d'isomorphismes de torseurs sous G_S

$$(2.0.7)\qquad \psi_{p;\,q,q'} :\ E_{p,q}E_{p,q'} \xrightarrow{\sim} E_{pp',q} \quad ,$$

pour $p \in P(S)$ et $q,q' \in Q(S)$, les ψ étant fonctoriels en S, et satisfaisant les conditions d'associativité et de commutativité symétriques de (2.0.5) et (2.0.6), s'exprimant par la commutativité des diagrammes

$$(2.0.8)\qquad \begin{tikzcd} & E_{p,qq'}E_{p,q''} \arrow[dr, "\psi_{p;qq',q''}"] & \\ E_{p,q}E_{p,q'}E_{p,q''} \arrow[ur, "\psi_{p;q,q'}\wedge\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\wedge\psi_{p;q',q''}"'] & & E_{p,qq'q''} \\ & E_{p,q}E_{p,q'q''} \arrow[ur, "\psi_{p;q;q'q''}"'] & \end{tikzcd}$$

($p \in P(S)$, $q,q',q'' \in Q(S)$),

$$(2.0.9)\qquad \begin{tikzcd} E_{p,q}E_{p,q'} \arrow[r, "\psi_{p;q,q'}"] \arrow[d, "\mathrm{sym}"'] & E_{p,qq'} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ E_{p,q'}E_{p,q} \arrow[r, "\psi_{p;q',q}"] & E_{p,q'q} \end{tikzcd}$$

($p \in P(S)$, $q,q' \in Q(S)$).

Définition 2.1. Soient P,Q,G des Groupes abéliens de $\underline{T}$, E un torseur sous $G_{P\times Q}$, muni de plus d'une structure d'extension de Q_P par G_P défini par des isomorphismes (2.0.4) (fonctoriels en S, soumis aux conditions s'exprimant par la commutativité des diagrammes (2.0.5) et (2.0.6)), et d'une structure d'extension de P_Q par G_Q, défini par des isomorphismes (2.0.7) (fonctoriels en S, soumis aux conditions exprimées par la commutativité des diagrammes (2.0.8) et (2.0.9)). On dit que les deux structures précédentes sont compatibles si pour tout objet S de $\underline{T}$ et pour $p,p' \in P(S)$, $q,q' \in Q(S)$, on a commutativité dans le diagramme

(2.1.1)
$$\begin{tikzcd}
 & E_{p,qq'}E_{p',qq'} \arrow[dr, "\varphi_{p,p';qq'}"] & \\
E_{p,q}E_{p,q'}E_{p',q}E_{p',q'} \arrow[ur, "\psi_{p;q,q'}\wedge\psi_{p';q,q'}"] \arrow[d] & & E_{pp',qq'} \\
E_{p,q}E_{p',q}E_{p,q'}E_{p',q'} \arrow[r, "\varphi_{p,p';q}\wedge\varphi_{p,p';q'}"'] & E_{pp',q}E_{pp',q'} \arrow[ur, "\psi_{pp';q,q'}"'] &
\end{tikzcd}$$
,

où la flèche verticale est déduite de l'isomorphisme de symétrie $E_{p,q'}E_{p',q} \xrightarrow{\sim} E_{p',q}E_{p,q'}$. On appelle biextension de (P,Q) par G un torseur E sous $G_{P\times Q}$, muni d'une structure d'extension de Q_P par G_P et d'une structure d'extension de G_Q par P_Q, ces deux structures étant compatibles au sens précédent.

2.1.1. On peut dire encore qu'une structure de biextension sur le $G_{P\times Q}$-torseur E est définie par deux lois de composition non partout définies $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ sur E, la première étant définie lorsque $pr_2 j(x) = pr_2 j(y)$, la deuxième lorsque $pr_1 j(x) = pr_1 j(y)$ (où $j : E \to P\times Q$ est le morphisme structural du torseur). Les axiomes, en plus des associativités du type

(2.1.1.1) $$\varphi(gx,y) = \varphi(x,gy) = g\varphi(x,y) \qquad (x,y \in E(S),\ g \in G(S))$$

et des relations analogues en ψ, s'exprimant alors par l'associativité et la commutativité de ces lois de compositions partielles, et par la relation

(2.1.1.2) $$\varphi(\psi(x,y),\psi(z,t)) = \psi(\varphi(x,z),\varphi(y,t))$$

pour x,y,z,t respectivement dans $E_{p,q}(S), E_{p,q'}(S), E_{p',q}(S), E_{p',q'}(S)$.

2.2. Sections unité. Il y a lieu de considérer la section unité de E, considéré comme extension de Q_P par G_P ,

(2.2.1) $$e_{E/P} \in \Gamma(E/P) = \mathrm{Hom}_P(P,E) \quad ,$$

et de façon symétrique la section unité de E, considéré comme extension de P_G par G_Q ,

(2.2.2) $$e_{E/Q} \in \Gamma(E/Q) = \mathrm{Hom}_Q(Q,E) \quad .$$

En particulier, le torseur E au-dessus de $P\times Q$ (de Groupe $G_{P\times Q}$) est canoniquement trivialisé au-dessus de $1_P\times Q$ par $e_{E/P}$, et au-dessus de $P \times 1_Q$ par $e_{E/Q}$. De plus, ces trivialisations coïncident au-dessus de la section unité $1_P\times 1_Q$ de $P\times Q$, et définissent donc une même section

(2.2.3) $$e_E \in \Gamma(E) \quad ,$$

qu'on appelera par abus de langage la <u>section unité</u> (ou <u>section neutre</u>) de E. Pour prouver l'égalité annoncée des deux sections e,e' de E déduites respectivement de $e_{E/P}$ et $e_{E/Q}$, on note qu'elles sont caractérisées respectivement comme les sections unités dans l'image inverse $E_{1_P,1_Q}$ dans E de la section unité de P×Q, pour les deux lois de compositions φ et ψ. Appliquant alors (2.1.1.2) pour les sections e,e',e',e de $E_{1,1}$, on trouve que des deux membres sont égaux respectivement à e et e', d'où e=e' comme annoncé. On en conclut de plus que <u>les deux lois de composition</u> φ <u>et</u> ψ <u>sur</u> $E_{1,1}$ <u>sont identiques</u>. En effet, il est immédiat qu'elles correspondent à la loi de Groupe de G par transport de structure, à l'aide des morphismes $g \longmapsto g.e$ et $g \longmapsto g.e'$ respectivement, donc elles sont identiques puisque e=e'.

Notons également que l'extension E de Q_P par G_P sur la base P donne, par restriction au-dessus de la section 1_P de P, une structure d'extension de Q par G sur l'image inverse de $1_P \times Q$ dans G. On constate aussitôt que l'homomorphisme $e_{E/Q}$ est un homomorphisme multiplicatif pour cette structure d'extension, qui est donc canoniquement scindée. De façon symétrique, l'extension de P par G obtenue par restriction de l'extension E de P_Q par G_Q sur Q au-dessus de la section 1_Q de Q, est canoniquement scindée par $e_{E/P}$.

2.3. Morphismes de biextensions. Soient E une biextension de (P,Q) par G, et de même E' une biextension de (P',Q') par G', où P',Q',G' sont encore des Groupes commutatifs de $\underline{T}$. On appelle morphisme de biextensions de E dans E' un système (u,v,w,f), où

(2.3.1) $$u:P \longrightarrow P' \ , \ v:Q \longrightarrow Q' \ , \ w:G \longrightarrow G'$$

sont des morphismes de Groupes, et où

(2.3.2) $$f : E \longrightarrow E'$$

est un morphisme des faisceaux d'ensembles sous-jacents à E,E', de telle façon que f soit à la fois un homomorphisme d'extensions de Groupes sur P resp. P' associé aux homomorphismes de Groupes relatifs

$$u \times v \ : \ Q_P \longrightarrow Q'_{P'} \quad , \quad u \times w : G_P \longrightarrow G'_{P'} \quad ,$$

et un homomorphisme d'extensions de Groupes sur Q resp. Q' associé aux homomorphismes de Groupes relatifs

$$u \times v \ : \ P_Q \longrightarrow P'_{Q'} \quad , \quad v \times w : G_Q \longrightarrow G'_{Q'} \quad .$$

On notera d'ailleurs que u,v,w sont connus par la seule connaissance de f, car à partir de f on récupère $u \times v$ par passage au quotient, donc aussi u et v par restriction à $P \times 1_Q$ resp. $1_P \times Q$, et on récupère w par restriction de f à $G.e_E$. Aussi il n'y a pas d'inconvénient à identifier le morphisme (u,v,w,f) à f.

Moyennant la précaution habituelle de rajouter aux morphismes leur source et leur but (génuflexion canonique), on voit donc que les biextensions du topos $\underline{T}$ sont les objets d'une catégorie dont les objets et les morphismes sont ceux définis en 2.1 et 2.3, et où la composition des morphismes est définie de façon évidente. De plus, par $(P,Q,G,E) \longmapsto (P,Q,G)$ on obtient un foncteur canonique

(2.3.3) $$\mathrm{BIEXT}(\underline{T}) \longrightarrow \mathrm{GRAB}(\underline{T})\times\mathrm{GRAB}(\underline{T})\times\mathrm{GRAB}(\underline{T}) \quad ,$$

où $\mathrm{BIEXT}(\underline{T})$ désigne la catégorie des biextensions sur $\underline{T}$, et $\mathrm{GRAB}(\underline{T})$ celle des Groupes abéliens sur T. Il y a lieu d'ailleurs de décomposer le foncteur canonique précédent en deux, savoir $E \longmapsto (P,Q)$:

(2.3.4) $$\mathrm{BIEXT}(\underline{T}) \longrightarrow \mathrm{GRAB}(\underline{T}) \times \underline{\mathrm{GRAB}}(T) \quad ,$$

et $E \longmapsto G$:

(2.3.5) $$\mathrm{BIEXT}(\underline{T}) \longrightarrow \mathrm{GRAB}(\underline{T}) \quad .$$

2.4. <u>La catégorie</u> $\mathrm{BIEXT}(P,Q,G)$ <u>pour</u> P,Q,G <u>variables</u>. Je dis que <u>le foncteur canonique</u> (2.3.4) <u>en fibrant</u>, et le <u>foncteur canonique</u> (2.3.5) <u>est cofibrant</u>. La première assertion signifie donc notamment que pour une biextension E de (P,Q) par G, et pour des morphismes de Groupes abéliens

$$u : P' \longrightarrow P \ , \ v : Q' \longrightarrow Q \ ,$$

on peut trouver une biextension E' de (P',Q') par G, et un morphisme de biextensions

$$f : E' \longrightarrow E$$

compatible avec u,v,id_G , qui jouisse de la propriété universelle habituelle pour les morphismes de biextensions dans E compatibles avec u,v,id_G . La seconde assertion s'explicite de même, et signifie notamment que pour une biextension E de (P,G) par G, et un morphisme de Groupes abéliens

$$w : G \longrightarrow G' \quad ,$$

il existe une biextension E' de (P,Q) par G', et un morphisme de biextensions

$$g : E \longrightarrow E'$$

compatible avec id_P, id_Q et w, qui jouisse de la propriété universelle habituelle pour les morphismes de biextensions de E compatibles avec id_P, id_Q et w. Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter les deux constructions dont nous affirmons ici l'existence, constructions qui se font aisément en paraphrasant simplement les constructions analogues bien connues dans le cas des extensions de Groupes ordinaires.

Ainsi, désignant, pour trois Groupes abéliens P,Q,G de $\underline{T}$, par

(2.4.1) $$\mathrm{BIEXT}(P,Q;G)$$

la catégorie des biextensions de (P,Q) par G, définie comme la catégorie-fibre de (2.3.3) en (P,Q,G) (donc en y prenant comme morphismes les morphismes de biextensions qui sont compatibles avec les morphismes identiques de P,Q,G), on voit que <u>cette catégorie</u> "<u>dépend de façon covariante de</u> G, <u>et de façon contravariante de</u> P,Q". De plus, pour les variances précédentes, <u>la catégorie</u> BIEXT(P,Q;G) <u>dépend</u> additivement <u>de chacun des trois arguments</u> P,Q,G. Explicitons la signification précise de cette assertion, pour l'argument G par exemple :

a) BIEXT(P,Q;0) est équivalent à la catégorie ponctuelle, et

b) pour deux Groupes abéliens G,G' de $\underline{T}$, le foncteur

(2.4.2) $$\mathrm{BIEXT}(P,G;G\times G') \longrightarrow \mathrm{BIEXT}(P,Q;G) \times \mathrm{BIEXT}(P,Q;G')$$

déduit des deux projections $G \times G' \longrightarrow G$ et $G\times G' \longrightarrow G'$ est une <u>équivalence de catégories</u>. Dans le langage de [4], on dit aussi que pour P,Q fixés, la catégorie des biextensions de (P,Q) par des Groupes G variables est, via le foncteur $E \longmapsto G$ induit par (2.3.5), une catégorie cofibrée additive sur la catégorie GRAB($\underline{T}$).

Remarque 2.4.3. Avec la terminologie de loc.cit., la catégorie cofibrée précédente est d'ailleurs non seulement additive, mais même "exacte à gauche" [4, 2.2]. Nous ne vérifierons pas ici cette propriété, que nous retrouverons plus bas (3.6) comme conséquence de faits plus précis. Signalons seulement que la théorie générale de loc. cit. nous permettrait alors d'expliciter la structure de cette catégorie cofibrée en termes d'un complexe de chaînes $L_{.}$ dans GRAB($\underline{T}$)(ne dépendant que de P et de Q), à équivalence de catégories fibrées près. Nous trouverons également plus bas une construction directe de ce complexe $L_{.}$ comme étant le complexe $P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q$ (produit tensoriel pris dans une catégorie dérivée)..

2.5. Structure de la catégorie BIEXT(P,Q;G) Les considérations générales formelles de [4, n° 1] permettent de tirer quelques conséquences utiles du fait que les catégories BIEXT(P,Q;G) dépendent additivement de G.

2.5.1. Tout d'abord, pour G fixé, la catégorie BIEXT(P,Q;G) est munie d'une structure de composition, permettant à deux biextensions E,E' de (P,Q) par G de faire correspondre fonctoriellement une biextension produit, notée E.E'. On peut considérer que cette construction ne fait que paraphraser la construction bien connue du produit de deux extensions d'un Groupe commutatif par un autre ; on notera de plus qu'elle est bien compatible avec cette dernière notion, quand on interprète E et E', soient comme des extensions de Groupes de Q_P par G_P, soit comme des extensions de Groupes de P_Q par G_Q. En particulier, EE' est, en tant que torseur sous $G_{P\times Q}$, le produit des torseurs sous $G_{P\times Q}$ définis par E et E'. La formation de E.E' est de plus associative et commutative à isomorphismes canoniques près, et la loi de composition envisagée dans BIEXT(P,Q;G) admet un "objet neutre bilatère", appelée la biextension triviale de (P,Q) par G. Celle-ci peut être construite (loc. cit.) comme la biextension déduite de l'unique biextension (à isomorphisme près) E_o de (P,Q) par le Groupe nul O, grâce à l'homomorphisme $O \longrightarrow G$. On vérifie aussitôt sur cette description que la biextension triviale E peut être aussi décrite comme le torseur trivial

$$E = P\times Q\times G \quad ,$$

ses deux structures de Groupes sur P resp sur Q étant déduites des structures de Groupes produits de $Q\times G$ resp. de $P\times G$ par changement de base $P \longrightarrow e$ resp. $Q \longrightarrow e$.

Enfin, pour toute biextension E de (P,Q) par G, on peut définir la biextension inverse, notée E^{-1}, munie d'un isomorphisme de EE^{-1} avec la biextension triviale, ce qui détermine E^{-1} à isomorphisme unique près, et permet de définir la dépendance fonctorielle par rapport à E.

En somme, la catégorie BIEXT(P,Q;G) apparaît comme l'analogue d'un objet-groupe de la catégorie (Cat) des catégories, à cela près que les associativités, commutativités, relations d'unité et d'inverses ne sont valables que modulo des isomorphismes donnés près. On pourra dire que cette catégorie est un pseudo-groupe (de la 2-catégorie (Cat)).

2.5.2. Pour P, Q, G fixés, il résulte des propriétés précédentes les faits suivants. Pour toute biextension E de (P,Q) par G, le monoïde des endomorphismes de E est canoniquement isomorphe au monoïde des endomorphismes de la biextension triviale $\underline{1}$, en associant à tout endomorphisme u de celle-ci l'endomorphisme $u.\mathrm{id}_E$ de $\underline{1}.E \simeq E$. D'autre part, le monoïde des endomorphismes de $\underline{1}$ est un <u>groupe commutatif</u>, que nous noterons

(2.5.2.1) $$\mathrm{Biext}^o(P,Q;G) \quad ;$$

sa loi de composition est aussi donnée par $(u,v) \longmapsto u.v \in \mathrm{End}(\underline{1}.\underline{1}) \simeq \mathrm{End}(\underline{1})$. Enfin, la loi de composition $E,E' \longmapsto EE'$ définit dans l'ensemble

(2.5.2.2) $$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G)$$

des classes d'isomorphismes de biextensions de (P,Q) par G une loi de <u>groupe commutatif</u>, l'inverse de la classe de E étant celle du bitorseur inverse E^{-1}.

2.5.3. Lorsqu'on se donne un homomorphisme de Groupes $G \longrightarrow G'$, le foncteur correspondant

(2.5.3.1) $$\mathrm{BIEXT}(P,Q;G) \longrightarrow \mathrm{BIEXT}(P,Q;G')$$

est compatible avec les lois E.E' et E^{-1} envisagées dans 2.5.1, à des isomorphismes canoniques près. Il s'ensuit en particulier que les deux applications évidentes

(2.5.3.2) $$\mathrm{Biext}^i(P,Q;G) \longrightarrow \mathrm{Biext}^i(P,Q;G') \quad (i=0,1)$$

sont des <u>homomorphismes de groupes</u>. De plus, si E est une biextension de (P,Q) par G, et E' la biextension correspondante de (P,Q) par G', l'homomorphisme naturel

(2.5.3.3) $$\mathrm{Hom}(E,E) = \mathrm{Aut}(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E',E') = \mathrm{Aut}(E')$$

n'est autre que (2.5.3.2) pour i = 0.

2.5.4. On peut d'ailleurs expliciter aisément le groupe $\mathrm{Biext}^{o}(P,Q;G)$. En effet, si E est une biextension de (P,Q) par G, les automorphismes u de E sont d'abord des automorphismes du torseur sous $G_{P\times Q}$ sous-jacent à E, et à ce titre est donnés par les morphismes

$$u_o : P\times Q \longrightarrow G \quad ,$$

par la formule

$$u(x) = u_o(j(x))x \quad .$$

Ceci posé, pour que u soit compatible avec la première (resp. la seconde) structure d'extension sur E, on voit tout de suite qu'il faut et il suffit que u_o soit additif par rapport au second (resp. par rapport au premier) argument. Donc pour que u soit un automorphisme de la structure de biextension de E, il faut et il suffit que u_o soit bilinéaire. Il en résulte donc une bijection canonique

$$(2.5.4.1) \qquad \mathrm{Biext}^{o}(P,Q;G) \simeq \mathrm{Hom}(P\otimes Q,G) \quad .$$

On vérifie facilement que celle-ci est indépendante de E, qu'elle respecte les structures de groupes, et qu'elle est fonctorielle en G (pour la loi fonctorielle du premier membre explicité dans (2.5.3.2)).

Nous déterminerons plus bas le groupe $\mathrm{Biext}^{1}(P,Q;G)$, et trouverons qu'il est canoniquement, et fonctoriellement en G, isomorphe à $\mathrm{Ext}^{1}(P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q, G)$.

2.6. Nous avons dans 2.5 fait varier uniquement G, en gardant P et Q fixes. Il convient maintenant de dire quelques mots concernant la variation de P,Q. Le fait essentiel, dont les autres découleront formellement, est que la variance contravariante de BIEXT(P,Q;G) en P,Q commute à sa variance covariante en G, de sorte que les catégories envisagées peuvent être considérées comme les catégories fibres d'une <u>catégorie cofibrée</u>

(2.6.1) $$\mathrm{BIEXT}'(\underline{T}) \longrightarrow \mathrm{GRAB}(\underline{T})^{o} \times \mathrm{GRAB}(\underline{T})^{o} \times \mathrm{GRAB}(\underline{T}) \quad ,$$

où les exposants ^{o} indiquent les catégories opposées, (le foncteur structural envisagé étant $E \longmapsto (P,Q,G)$). A ce titre, la catégorie cofibrée envisagée est additive en chacun de ces trois arguments, ou encore, comme nous dirons, elle est <u>tri-additive</u>. En paraphrasant des arguments standards que nous nous dispensons de reproduire ici, on en conclut que la structure de composition E.E' sur la catégorie fibre BIEXT(P,P';G) peut se décrire indifféremment en utilisant la structure additive de l'un quelconque des trois arguments (i.e. les trois structures de pseudogroupe obtenues sont canoniquement isomorphes). Il en résulte à son tour que les groupes abéliens

(2.6.2) $$\mathrm{Biext}^{i}(P,Q;G) \quad , \quad i=0,1 \quad ,$$

peuvent être regardées comme deux foncteurs tri-linéaires en les arguments P,Q,G dans $\mathrm{GRAB}(\underline{T})^{o}$, $\mathrm{GRAB}(\underline{T})^{o}$ et GRAB(T), ou si on préfère comme des <u>foncteurs trilinéaires</u> en P,Q,G variables dans $\mathrm{GRAB}(\underline{T})$, contravariants en P,Q, covariants en G, à valeurs dans la catégorie GRAB des groupes abéliens. On vérifie de plus que pour cette variance ainsi précisée, l'isomorphisme (2.5.4.1) est fonctoriel en P,Q et G, et non seulement en G. Il en sera d'ailleurs de même plus bas pour la détermination de Biext^1 en termes d'un Ext^1 .

2.7.<u>Biextension symétrique d'une biextension donnée</u>. Si E est une biextension de (P,Q) par G, il y a lieu de définir la <u>biextension symétrique</u> ${}^{s}E$ de E, qui est une biextension de (Q,P) par G. Le faisceau d'ensembles sous-jacent à ${}^{s}E$ est celui sous-jacent à E, les opérations de G sur E et sur ${}^{s}E$ sont les mêmes, le morphisme structural ${}^{s}E \longrightarrow P\times Q$ est le composé du morphisme structural $E \longrightarrow P\times Q$ avec la symétrie $P\times Q \longrightarrow Q\times P$, enfin les structures d'extensions gauches et droites de ${}^{s}E$ sont respectivement les structures d'extension droite et gauche de E. Il est évident que l'opération $E \longmapsto {}^{s}E$ est un automorphisme de la catégorie BIEXT($\underline{T}$) des biextensions, et en fait un <u>automorphisme involutif</u> :

$$ {}^{s}({}^{s}E) = E \quad . $$

Tout énoncé concernant des bitorseurs E, ... permet de déduire un énoncé symétrique, en appliquant l'énoncé donné à ${}^{s}E$, ... On pourra l'appeler l'énoncé déduit "en échangeant la gauche et la droite". Bien entendu, on se contentera en général d'expliciter un seul des deux énoncés symétriques, en choisissant entre sa gauche et sa droite, en suivant par exemple ses préférences politiques.

2.8. <u>Changement de topos</u>. <u>Localisation</u>. Supposons donné un morphisme de topos

$$ f : \underline{T}' \longrightarrow \underline{T} \quad . $$

Alors le foncteur "image inverse" f^* transforme une biextension de (P,Q) par G en une biextension $f^*(E)$ de $(f^*(P),f^*(Q))$ par $f^*(G)$, comme chaque fois qu'on a une espèce de structure qui peut s'expliciter "en termes de limites projectives finies et de limites inductives quelconques". Pour montrer la compatibilité des deux structures d'extensions sur $f^*(E)$ déduites de celles de E, on exprimera cette compatibilité par la commutativité du diagramme (2.1.1) dans le cas "universel", i.e. pour $S=P\times P\times Q\times Q$, p,p',q,q' étant les quatre projections de S sur ces quatre facteurs. Comme de juste, on obtiendra par $E \longmapsto f^*(E)$ un foncteur canonique

$$ f^* \ : \ \mathrm{BIEXT}(\underline{T}) \longrightarrow \mathrm{BIEXT}(\underline{T}') \quad . $$

Nous utiliserons par la suite sans autre mention que toutes les constructions que nous pourrons être amenés à effectuer au moyen de biextensions sont compatibles aux images inverses par morphismes de topos. Il en est en particulier ainsi des opérations de produit EE' et de passage à l'inverse E^{-1}, considérées dans 2.5.

On pourra prendre en particulier pour $\underline{T}'$ un topos induit $T_{/S'}$, et pour f le morphisme canonique (dit "de localisation" (SGA 4 IV 5))

$$f = i_{S'} : \underline{T}_{/S'} \longrightarrow \underline{T} \quad .$$

On appelle alors $f^*(E)$ la biextension induite par E sur S', et on la notera aussi, comme d'habitude, $E|S'$ ou $E_{S'}$. Comme l'opération de restriction possède évidemment les propriétés habituelles de transitivité, on en conclut que les catégories $\mathrm{BIEXT}(\underline{T}_{/S})$, pour un objet variable S de $\underline{T}$, forment les fibres d'une catégorie fibrée sur $\underline{T}$ (SGA 1 VI 8). En fait, on vérifie trivialement que cette catégorie est même un champ sur $\underline{T}$ au sens de Giraud [2], i.e. que "les morphismes et les objets des fibres de cette catégorie fibrée peuvent se recoller". Par exemple, pour se donner une biextension à isomorphisme canonique près sur S, il suffit de se donner une famille couvrante (i.e. épimorphique) $S_i \longrightarrow S$, pour tout $i \in I$ une biextension E_i sur S_i (i.e. dans $\underline{T}_{/S_i}$), pour tout couple (i,j) un isomorphisme de E_{iS_j} avec E_{jS_i}, ces isomorphismes étant soumis à la condition de cocycles habituelle. On appelera champ des biextensions sur $\underline{T}$ le champ qu'on vient de définir. Le foncteur (2.3.3), donc aussi les foncteurs déduits (2.3.4) et (2.3.5), lorsqu'on y remplace $\underline{T}$ par $\underline{T}_{/S}$ avec S variable, correspondent à des morphismes de champs sur $\underline{T}$. De même les opérations $E.E'$ et E^{-1} (2.5.1) dans les catégories $\mathrm{BIEXT}(P_S,Q_S;G_S)$ pour S variable, P,Q,G étant des Groupes commutatifs donnés sur $\underline{T}$.

2.9. Relations avec les torseurs birigidifiés

Avec la terminologie de 1.3.2, nous avons vu dans 2.2 que pour toute biextension E de (P,Q) par G, la structure de torseur sous $G_{P\times Q}$ sous-jacente à E est canoniquement birigidifiée relativement au couple des sections unités de P et de Q. On trouve ainsi un foncteur canonique

(2.9.1) $$\mathrm{BIEXT}(P,Q;G) \xrightarrow{i} \mathrm{TORSBIRIG}(P,Q;G) \quad ,$$

où le deuxième membre désigne la catégorie des torseurs birigidifiés sur $P\times Q$ (sous $G_{P\times Q}$).

Utilisant les sections unités de P et de Q, on trouve, pour tout produit de n objets isomorphes à P ou Q, un morphisme canonique inj_i du i.ème facteur dans ledit produit. Si on se donne un morphisme de ce produit dans G, on pourra ainsi parler de la restriction de ce morphisme au i.ème facteur. Ceci posé, nous considérons les produits

(2.9.2) $$\begin{cases} P\times Q \\ P\times Q\times Q,\ P\times Q\times Q\times Q \\ P\times P\times Q,\ P\times P\times P\times Q \\ P\times P\times Q\times Q \end{cases} \quad ,$$

Proposition 2.9.3. Supposons que tout morphisme d'un des produits (2.9.2) dans G qui est trivial sur chacun des facteurs de ce produit (plongés dans ledit grâce aux sections unité comme on vient de l'expliquer) soit trivial. Alors :

a) Le foncteur canonique (2.9.1) est pleinement fidèle, et les deux membres de 2.9.1 sont des catégories rigides. En particulier, si E est un torseur sous $G_{P\times Q}$ birigidifié pour (e_P,e_Q), il existe sur E au plus une structure de biextension compatible avec sa structure de torseur birigidifié.

b) Pour qu'il existe une telle structure de biextension sur E, il faut et il suffit qu'il existe sur E une structure d'extension de Q_P par G_P compatible avec sa structure de torseur sous G_P, et qu'il existe sur E une structure d'extension de P_Q par G_Q compatible avec sa structure de torseur sous G_Q (cf. 1.3.5 b)). Il existe dans ce cas sur E une unique structure d'extension de Q_P par G_P compatible avec les structures de torseur sous G_P et la rigidification donnée sur $P \times e_Q$, et une unique structure d'extension de P_Q par G_Q compatible avec la structure de torseur sous G_Q et la rigidification donnée sur $e_P \times Q$, et ces deux structures d'extension sont compatibles (2.1).

Démonstration. a) Si E est un torseur birigidifié sur $P \times Q$, le groupe de ses automorphismes s'identifie au groupe des morphismes $P \times Q \longrightarrow G$ qui sont triviaux sur les deux facteurs partiels, donc d'après l'hypothèse appliqué au produit $P \times Q$, c'est l'automorphisme identique. Cela prouve l'assertion de rigidité. Pour montrer que si E,E' sont des biextensions de (P,Q) par G, tout morphisme de bitorseurs birigidifiés $f : E \longrightarrow E'$ est un morphisme de biextensions, il suffit d'appliquer 1.3.5 a) aux deux structures d'extension définies par E,E' sur P resp. sur Q (ce qui amène à utiliser l'hypothèse pour les deux produits $P \times Q \times Q$ et $P \times P \times Q$ de (2.9.2)).

b) La nécessité de la condition énoncée sur le torseur birigidifié E pour qu'il provienne d'une biextension étant claire, prouvons la suffisance. Il résulte d'abord de 1.3.5 b) que la condition énoncée implique l'existence de structures d'extensions uniques de Q_P par G_P et de P_Q par G_P , compatibles avec la structure de torseur et les rigidifications. (On utilise l'hypothèse pour les produits $P \times Q \times Q \times Q$ et $P \times P \times P \times Q$

dans (2.9.2)). Il reste à prouver que ces deux structures d'extension sont compatibles, i.e. qu'on a commutativité dans le diagramme (2.1.1). Or les deux composés de ce diagramme sont des isomorphismes de torseurs sur $P \times P \times Q \times Q$, donc ils diffèrent par un morphisme

$$u : P \times P \times Q \times Q \longrightarrow G \quad .$$

Utilisant le fait que les trivialisations partielles de E sont des sections unités pour les lois φ et ψ respectivement, on en conclut facilement que u est trivial sur chacun de ces quatre facteurs, donc par l'hypothèse appliquée au produit $P \times P \times Q \times Q$ de (2.9.2), qu'il est trivial, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u> 2.9.4. <u>Soient</u> P, Q, G <u>des Groupes commutatifs satisfaisant les relations</u>

(2.9.4.1) $$\underline{\mathrm{Hom}}_{pt}(P,G) = e \quad , \quad \underline{\mathrm{Hom}}_{pt}(Q,G) = e$$

(cf. 1.3.7). <u>Alors les conditions préliminaires de</u> 2.9.2 <u>sont satisfaites, donc les conclusions</u> a) <u>et</u> b) <u>de cette proposition sont valables</u>. <u>De plus, si</u> E <u>est un torseur sous</u> $G_{P \times Q}$ <u>birigidifié pour</u> (e_P, e_Q), <u>pour qu'il admette une structure de biextension de</u> (P,Q) <u>par</u> G <u>compatible avec ses structures données, il faut et il suffit que les deux morphismes de faisceaux d'ensembles ponctués qu'il définit</u>,

(2.9.4.2) $$Q \longrightarrow R^1 p_*(G_P) \quad , \quad P \longrightarrow R^1 q_*(G_Q)$$

(p,q <u>les morphismes structuraux</u> $P \to e$ et $Q \to e$), <u>soient des morphismes de Groupes</u>.

La première assertion de 2.9.4 a été vue dans 1.3.7. Pour la deuxième, la nécessité de la condition envisagée étant claire, prouvons la suffisance, en appliquant 2.9.2 b) et 1.3.5 b). Notons que la multiplicativité du premier morphisme de (2.9.4.2) signifie que le torseur rigidifié E sous G_P satisfait à la condition de 1.3.5 b) localement sur P. Nous avons déjà signalé dans 1.3.7 que cela implique que cette condition est vraie globalement sur P, donc que sur E existe une structure d'extension de Q_P par G_P compatible avec sa structure de torseur rigidifié sous G_P. On procède de même pour voir que sur E existe une structure d'extension de P_Q par G_Q compatible avec sa structure de torseur rigidifié sous G_Q. La conclusion résulte donc de 2.9.2 b).

Exemple 2.9.5. Soient S un schéma, P et Q deux schémas abéliens sur S, et $G=\underline{G}_{mS}$ le schéma en groupes multiplicatif sur S. On a signalé dans 1.3.8 qu'alors les conditions (2.9.4.1) sont vérifiées. D'autre part, la donnée d'un torseur birigidifié E sur P×Q revient alors à la donnée d'un Module inversible birigidifié sur P×Q. Rappelons qu'on appelle correspondance divisorielle sur P,Q la classe à isomorphisme près d'un tel Module inversible birigidifié (cf. par exemple [1]). Travaillant avec la topologie fppf, les morphismes (2.9.4.2) sont ici les morphismes

$$Q \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{P/S} \quad , \quad P \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{Q/S} \quad , \tag{2.9.5.1}$$

définis par la correspondance divisorielle, et il est bien connu par le "théorème du carré" (loc. cit.) que ces morphismes sont nécessairement compatibles avec les structures de Groupes. Donc 2.9.4 nous apprend que la catégorie des biextensions de (P,Q) par $G=G_{m\ S}$ est équivalente à la catégorie des Modules inversibles birigidifiés sur P×Q, et que c'est donc une catégorie rigide dont l'ensemble des classes à isomorphisme près s'identifie à l'ensemble des correspondances divisorielles sur (P,Q).

Cette identification respecte d'ailleurs, manifestement, les lois de groupes naturelles sur ces deux ensembles (la première étant définie dans (2.5.2.2)).

Remarque 2.9.6. On peut vérifier facilement que l'additivité du premier morphisme (2.9.4.2) équivaut à dire que le deuxième morphisme (2.9.4.2) se factorise par le sous-faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,G)$ (noter qu'en vertu de 1.3.5, le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,G) \longrightarrow R^1q_*(G_Q)$$

est injectif). De même l'additivité du deuxième morphisme (2.9.4.2) signifie que le premier morphisme se factorise par $\underline{\mathrm{Ext}}^1(P,G)$. De plus, on obtient de cette façon des isomorphismes de groupes

$$\text{(2.9.6.1)} \qquad \mathrm{Biext}(P,Q;G) \simeq \mathrm{Hom}(Q,\underline{\mathrm{Ext}}^1(P,G)) \simeq \mathrm{Hom}(P,\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,G)) \quad .$$

Dans le cas particulier envisagé dans 2.9.5, ces isomorphismes se réduisent aux isomorphismes bien connus

$$\text{(2.9.6.2)} \qquad \mathrm{Corr}(P,Q) \simeq \mathrm{Hom}(P,Q') \simeq \mathrm{Hom}(Q,P') \quad ,$$

où $P' = \underline{\mathrm{Ext}}^1(P,\underline{G}_m)$ et $Q' = \underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,\underline{G}_m)$ sont les schémas abéliens duaux de P et de Q, qui s'identifient respectivement à $\underline{\mathrm{Pic}}^{\mathrm{o}}_{P/S}$ et $\underline{\mathrm{Pic}}^{\mathrm{o}}_{Q/S}$. Dans les deux formules précédentes, les Hom désignent bien entendu les groupes d'homomorphisme de Groupes.

2.10. Généralisations diverses de la notion de biextension. Nous les signalons par acquit de conscience, car nous n'autons pas à les utiliser.

2.10.1. On peut définir la notion de biextension de (P,Q) par G sans supposer P ni Q commutatifs, G seul étant supposé commutatif : c'est un torseur sous $G_{P\times Q}$, muni de structures d'entension centrale de Q_P par G_P et de P_Q par G_Q, ces deux structures étant compatibles à la structure de torseur, et compatibles entre elles i.e. rendent commuatifs les diagrammes (2.1.1). La plupart des développements qui précèdent sont valables mutatis mutandis pour cette notion plus général. On fera attention que lorsque P et Q sont commutatifs également, la notion précédente est plus générale que celle de 2.1, qui correspond au cas où les deux structures d'extension sous-jacentes à E sont des structures de Groupes relatifs <u>commutatifs</u>. On fera attention également que dans le cas non commutatif, la catégorie des biextensions de (P,Q) par G dépend encore additivement de G, mais non pas de P et de Q.

2.10.2. En paraphrasant 2.1, on définit (pour un entier donné $n \geq 1$) la notion de n-<u>extension d'une suite de</u> n <u>Groupes commutatifs</u> $(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ par un Groupe commutatif G. Elle correspond à la donnée, sur un torseur E sous $G_{P_1\times\ldots\times P_n}$, de n structures d'extensions partielles sur les produits partiels de n-1 facteurs, avec une relation de compatibilité du type (2.1.1) pour chaque couple d'indices distincts entre 1 et n.

Lorsque $n \geq 3$ et que les P_i sont des schémas abéliens sur un schéma S, G étant le groupe multiplicatif sur $\underline{G}_m$ (comparer 2.9.2), on trouve que toute n-extension de $(P_1,\ldots,P_n)$ par G est <u>triviale</u>.

2.10.3. La notion de biextension 2.1 peut-être considérée comme une variante de la notion d'extension commutative de Groupes commutatifs, i.e. de la notion d'extension de $\mathbb{Z}$-Modules. Lorsqu'on se donne un Anneau (commutatif pour simplifier) A de $\underline{T}$, et trois A-Modules P,Q,G, on peut définir plus généralement la notion de <u>biextension de</u> A-<u>Modules</u> de (P,Q) par G, qui est une variante de celle d'extension de A-Modules. Une telle biextension est définie comme une biextension au sens de 2.1, mais les structures partielles d'extension sous-jacentes étant enrichies en des structures d'extensions de A_P-Modules resp. de A_Q-Modules (compatibles avec les structures de Modules relatifs qu'on a déjà sur Q_P, G_P et P_Q, G_Q). Les deux structures de Modules relatifs sur E peuvent s'interpréter en termes de deux opérations du monoïde multiplicatif sous-jacent à A sur le faisceau d'ensembles sous-jacent à E, et on suppose que ces deux actions commutent l'une à l'autre; cette compatibilité s'ajoute donc à celle exprimée par la commutativité du diagramme (2.1.1), et s'exprime par la commutativité d'un diagramme analogue, que nous laissons au lecteur le soin d'écrire. Enfin, on suppose que la première opération de A sur E soit distributive, non seulement par rapport à la première loi de composition de E, mais aussi pour la seconde loi de composition de E ; et de même pour la deuxième opération de A sur E.

On observera que le dictionnaire explicité dans 1.1.6 admet aussi une variante A-linéaire, qui peut s'exprimer en disant que la donnée d'une extension du A-Module P par un autre G revient à la donnée d'une famille de torseurs E_p sous les G_p, paramétrée par les "points" $p \in P(S)$ ($S \in \mathrm{ob}\ \underline{T}$ étant un objet variable), E_p étant assujetti à varier de façon A-<u>linéaire</u> (et non seulement additive comme dans 1.1.6) en p. Ceci s'explicite par la donnée, en plus des isomorphismes $\varphi_{p,p'}$ (1.1.3.1), par la donnée d'isomorphismes

$$\mu_{a,p} : {}^{a}(P_p) \xrightarrow{\sim} P_{ap} \qquad (p \in P(S),\ a \in A(S)) \quad ,$$

où le premier membre désigne l'image du G_S-torseur P_p par l'extension des scalaires $g \longmapsto ag : G_S \longrightarrow G_S$. On laisse au lecteur le soin d'expliciter les conditions à imposer à ces données φ , μ pour qu'elles correspondent bien à une extension de Modules E de P par G (cf 3.5.4 b)).

3. Compléments d'algèbre homologique

Le but principal du présent numéro est la définition de l'isomorphisme

$$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \simeq \mathrm{Ext}^1(P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q,G)$$

annoncé plus haut. Nous aurons besoin pour ceci de certains développements d'algèbre homologique, ayant un intérêt indépendant, qui occuperont les sections 3.1 à 3.4. Les développements 3.1 et 3.3 peuvent être considérés comme des compléments à [4], et notamment à la section 6.9 de loc. cit.

3.1. Construction d'une catégorie cofibrée additive $\underline{\Psi}_{L.}$ en termes d'un complexe de chaînes L. dans une catégorie abélienne $\underline{C}$.

Soit $\underline{C}$ une catégorie abélienne, L. un complexe de chaînes de $\underline{C}$,

(3.1.1) $$L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_o \longrightarrow 0 \quad ,$$

que nous écrirons avec la convention des degrés inférieurs (opérateur différentiel de degré -1). On a donc $L_i = 0$ pour $i < 0$. Nous allons définir une catégorie cofibré $\underline{\Psi} = \underline{\Psi}_{L.}$ sur $\underline{C}$ (qui, à équivalence canonique de catégories cofibrées près, sera la catégorie de même nom de loc. cit. 6.9). Les objets de $\underline{\Psi}_{L.}$ sont des couples

$$(X \, , \, \alpha) \quad ,$$

où X est une extension de L_o par un objet A de $\underline{C}$ (dépendant de X)

(3.1.2) $$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} L_o \longrightarrow 0 \quad ,$$

et où α est une trivialisation de l'image inverse $d_o^*(X)$ de cette extension par $d_o : L_1 \longrightarrow L_o$, α étant assujetti à la condition que la trivialisation correspondante de l'image inverse $d_1^*(d_o^*(X))$ par $d_1 : L_2 \longrightarrow L_1$ est la trivialisation évidente, résultant de l'isomorphisme de transitivité

$$d_1^*(d_o^*(E)) \simeq (d_o d_1)^*(E) \quad ,$$

et de la relation $d_o d_1 = 0$. Une autre façon d'exprimer la donnée de α, soumis à la condition précédente, est de dire qu'on se donne un relèvement de $d_o : L_1 \longrightarrow L_o$ en $\alpha : L_1 \longrightarrow X$, soumis à la condition $\alpha d_1 = 0$:

(3.1.3)
$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] \\
& & A \arrow[d, "i"] \\
& & X \arrow[d, "j"] \\
L_2 \arrow[r, "d_1"'] & L_1 \arrow[r, "d_o"'] \arrow[ur, "\alpha"] & L_o \arrow[d] \\
& & 0
\end{tikzcd} \quad , \quad \alpha d_1 = 0 \quad . \text{ (*)}$$

Sous cette forme, on voit que la description des objets (X,α) ne dépend que du complexe de chaînes $[L.]$ <u>tronqué à l'ordre</u> 1, déduit de L. en "tuant les $H_i(L.)$ pour $i \geq 2$", dont les composantes sont nulles en dimension ≥ 2, coïncident avec celles de L. en dimension ≤ 0, et dont la composante en dimension 1 est le conoyau de $d_1 : L_2 \longrightarrow L_1$. On définit les homomorphismes de (X,α) dans (X',α') comme les homomorphismes d'extensions $u : X \longrightarrow X'$, compatibles avec l'identité sur L_o, tels que $u\,\alpha = \alpha'$; on

(*) Une façon plus simple de décrire $\psi_{L.}(A)$ (signalée par DELIGNE) est de le considérer comme catégorie des extensions de complexes de L. par A (regardé comme complexe réduit au degré zéro).

compose les homomorphismes en composant les homomorphismes d'extensions correspondants. On trouve ainsi la catégorie annoncée $\underline{\Psi}_{L.}$. Elle ne dépend, à isomorphisme canonique près, que du tronqué à l'ordre 1 $[L.]$ de L. .

On a un foncteur évident, $(X,\alpha) \longmapsto A$:

$$\pi : \underline{\Psi}_{L.} \longrightarrow \underline{C} \quad . \tag{3.1.4}$$

Ce foncteur est cofibrant. En effet, soit

$$u : A \longrightarrow B$$

un morphisme de $\underline{C}$, et (X,α) un objet de la catégorie $\underline{\Psi}_{L.}(A)$ fibre en A. Donc X est une extension de L_o par A, et on peut considérer l'extension $u_*(X)$ de L_o par B, image directe de X par u, et la munir de la trivialisation partielle composée $\beta = f\alpha$, où $f : X \longrightarrow u_*(X)$ est le morphisme canonique. On vérifie alors immédiatement que le morphisme $f : (X,\alpha) \longrightarrow (u_*(X),\beta)$ est un morphisme cocartésien pour le foncteur (3.1.4), i.e. satisfait à la propriété universelle habituelle pour les u-morphismes dans $\underline{\Psi}_{L.}$ de source (X,α) ; il suffit pour ceci d'utiliser la propriété universelle analogue pour le morphisme $f : X \longrightarrow u_*(X)$, qui est bien connue et triviale.

Enfin, la catégorie cofibrée $\underline{\Psi}_{L.}$ est additive, i.e. elle satisfait les deux conditions :

$$\underline{\Psi}_{L.}(0) \text{ est équivalente à la catégorie ponctuelle} \quad , \tag{3.1.5}$$

$$\underline{\Psi}_{L.}(A \times B) \longrightarrow \underline{\Psi}_{L}(A) \times \underline{\Psi}_{L.}(B) \text{ est une équivalence} \quad , \tag{3.1.6}$$

pour deux objets quelconques A et B de $\underline{C}$. La vérification est triviale, en termes des propriétés correspondantes pour la catégorie cofibrée des extensions de L_o par des objets variables de $\underline{C}$. Nous utiliserons librement les conséquences de l'additivité de $\underline{\Psi}_{L.}$, établies dans (loc. cit. 1) et rappelées plus haut (2.5).

3.1.7. Parmi ces conséquences, mentionnons le fait que pour tout objet A de $\underline{C}$, il y a dans $\underline{\Psi}_{L.}(A)$ un <u>objet nul</u>, ou <u>trivial</u> (2.5.1) ; on vérifie qu'il est défini par l'extension triviale $X = L_o + A$ de L_o par A, munie de la trivialisation partielle définie par $\alpha : L_1 \longrightarrow X$ de composantes d_o et 0. D'autre part (2.5.2), pour tout objet (X,α) de $\underline{\Psi}_{L.}(A)$, le groupe des automorphismes de cet objet est canoniquement isomorphe au groupe des automorphismes de l'objet trivial de $\underline{\Psi}_{L.}(A)$, soit $\Psi^o_{L.}(A)$, qui est un groupe commutatif. Bien entendu, on retrouve trivialement ici ce fait sur la description explicite de $\underline{\Psi}_{L.}(A)$, et on trouve même un isomorphisme canonique

(3.1.8) $$\Psi^o_{L.}(A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(L_o,A) \rightarrow \mathrm{Hom}(L_1,A)) \simeq \mathrm{Hom}(H_o(L.),A)$$
$$\simeq \mathrm{Ext}^o(L.,A) \quad ,$$

induit par l'isomorphisme habituel du groupe des automorphismes d'extension de X avec le groupe $\mathrm{Hom}(L_o,A)$. L'isomorphisme (3.1.7.1) est évidemment fonctoriel en A.

3.1.9. Rappelons enfin (2.5.2) que grâce à la structure multiplicative naturelle dans la catégorie fibre $\underline{\Psi}_{L.}(A)$, l'ensemble des classes d'isomorphie de celle-ci est munie de façon naturelle d'une structure de groupe, que nous noterons $\Psi^1_{L.}(A)$, et que ce dernier est un foncteur additif par rapport à A.

3.2. Détermination de $\Psi^1_{L.}(A)$

Considérons un objet (X,α) (3.1.3) de $\underline{\Psi}_{L.}(A)$. Considérons le complexe de cochaînes de longueur 1

(3.2.1) $$[X \to L_o] : \ 0 \longrightarrow X \longrightarrow L_o \longrightarrow 0 \ \dots$$

défini par le morphisme $j : X \longrightarrow L_o$, la composante de degré 0 étant X. C'est une résolution de A, donc peut-être identifié à A en tant qu'objet de la catégorie dérivée $D(\underline{C})$ [5]. Ceci posé, le diagramme (3.1.3) nous fournit un homomorphisme de degré 1 de complexes

(3.2.2) $$L. \longrightarrow [X \longrightarrow L_o] \quad ,$$

explicité dans le diagramme à carrés anticommutatifs

(3.2.3) $$\begin{tikzcd} \dots & L_2 \arrow[r, "d_1"] & L_1 \arrow[r, "d_o"] \arrow[d, "u^{-1}=-\alpha"'] & L_o \arrow[r] \arrow[d, "u^o=id"'] & 0 & \dots \\ \dots & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j"] & L_o \arrow[r] & 0 & \dots \end{tikzcd} \quad .$$

(On utilisera la convention habituelle, associant au complexe de chaînes L. un complexe à opérateur différentiel de degré 1, dont la composante de degré i est L_{-i}.). On trouve donc ainsi un homomorphisme de degré 1 dans la catégorie dérivée

(3.2.3) $$c(X,\alpha) : L. \longrightarrow A \quad \text{(hom. de degré 1 dans } D(\underline{C})) \quad ,$$

qui ne dépend manifestement que de la classe à isomorphie près de (X,α). On a défini ainsi une application canonique

(3.2.4) $$\Psi^1_{L.}(A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(L., A) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \mathrm{Hom}_{D(\underline{C})}(L.,A[1]) \quad .$$

<u>Théorème</u> 3.2.5. <u>L'application</u> (3.2.4) <u>est un isomorphisme de groupes, fonctoriel en l'objet</u> A <u>de</u> <u>C</u>.

Nous laisserons au lecteur le soin d'établir l'additivité de l'application (3.2.4), et sa fonctorialité pour A, et nous bornerons à prouver qu'elle est bijective. Pour l'injectivité, montrons d'abord que si l'homomorphisme de complexes u de (3.2.3) est nul dans $D(\underline{C})$, alors il est déjà nul dans la catégorie $K(\underline{C})$ des complexes à homotopie près, i.e. il existe un morphisme

$$s : L_o \longrightarrow X$$

tel que l'on ait

(3.2.5.1) $$js = u^o = id_{L_o} \ , \ sd_o = - u^{-1} = \alpha \quad .$$

En effet, l'hypothèse signifie que la conclusion devient vraie après avoir composé le morphisme de complexes envisagé avec un quasi-isomorphisme convenable v

(*)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j"] \arrow[d] & L_o \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\ 0 \arrow[r] & C^o \arrow[r, "j'"] & C^1 \arrow[r] & C^2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} ,$$

où on peut d'ailleurs (quitte à remplacer C^i par 0 pour $i \geq 2$, par $Im(C^o \longrightarrow C^1) = Ker(C^1 \longrightarrow C^2)$ pour $i = 1$) supposer que $C^i = 0$ pour $i \geq 2$. Mais alors, le morphisme (*) induisant l'identité sur A, on voit qu'il identifie X au produit fibré de L_o et de C^o sur C^1, et que la donnée d'un morphisme $s' : L_o \longrightarrow C^o$ définissant une homotopie $vu \sim 0$, donc satisfaisant $j's' = v^1u^o$, se factorise par un morphisme $s : L_o \longrightarrow X$ satisfaisant $js = u^o = id_{L_o}$. Mais alors s définit un splittage de l'extension X de L_o par A, donc le complexe $X \longrightarrow L_o$ est isomorphe <u>dans</u> $K(\underline{C})$ au complexe $K^\cdot$

réduit à A. Or pour ce dernier, il est évident que l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{K(\underline{C})}(L.,K^{\cdot}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D(\underline{C})}(L.,K^{\cdot})$$

est un isomorphisme, d'où notre assertion.

Ceci dit, la donnée d'un homomorphisme $j : L_o \longrightarrow X$ satisfaisant les conditions (3.2.5.1) équivaut précisément à une trivialisation de l'extension X de L_o par A, compatible avec la trivialisation partielle α. Il en résulte bien l'injectivité de (3.2.4).

Pour la surjectivité, partons d'un élément du deuxième membre, qui peut donc être décrit, par définition, à l'aide d'un homomorphisme de degré 1 de complexes

(3.2.5.2)
$$\begin{tikzcd} \cdots & L_2 \arrow[r, "d_1"] & L_1 \arrow[r, "d_o"] \arrow[d, "u^{-1}"'] & L_o \arrow[r] \arrow[d, "u^o"'] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & C^o \arrow[r] & C^1 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$
(carrés anticommutatifs),

où $C^{\cdot}$ est une résolution de A, et où on peut supposer comme ci-dessus que $C^i=0$ pour $i \geq 2$. **Ainsi** C^o apparaît comme une extension de C^1 par A, et on peut considérer l'extension X image inverse de celle-ci par $L_o \rightarrow C^1$. L'anticommutativité du carré de (3.2.5.2) montre que $-u^{-1}$ se factorise par un morphisme $\alpha : L_1 \longrightarrow X$, qui est un splittage partiel i.e. satisfait $j\alpha = d_o$ (j défini dans (3.1.2)). D'ailleurs la relation $u^{-1}d_1 = 0$ dans (3.2.5.2) implique que $\alpha d_1 = 0$. Donc (X,α) est bien un élément de $\underline{\Psi}_{L.}(A)$. De plus, par construction même, l'homomorphisme (3.2.5.2) est le composé de l'homomorphisme (3.2.3) relatif à (X,α), et de l'homomorphisme

$$[X \longrightarrow L_o] \longrightarrow C^{\cdot} = [C^o \longrightarrow C^1]$$

de composantes (f,u^{o}), où $f\colon X \longrightarrow C^{o}$ est l'homomorphisme canonique déduit de la définition de l'extension X comme image inverse de l'extension C^{o}. Comme l'homomorphisme précédent est un homomorphisme de résolutions de A (induisant l'identité sur A), on en conclut, par définition de $\mathrm{Ext}^1 = \mathrm{Hom}^1_{D(\underline{C})}$, que l'élément donné de $\mathrm{Ext}^1(L.,A)$, décrit par (3.2.5.2), n'est autre que $c(X,\alpha)$, ce qui établit la surjectivité de (3.2.4) et achève la démonstration de 3.2.5.

3.3. <u>Propriétés de la catégorie cofibrée $\underline{\Psi}_{L.}$</u>

Dans le présent numéro, qui n'est pas essentiel pour la compréhension de la suite, nous utilisons librement les notions de [4], notre but étant de comparer les résultats précédents à ceux de loc. cit.

<u>Théorème</u> 3.3.1. <u>La catégorie cofibrée additive</u> $\underline{\Psi}_{L.}$ <u>sur</u> $\underline{C}$ est exacte à gauche (loc. cit. 2.2) <u>elle admet un objet quasi-maximal</u> (loc. cit. 4.4), <u>et pour tout objet</u> $E = (X,\alpha)$ <u>de cette catégorie, il existe un complexe typique</u> $L.^{E}$ <u>pour</u> E (loc. cit. 3.1). <u>De plus, le pro-complexe typique de</u> $\underline{\Psi}_{L.}$ (loc. cit. 3.7 <u>et</u> 4.4) <u>est canoniquement isomorphe dans</u> $D(\underline{C})$ <u>au complexe tronqué</u> [L.] <u>envisagé dans</u> 3.1.

Nous explicitons ci-dessous la signification des diverses assertions de 3.3.1.

3.3.2. Dire la catégorie cofibrée $\underline{\Psi}_{L.}$ est <u>exacte à gauche</u> signifie qu'elle est additive et satisfait de plus la condition :

(3.3.2.1) Pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \longrightarrow 0$$

de $\underline{C}$, le foncteur naturel (notations de loc. cit. 1.8)

$$\underline{\Psi}_{L.}(A) \longrightarrow \underline{\Psi}_{L.}([A \longrightarrow A''])$$

est une équivalence de catégories.

Rappelons que, pour une catégorie cofibrée $\underline{\Psi}$ sur $\underline{C}$, et un morphisme $v : A \longrightarrow A''$ de $\underline{C}$, $\underline{\Psi}([A \longrightarrow A''])$ désigne la catégorie formée des couples (E,ρ), où E est un objet de $\underline{\Psi}(A)$ et où ρ est une "trivialisation" de l'objet correspondant $v_*(E)$ de $\underline{\Psi}(A'')$, i.e. un isomorphisme de cet objet avec l'objet nul (2.5.1) de $\underline{\Psi}(A'')$. La définition du foncteur

$$\underline{\Psi}(A') \longrightarrow \underline{\Psi}([A \longrightarrow A''])$$

de (3.3.2.1) est évidente. Dans le cas $\underline{\Psi} = \underline{\Psi}_{L.}$, les objets de $\underline{\Psi}_{L.}([A \rightarrow A''])$ s'explicitent comme les triples (X,α,ρ), où (X,α) est comme dans (3.1.3), et où $\rho : X \longrightarrow A''$ est un morphisme dans $\underline{C}$ satisfaisant

$$(*) \qquad \rho i = v \quad , \quad \rho\,\alpha = 0 \quad .$$

Lorsque $v: A \longrightarrow A''$ s'insère dans une suite exacte courte comme dans 3.2.3, alors la donnée d'un morphisme satisfaisant la première des relations (*) équivaut, comme il est bien connu (exactitude à gauche de la catégorie cofibrée des extensions de L_o par des objets variables de $\underline{C}$) à la donnée d'une extension X' de L_o par $A' \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} v$ qui soit une sous-extension de X (on prend $X' = \operatorname{Ker} \rho$), et la deuxième relation (*) exprime que α se factorise en un $\alpha' : L_1 \longrightarrow X'$. Ceci établit, modulo des compatibilités dont la vérification est évidente, l'exactitude à gauche explicitée dans (3.2.3).

3.3.3. Rappelons qu'un objet E_o d'une catégorie cofibrée $\underline{\Psi}$ sur $\underline{C}$ est dit quasi-maximal si pour tout objet E de $\underline{\Psi}$, au-dessus d'un objet A de $\underline{C}$, on peut trouver un morphisme $E \longrightarrow E'$ dans $\underline{\Psi}$, induisant un monomorphisme $A \longrightarrow A'$ dans $\underline{C}$, de telle sorte que E soit majoré par E_o i.e. qu'il existe un morphisme $E_o \longrightarrow E'$. Lorsque dans $\underline{C}$ il existe suffisamment d'objets injectifs, il revient au même de dire que tout objet de $\underline{\Psi}$ au-dessus d'un objet injectif de $\underline{C}$ est majoré par E_o. Dans le cas de $\underline{\Psi} = \underline{\Psi}_{L.}$, on a l'objet quasi-maximal canonique E_o suivant. On pose

$$L_1' = \mathrm{Coker}\ (d_1 : L_2 \longrightarrow L_1)$$

et on désigne par E_o l'objet (X_o,α_o) de $\underline{\Psi}_{L.}(L_1')$, où $X_o = L_o + L_1'$ est l'extension triviale de L_o par L_1', et où α_o a comme composantes $(d_1', \mathrm{id}_{L_1'})$, $d_1' : L_1 \longrightarrow L_o$ étant déduit de $d_1 : L_1 \longrightarrow L_o$ par passage au quotient.

Pour voir que E_o est bien quasi-maximal, notons que pour tout objet (X,α) de $\underline{\Psi}_{L.}$, on peut trouver un morphisme de celui-ci dans un (X',α'), induisant un monomorphisme $A \longrightarrow A'$ dans $\underline{C}$, tel que l'extension X' de L_o par A' soit scindée : il suffit en effet de prendre A'=X, et $(X',\alpha') = i_*(X,\alpha)$, les notations étant celles de (3.1.2). D'autre part, il est immédiat qu'un objet (X',α') de $\underline{\Psi}$ tel que l'extension X' soit scindée, est majorée par E_o.

3.3.4. Soit E un objet d'une catégorie cofibrée additive $\underline{\Psi}$ sur $\underline{C}$, au-dessus d'un objet A de $\underline{C}$, et considérons le foncteur en l'objet variable B de $\underline{C}$:

(3.3.4.1) $$B \longmapsto \mathrm{Hom}(E, \theta_B) \quad ,$$

où θ_B désigne l'objet trivial de $\underline{\Psi}(B)$. On dit que E admet un complexe typique si le foncteur précédent est représentable par un objet Ω_E de C. Comme le foncteur envisagé s'envoie canoniquement dans le foncteur $B \longmapsto \mathrm{Hom}(A,B)$ représenté par A, on conclut alors un homomorphisme canonique

(3.3.4.2) $$A \longrightarrow \Omega_E$$

et le complexe de chaînes correspondant $A \longrightarrow \Omega_E$ de $\underline{C}$ de longueur 1 est appelé le complexe typique de E.

Dans le cas $\underline{\Psi} = \underline{\Psi}_{L.}$, $E = (X,\alpha)$, on vérifie immédiatement que le foncteur (3.3.4.1) est représentable par Coker α, l'homomorphisme canonique (3.3.4.2) n'étant autre que le composé $A \xrightarrow{j} X \xrightarrow{can} \mathrm{Coker}\,\alpha$.

3.3.5. Lorsque une catégorie cofibrée additive $\underline{\Psi}$ sur $\underline{C}$ admet un objet quasi-maximal (3.3.3), et que les complexes typiques de ses objets existent, on prouve que le complexe typique T. d'un objet quasi-maximal E_o de $\underline{\Psi}$, considéré comme un objet de la catégorie dérivée $D(\underline{C})$, ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix de E_o (loc. cit. 4.4). On l'appelle le complexe typique de la catégorie cofibrée additive $\underline{\Psi}$. Lorsqu'on suppose enfin que $\underline{\Psi}$ est de plus exacte à gauche (3.3.2), on montre que $\underline{\Psi}$ se réconstitue, à équivalence de catégories fibrées sur $\underline{C}$ près (unique à isomorphisme unique près), en termes du complexe typique T. (loc. cit. 6.10), et qu'on a des isomorphismes canoniques fonctoriels en l'objet A de $\underline{C}$ (loc. cit. 5.4) :

(3.3.5.1) $$\Psi^o(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^o(T.,A) \ , \quad \Psi^1(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(T.,A) \quad .$$

Pour achever de faire le lien avec loc. cit., nous allons prouver que dans le cas $\underline{\Psi} = \underline{\Psi}_{L.}$, le complexe typique de $\underline{\Psi}_{L.}$ est le tronqué [L.]. Cela redonnera une définition des isomorphismes (3.1.8) et (3.2.4) en termes de (3.3.5.1), dont on vérifie qu'elle est compatible avec celle donnée dans 3.1 et dans 3.2.

Pour prouver notre assertion, on peut évidemment se borner au cas où L. est déjà tronqué à l'ordre 1 (car on a signalé dans 3.1 que le tronquage ne modifie pas, à isomorphisme de catégories cofibrées près, la catégorie $\underline{\Psi}_{L.}$). Mais alors il est évident que le complexe typique de l'objet quasi-maximal décrit dans 3.3.3) est canoniquement isomorphe à L., compte tenu de la construction explicite des complexes typiques donnée dans 3.3.4.

Remarque 3.3.6. Soit

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte dans $\underline{C}$, d'où une suite exacte pour les Ext^i :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^0(L.,A') \longrightarrow \mathrm{Ext}^0(L.,A) \rightarrow \dots \rightarrow \mathrm{Ext}^1(L.,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(L.,A''),$$

(qu'on pourrait d'ailleurs continuer sur la droite en introduisant les Ext^i $(i \geq 2)$). Moyennant les isomorphismes (3.1.8) et (3.2.4) on en conclut une suite exacte

$$(3.3.6.1) \qquad 0 \longrightarrow \Psi^0_{L.}(A') \longrightarrow \Psi^0_{L.}(A) \longrightarrow \Psi^0_{L.}(A'') \xrightarrow{\partial} \Psi^1_{L.}(A') \rightarrow \Psi^1_{L.}(A) \rightarrow \Psi^1_{L.}(A'').$$

dont les flèches distinctes de la flèche notée ∂ sont définies simplement par fonctorialité de $\Psi^0_{L.}$ et de $\Psi^1_{L.}$. D'autre part, dans loc. cit. (2.5.2), on définit une suite exacte (3.3.6.1), via un homomorphisme

(3.3.6.2) $$\partial : \underline{\Psi}^{o}(A'') \longrightarrow \underline{\Psi}^{1}(A') \quad ,$$

pour toute catégorie cofibrée exacte à gauche $\underline{\Psi}$ sur $\underline{C}$, en associant à un élément u du premier membre la classe dans le deuxième membre de l'élément de $\underline{\Psi}(A')$, déterminé à isomorphisme canonique près, dont l'image dans $\underline{\Psi}([A \longrightarrow A''])$ (notations de 3.3.2) est le couple (X_o, u), où X_o est l'objet trivial de $\underline{\Psi}(A)$. Ceci posé, je dis que dans le cas qui nous intéresse $\underline{\Psi} = \underline{\Psi}_{L.}$, l'homomorphisme (3.3.6.2) défini par voie "géométrique" n'est autre que l'homomorphisme bord ∂ de (3.3.6.1) changé de signe, donc que cette dernière suite exacte n'est autre (avec les identifications faites et en changeant le signe du ∂) que celle de (loc. cit. (2.5.2)). Ceci est en effet contenu dans la dernière assertion de (loc. cit. 5.4), compte tenu des compatibilités signalées dans 3.3.5.

Remarque 3.3.6.3. Profitons de cette occasion pour préciser un point peu clair de [4, n° 3.11], lorsqu'on y définit les isomorphismes fondamentaux (3.11.3) et (3.11.4) (qui interviennent de façon essentielle dans la démonstration de (loc. cit. 5.4)). Le diagramme de loc. cit. p.35 est commutatif, et non anticommutatif, donc ne définit pas sans plus un homomorphisme $u : [L_1^X \longrightarrow L_o^X] \longrightarrow K^{\cdot}[1]$. Il convient de le rendre anticommutatif en y remplaçant u^1 par $-u^1$. (Il aurait été possible de suivre la convention opposée, en remplaçant u^o par $-u^o$; mais c'est la convention indiquée (u^1 devenant $-u^1$) qui donne un isomorphisme (3.11.3) généralisant l'isomorphisme (3.5.3) de loc. cit., comme annoncé dans loc. cit.). Cette définition étant ainsi précisée, il convient de corriger l'assertion faite dans loc. cit. 5.4, les deux homomorphismes cobords qui y sont envisagés <u>différent par le signe</u>.

3.3.7. Dans (loc. cit. 6.13) on a précisé aussi la variance de la catégorie cofibrée $\underline{\Psi}_{L.}$ sur $\underline{C}$, pour L. variable, en réconstituant notamment la catégorie des morphismes cocartésiens de $\underline{\Psi}_{L.}$ dans $\underline{\Psi}_{L!}$ en termes des complexes de chaînes L. et L! . On trouve en particulier que l'ensemble des classes à isomorphismes près de foncteurs cocartésiens $\underline{\Psi}_{L.} \longrightarrow \underline{\Psi}_{L!}$ est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble des isomorphismes $\mathrm{Hom}_{D(\underline{C})}(L!\ ,L.)$. Nous n'utiliserons qu'une petite partie de ces renseignements, que nous développons dans la section qui suit, en utilisant la description simple de $\underline{\Psi}_{L.}$ donnée dans 3.1.

3.4. <u>Variance de $\underline{\Psi}_{L.}$ avec</u> L. .

Considérons donc un morphisme de complexes

(3.4.1) $$f : L! \longrightarrow L. \quad ,$$

donné par un diagramme commutatif

(3.4.2) $$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & L'_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & L'_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & L'_o \arrow[r] \arrow[d, "f_o"'] & 0 \\ {} \arrow[r] & L_2 \arrow[r] & L_1 \arrow[r] & L_o \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad .$$

On va lui associer un foncteur canonique

(3.4.3) $$f^* : \underline{\Psi}_{L.} \longrightarrow \underline{\Psi}_{L!} \quad ,$$

qui sera en fait un foncteur cocartésien de catégories cofibrées sur $\underline{C}$ (i.e. il est compatible avec les foncteurs structuraux à valeurs dans $\underline{C}$, et transforme morphismes cocartésiens en morphismes cocartésiens, cf. SGA 1 VI). Si (X,α) est un objet de $\underline{\Psi}_{L}$. on désigne par $f^*(X,\alpha)$ l'objet

(X',α'), où X' est l'**extension** de L'_o par A image inverse de l'extension donnée X de L_o par A à l'aide de f_o, et où α' est la trivialisation partielle déduite de la trivialisation partielle α à l'aide de la transitivité dans le deuxième carré de (3.4.2). (La condition de compatibilité de α' à la relation $d'_o d'_1 = 0$ résulte évidemment de la condition analogue pour α.) Il est trivial par construction que le foncteur (3.4.3) commute aux foncteurs structuraux à valeurs dans $\underline{C}$. Le fait qu'il soit cocartésien résulte aussitôt du fait que dans la catégorie des extensions d'objets de $\underline{C}$, les opérations "image directe d'extensions" commutent aux opérations "image inverse d'extensions".

Notons que le foncteur (3.4.3) définit des homomorphismes de foncteurs

(3.4.4) $$f^i : \Psi^i_{L.} \longrightarrow \Psi^i_{L!} \quad , \quad i=0,1$$

(comparer 2.6). D'autre part, l'homomorphisme (3.4.1) définit des homomorphismes

(3.4.5) $$f^i : \mathrm{Ext}^i(L.,-) \qquad \mathrm{Ext}^i(L!,-) \quad , \quad i \in \mathbb{Z} \quad .$$

Ceci posé, je dis que pour i=0,1, les homomorphismes (3.4.4) et (3.4.5) sont compatibles avec les isomorphismes de la forme (3.1.8) et (3.2.4), i.e. qu'on a commutativité dans les diagrammes suivants ($A \in \mathrm{ob}\, \underline{C}$, i=0,1) :

(3.4.6)
$$\begin{tikzcd}
\underline{\Psi}^i_{L.}(A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^i(L.,A) \arrow[d] \\
\underline{\Psi}^i_{L!}(A) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Ext}^i(L!,A)
\end{tikzcd} \quad .$$

La vérification de cette compatibilité est essentiellement triviale, et laissé au lecteur.

Proposition 3.4.7. Pour que le foncteur (3.4.3) soit fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories), il faut et il suffit que $H_o(f) : H_o(L_.^!) \longrightarrow H_o(L_.)$ soit un épimorphisme (resp. que $H_o(f)$ soit un isomorphisme et $H_1(f)$ soit un épimorphisme, resp. que $H_o(f)$ et $H_1(f)$ soient des isomorphismes).

En effet, il faut exprimer que, f^i étant l'homomorphisme fonctoriel de (3.4.4) (i=0,1), f^o est un monomorphisme (resp. f^o est un isomorphisme et f un monomorphisme, resp. f^o et f^1 sont des isomorphismes). En vertu de la commutativité de (3.4.6), ces conditions s'expriment en termes des conditions analogues sur les foncteurs Ext^i, i=0,1. Dans ce cas, l'assertion n'est qu'un énoncé assez trivial d'algèbre homologique, que nous laissons au lecteur à titre d'exercice.

3.4.8. Considérons maintenant une suite exacte de complexes de chaînes

(3.4.8.1) $$0 \longrightarrow L_. \xrightarrow{f} L_.^! \xrightarrow{g} L_.^{!!} \longrightarrow 0 \qquad ,$$

d'où des foncteurs du type (3.4.3)

$$\underline{\Psi}_{L_.^{!!}} \xrightarrow{g^*} \underline{\Psi}_{L_.^!} \xrightarrow{f^*} \underline{\Psi}_{L_.} \qquad .$$

La propriété de transitivité qu'on devine sur les foncteurs du type (3.4.3) fournit ici un isomorphisme de foncteurs

$$f^* g^* \simeq (gf)^* = (0_{L_. \to L_.^{!!}})^* \qquad ,$$

et comme le dernier membre est évidemment canoniquement isomorphe au foncteur cocartésien "nul" de $\underline{\Psi}_{L''_{\cdot}}$ dans $\underline{\Psi}_{L.}$, l'isomorphisme précédent permet de définir un foncteur canonique

$$(3.4.8.2) \qquad \underline{\Psi}_{L''_{\cdot}} \longrightarrow \underline{\Psi}_{[L. \longrightarrow L'_{\cdot}]} \quad ,$$

où $\underline{\Psi}_{[L. \longrightarrow L'_{\cdot}]}$ désigne la catégorie des couples (X',t), où X' est un objet de $\underline{\Psi}_{L'_{\cdot}}$ et t une "trivialisation" de son image inverse $f^*(X')$ i.e. un isomorphisme $f^*(X') \simeq 0_{L.,A}$, $0_{L.,A}$ désignant l'objet nul de $\underline{\Psi}_{L.}(A)$, et A étant l'objet de C sous X'. Ceci posé, je dis que <u>le foncteur</u> (3.4.8.2) <u>est une équivalence de catégories</u> (ce qui complète, par une propriété d'exactitude en $L.$ de l'expression $\underline{\Psi}_{L.}(A)$, la propriété d'exactitude à gauche en A établie dans 3.3.1).

Esquissons la démonstration de l'assertion précédente. La donnée d'un objet du deuxième membre de (3.4.8.2) revient à la donnée d'une extension $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i'} X' \xrightarrow{j'} L'_o \longrightarrow 0$ de L'_o par un objet A de C, plus un morphisme $\alpha' : L'_1 \longrightarrow X'$ satisfaisant $j\alpha' = d'_o$ et $\alpha' d'_1 = 0$, plus un morphisme $t : L_o \longrightarrow X'$ satisfaisant $jt = f_o$ et $td_o = \alpha' f_1$, cf. diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[dl] & 0 \arrow[dl, dashed] \\
 & & & A \arrow[dl, "i'"'] & A \arrow[dl, dashed, "i''"'] & \\
 & & X' \arrow[d, "j'"'] & X'' \arrow[d, dashed, "j''"'] & & \\
0 \arrow[r] & L_o \arrow[r, "f_o"] \arrow[ur, bend left, "t"] & L'_o \arrow[r, "g_o"] & L''_o \arrow[r] & 0 & \\
0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[u, "d_o"] & L'_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[u, "d'_o"] \arrow[uu, bend right, "\alpha'"'] & L''_1 \arrow[r] \arrow[u, "d''_o"] \arrow[uu, dashed, bend right, "\alpha''"'] & 0 & \\
0 \arrow[r] & L_2 \arrow[r] \arrow[u] & L'_2 \arrow[r] \arrow[u, "d'_1"] & L''_2 \arrow[r] \arrow[u, "d''_1"] & 0 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{cases}
j'\alpha' = d'_o \\
\alpha' d'_1 = 0 \\
j't = f_o \\
td_o = \alpha' f_1
\end{cases}$$

Une propriété bien connue d'exactitude à gauche en le premier argument des extensions d'un objet L par un autre A, appliquée à la première ligne du diagramme, montre que la donnée de t satisfaisant $jt = f_o$ permet d'interpréter l'extension X' comme image inverse d'une extension X" de L''_o par A, de telle façon que t corresponde à la trivialisation naturelle de l'image inverse de cette extension par $g_o f_o = 0$. La donnée de α' satisfaisant les relations $j\alpha' = d'_o$ et $\alpha' f_1 = td_o$ peut s'interpréter par essentiellement le même dictionnaire, mais appliqué à la seconde ligne du diagramme, comme provenant d'un morphisme $\alpha'' : L''_1 \longrightarrow X''$ satisfaisant $j''\alpha'' = d''_o$ (en interprétant α' et α'' comme des trivialisations des images inverses des extensions X' resp. X" par d'_o resp. d''_o). Enfin la relation $\alpha' d'_1 = 0$ équivaut alors à la relation $\alpha'' d''_1 = 0$. Bref, la donnée de (X',α',t), objet de $\underline{\Psi}[L. \longrightarrow L!]$, est équivalente à celle de (X'',α''), objet de $\underline{\Psi}_{L.''}$, ce qui prouve (essentiellement) l'assertion que (3.4.8.2) est bien une équivalence de catégories.

3.4.9. Considérons toujours la suite exacte (3.4.8.1), et considérons la suite exacte des Ext^i qu'elle définit :

$$(3.4.9.1)\quad 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^o(L''_.,A) \xrightarrow{g^o} \mathrm{Ext}^o(L'_.,A) \xrightarrow{f^o} \mathrm{Ext}^o(L.,A) \xrightarrow{\partial^o} \mathrm{Ext}^1(L''_.,A) \xrightarrow{g^1} \mathrm{Ext}^1(L'_.,A) \xrightarrow{f^1} \mathrm{Ext}^1(L.,A) \longrightarrow \quad .$$

Les isomorphismes canoniques du type (3.1.8) et (3.2.4) nous permettent d'interpréter "géométriquement" les six premiers termes de cette suite exacte en termes des catégories $\underline{\Psi}_{L.}$, $\underline{\Psi}_{L!}$ et $\underline{\Psi}_{L''_.}$, et la compatibilité (3.4.6) nous permet d'interpréter de même géométriquement les flèches

f^o, g^o, f^1, g^1 de ce diagramme. Nous allons donner de même une interprétation géométrique de la flèche ∂^o de ce diagramme, en utilisant le résultat qu'on vient de prouver, savoir que (3.4.8.2) est une équivalence de catégories. Soit en effet

$$u \in \mathrm{Ext}^o(L.,A), \quad \text{i.e. } u : L_o \longrightarrow A, \text{ avec } ud_o = 0 \ .$$

Considérons l'objet $(0,\bar{u})$ de $\underline{\Psi}_{[L. \to L']}$, où 0 est l'objet nul de $\underline{\Psi}_{L!}$, dont l'image inverse par f_o s'identifie donc à l'objet nul de $\underline{\Psi}_{L.}$, et où $\bar{u}$ est l'automorphisme de ce dernier objet défini par u, grâce à l'isomorphisme canonique (3.1.8). Grâce au fait que (3.4.8.2) est une équivalence, l'objet précédent $(0,\bar{u})$ provient d'un objet de $\underline{\Psi}_{L''}(A)$, défini à isomorphisme unique près. La classe à isomorphisme près de cet élément est un élément de $\Psi^1_{L''}(A) \simeq \mathrm{Ext}^1(L'',A)$. Je dis que cet élément n'est autre que $\partial^o(u)$.

Nous allons prouver cette compatibilité en la ramenant à la compatibilité analogue, énoncée dans [4, cor. 5.5] (où il convient de rectifier le signe comme indiqué dans 3.3.6.3) ; notre argument donnera en même temps une autre démonstration de l'équivalence (3.4.8.2), en la ramenant à l'énoncé analogue [4, prop. 2.7]. Pour ceci, considérons la catégorie opposée $\underline{C}^o$ de $\underline{C}$, et interprétons les constructions de $\underline{\Psi}_{L.}(A)$, pour A fixé, et celles de 3.4.8 et de la présente section 3.4.9, en termes de la catégorie $\underline{C}^o$, et de la catégorie cofibrée $\underline{E}$ sur C^o des extensions de l'objet fixé A de $\underline{C}^o$ par un objet variable L de $\underline{C}^o$. C'est une catégorie cofibrée additive sur $\underline{C}^o$, et même exacte à gauche sur $\underline{C}^o$ (au sens de loc. cit. 2.2). Un complexe de chaînes L. de $\underline{C}$ peut-être interprété comme un complexe de cochaînes de $\underline{C}^{o}$, et avec cette interprétation, la construction donnée de $\underline{\Psi}_{L.}(A)$ coïncide avec celle de la catégorie opposée à $\underline{\hat{E}}(L.)$ au sens de loc. cit. 1.8. Le foncteur (3.4.8.2) s'identifie alors à l'opposé du foncteur du type de loc. cit. (2.1.2), où E est remplacé par son extension $\underline{\hat{E}}$ à la catégorie des complexes de cochaînes, et le fait que le foncteur envisagé soit une équivalence est donc un cas particulier de loc. cit. 2.7 a) $\Longrightarrow$ d). D'autre part, la suite exacte (3.4.9.1) s'identifie à la suite exacte des $\mathrm{Ext}^{i}(A,L''_{.})$, $\mathrm{Ext}^{i}(A,L'_{.})$ et $\mathrm{Ext}^{i}(A,L.)$, modulo un signe $(-1)^{i}$ pour le ∂^{i} (Verdier dixit). De même, les isomorphismes (3.1.8) et (3.2.4) s'identifient aux isomorphismes analogues (3.11.5) et (3.11.4). Donc la compatibilité énoncée est un cas particulier de loc. cit. 5.5 (rectifié comme indiqué plus haut).

Remarque 3.4.9.2. Le rédacteur, qui a très peur des signes, avoue qu'il n'a pas entièrement confiance dans la démonstration qui précède, craignant d'avoir oublié des signes dans le passage de C à C^{o}. Il recommande au lecteur courageux de faire une vérification directe de la compatibilité annoncée (resp. de la compatibilité opposée). Notons que ces questions de signes ne joueront (heureusement) aucun rôle dans les exposés suivants.

3.5. Une résolution partielle plate canonique pour un $\mathbb{Z}$-Module quelconque

Nous allons appliquer les résultats précédents au cas où $\underline{C}$ est la catégorie des Groupes commutatifs du topos $\underline{T}$ i.e. des $\mathbb{Z}$-Modules de $\underline{T}$. Soit P un objet de $\underline{C}$, i.e. un groupe commutatif du topos $\underline{T}$. Nous allons définir un complexe de chaînes L.(P) augmenté vers P, dépendant fonctoriellement de P :

$$
0 \longrightarrow \overbrace{\mathbb{Z}[P\times P]\times\mathbb{Z}[P\times P\times P]}^{L_2} \xrightarrow{d_1} \overbrace{\mathbb{Z}[P\times P]}^{L_1} \xrightarrow{d_o} \overbrace{\mathbb{Z}[P]}^{L_o} \longrightarrow 0
$$

(3.5.1)

$$
\mathbb{Z}[P] \xrightarrow{\varepsilon} P \quad ,
$$

satisfaisant $L_i(P)=0$ pour $i \geq 3$. Les composantes de ce complexe sont explicitées dans (3.5.1) ci-dessus, en utilisant les notations de 1.4. Pour expliciter les opérateurs différentiels d_o, d_1 et l'augmentation ε, on utilise la notation $[p]$ pour désigner le point de $\mathbb{Z}[P](S)$ défini par le point $p \in P(S)$ de P, et de même pour les notations $[p,q]$, $[p,q,r]$, lorsque $p,q,r \in P(S)$, pour désigner des éléments de $\mathbb{Z}[P\times P](S)$ resp. de $\mathbb{Z}[P\times P\times P](S)$. Avec ces notations, on définira ε, d_o et d_1 par les formules

(3.5.2)
$$
\begin{cases}
\varepsilon[p] = p \\
d_o[p,q] = [p+q] - [p] - [q] \\
d_1[p,q] = [p,q] - [q,p] \\
d_1[p,q,r] = [p+q,r] - [p,q+r] + [p,q] - [q,r]
\end{cases} .
$$

On vérifie facilement que les homomorphismes de Groupes commutatifs ainsi définis définissent effectivement un complexe $L.(P)$ augmenté vers P, i.e. qu'on a les relations

$$
\varepsilon d_o = 0 \quad , \quad d_1 d_o = 0 \quad .
$$

En fait, la première relation est triviale, et la deuxième se décompose en deux, suivant les deux facteurs de $L_2(P)$, les deux relations en questions exprimant respectivement la <u>commutativité</u> et l'<u>associativité</u> de la loi de composition donnée sur P.

Il est immédiat que le complexe augmenté ainsi défini dépend fonctoriellement de P, un morphisme $u : P \longrightarrow P'$ donnant naissance à un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L.(P) \arrow[r, "L.(u)"] \arrow[d] & L.(P') \arrow[d] \\ P \arrow[r, "u"] & P' \end{tikzcd} .$$

Notons aussi que les composantes du complexe L. sont <u>plates</u>, comme tout $\mathbb{Z}$-Module libre.

<u>Proposition</u> 3.5.3. <u>On a</u> $H_1(L.(P))=0$, <u>et l'augmentation</u> ε <u>induit un isomorphisme</u> $H_o(L.(P)) \simeq P$.

Pour démontrer 3.5.3, on peut se réduire par le procédé standard au cas où $\underline{T}$ est la catégorie des ensembles, et où P est donc un $\mathbb{Z}$-Module ordinaire, où (3.5.1) a des chances d'être "bien connu". Nous allons donner une démonstration directe, n'utilisant pas cette réduction, en appliquant 3.4.7 au morphisme d'augmentation

$$\varepsilon : L.(P) \longrightarrow P \quad ,$$

où P est comme d'habitude considéré comme un complexe de chaînes réduit à la dimension zéro. On est donc ramené à prouver que pour tout objet G de $\underline{C}$, le foncteur

$$(*) \qquad \varepsilon^* : \underline{\Psi}_P(G) \longrightarrow \underline{\Psi}_{L.(P)}(G)$$

est une équivalence de catégories. Or le premier membre de (*) est évidemment isomorphe à la catégorie des extensions de $\mathbb{Z}$-Modules de P par G. Pour expliciter le deuxième membre, on interprète les catégories d'extensions de L_o, L_1, L_2 par G, comme la catégorie des torseurs sous G_P, resp. la catégorie des torseurs sous $G_{P\times P}$, resp. la catégorie des couples d'un torseur sous $G_{P\times P}$ et d'un torseur sous $G_{P\times P\times P}$, grâce à 1.4. Donc un objet du second membre de (*) s'identifie à un couple (E,φ), où E est un torseur sous G_P et φ une trivialisation du torseur E' sur P×P qui correspond à l'image inverse par d_o de l'extension de $\mathbb{Z}(P)$ par G définie par E, - φ étant soumise à une condition de compatibilité avec $d_o d_1 = 0$ à préciser. Or la définition de d_o (3.5.2) donne aussitôt

$$E' = \pi^*(E)\mathrm{pr}_1^*(E)^{-1}\mathrm{pr}_2^*(E)^{-1} \quad ,$$

et une trivialisation de ce torseur peut s'interpréter comme un isomorphisme (également noté φ)

$$\pi^*(E) \xleftarrow{\sim} \mathrm{pr}_1^*(E)\mathrm{pr}_2^*(E) \quad .$$

D'autre part, en explicitant la condition de compatibilité de φ avec $d_1 d_o = 0$, on trouve qu'elle s'exprime par la condition de commutativité de (1.2.1), et par la condition d'associativité de (1.1.4.1), ces deux conditions correspondant respectivement aux deux facteurs de L_2 . Le fait que (*) est une équivalence de catégories n'est alors autre que le dictionnaire de 1.1.6. Cela achève la démonstration de 3.5.3.

Remarque 3.5.4. a) Il serait intéressant de renforcer 3.5.3 par la construction d'une résolution L.(P) de P, dépendant fonctoriellement de P, et dont les composantes seraient isomorphes (fonctoriellement en P) à des sommes de $\mathbb{Z}$-modules libres engendrés par des puissances cartésiennes de P. Compte tenu des isomorphismes de la forme (1.4.5), cela donnerait en effet une méthode de calcul partiel des $\mathrm{Ext}^i(P,A)$ comme aboutissement d'une suite spectrale dont le terme initial s'expliciterait en termes des $H^j(P\times P..\times P,A)$. (Ici nous ne trouvons que des renseignements très partiels sur les Ext^1, à l'exclusion des Ext^i supérieurs). Il y a en tous cas une façon naturelle de continuer la résolution partielle L.(P) d'un cran.(*)

b) On peut donner une variante de la construction (3.5.1) et de 3.5.3 dans la catégorie des A-Modules, où A est un Anneau fixé de $\underline{T}$. La forme du complexe L.(P) devient plus compliquée, à cause de la nécessité de compliquer 1.1.6 (cf. 2.10.3). On trouve

$$(3.5.5)\qquad \begin{cases} L_o = A[P] \\ L_1 = A[P\times P] + A[A\times P] \\ L_2 = A[P\times P\times P] + A[P\times P] + A[A\times A\times P] + A[A\times P\times P] \end{cases},$$

la structure de complexe augmenté vers P étant donnée par les formules (3.5.2), complétées par les formules

$$(3.5.6)\qquad \begin{cases} d_o[\lambda,p] = [\lambda p] - \lambda[p] \\ d_1[\lambda,\mu,p] = [\lambda,\mu p] - [\lambda\mu,p] + \lambda[\mu,p] \\ d_1[\lambda,p,q] = [\lambda,p+q] - [\lambda,p] - [\lambda,q] + \lambda[p,q] - [\lambda p,\lambda q]. \end{cases}$$

La relation $d_o d_1 = 0$ résulte de la relation analogue pour la restriction des opérateurs d_o, d_1 aux composantes envisagées dans (3.5.2) (qui, on l'a vu, était équivalente à l'associativité et à la commutativité de la loi d'addition donnée dans P), et des relations $d_o d_1(\lambda,\mu,p) = 0$ et $d_o d_1(\lambda,p,q) = 0$, qui, comme on le vérifie immédiatement, équivalent

(*) L. BREEN a construit une telle résolution (Note du correcteur).

respectivement à la condition que l'opération donnée de A sur P est associative (i.e. $\lambda(\mu p) = (\lambda\mu)p$) et distributive par rapport à l'addition (i.e. $\lambda(p+q) = \lambda p + \lambda q$). Pour un torseur E sous G_P, la donnée d'une trivialisation de $d_o^*(E)$ revient à la donnée d'une loi de composition interne sur E (satisfaisant les conditions de compatibilité déjà explicitées par ailleurs avec la loi de composition interne de E et la structure de torseur), et d'une loi de composition externe de A sur E, compatible avec l'opération de A sur P et sur G ; la compatibilité de cette trivialisation avec la trivialisation évidente de $d_1^*d_o^*(E)$ équivaut alors aux conditions déjà explicitées plus haut (exprimant que la loi de composition interne de E est une loi de Groupe commutatif, extension de P par G), plus la condition d'associativité de la loi externe, et la condition de distributivité de celle-ci par rapport à la loi interne ; conditions qui équivalent à dire que E est (pour les deux lois de composition envisagées, et sa structure de torseur) un A-Module extension des A-Modules P et G. De ceci, on déduit que L. est une résolution partielle du Module P (i.e. que $H_1(L.) = 0$) par essentiellement la même méthode que 3.5.3. Il serait évidemment encore intéressant de prolonger cette résolution partielle en une résolution infinie de type analogue, les composantes étant des Modules de la forme $A(A\times A \ldots \times P\times P \ldots)$; comparer la question analogue a) dans le cas des Groupes commutatifs.

3.6. Application à la description de la catégorie cofibrée des biextensions d'un couple (P,Q) donné de Groupes commutatifs

Soient P, Q deux $\mathbb{Z}$-Modules du topos $\underline{T}$. Choisissons arbitrairement une résolution plate $L^!_\cdot(P)$ de P, coïncident en dimension ≤ 2 avec le complexe augmenté $L_\cdot(P)$ de 3.5, - ce qui est possible grâce à 3.5.3 et grâce au fait que tout $\mathbb{Z}$-Module sur $\underline{T}$ est quotient d'un $\mathbb{Z}$-Module libre, donc plat. Choisissons de même une résolution plate $L^!_\cdot(Q)$ de Q coïncidant avec $L_\cdot(Q)$ en dimensions ≤ 2. On a donc des homomorphismes canoniques

(3.6.1) $$L_\cdot(P) \longrightarrow L^!_\cdot(P) \quad , \quad L_\cdot(Q) \longrightarrow L^!_\cdot(Q) \quad ,$$

induisant un homomorphisme canonique

(3.6.2) $$L_\cdot(P,Q) \overset{\text{dfn}}{=} L_\cdot(P) \otimes L_\cdot(Q) \longrightarrow L^!_\cdot(P,Q) \overset{\text{dfn}}{=} L^!_\cdot(P) \otimes L^!_\cdot(Q) \simeq \underset{P \otimes Q}{\mathbb{L}} \ ,$$

qui est un isomorphisme sur les composantes de dimension ≤ 2. Par suite on a, en vertu des définitions,

(3.6.3) $$\underline{\Psi}_{L_\cdot(P,Q)} = \underline{\Psi}_{L_\cdot(P',Q')} \quad .$$

Théorème 3.6.4. *La catégorie cofibrée additive, sur la catégorie* $\underline{C}$ = GRAB($\underline{T}$) *des Groupes commutatifs de* $\underline{T}$, *formée des biextensions de* (P,Q) *par un Groupe abélien* G *variable* (2.4), *est canoniquement équivalente à la catégorie cofibrée additive* $\underline{\Psi}_{L_\cdot(P,Q)} = \underline{\Psi}_{L^!_\cdot(P,Q)}$, *définie en termes de* $L_\cdot(P,Q) = L_\cdot(P) \otimes L_\cdot(Q)$ *comme en* 3.1.

De ceci, et de 3.2.5, on déduit le résultat principal du présent numéro, annoncé plus haut :

<u>Corollaire</u> 3.6.5. <u>Pour</u> P <u>et</u> Q <u>fixés</u>, <u>on a un isomorphisme canonique</u>, <u>fonctoriel en</u> G :

$$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q,\ G) \qquad (3.6.5.1)$$

Démontrons 3.6.5, et pour ceci explicitons d'abord les composantes de dimension 0,1 et 2 de $L.(P,Q)$:

$$(3.6.6)\quad \begin{cases} L_o(P,Q) = L_o(P) \otimes L_o(Q) = \mathbb{Z}[P\times Q] \\ L_1(P,Q) = L_o(P) \otimes L_1(Q) + L_1(P) \otimes L_o(Q) = \mathbb{Z}[P\times Q\times Q] + \mathbb{Z}[P\times P\times Q] \\ L_2(P,Q) = L_o(P) \otimes L_2(Q) + L_1(P) \otimes L_1(Q) + L_2(P) \otimes L_o(Q) \\ \qquad = \mathbb{Z}[P\times Q\times Q] + \mathbb{Z}[P\times Q\times Q\times Q] \\ \qquad + \mathbb{Z}[P\times P\times Q\times Q] \\ \qquad + \mathbb{Z}[P\times P\times Q] + \mathbb{Z}[P\times P\times P\times Q] \end{cases} .$$

Pour expliciter la catégorie cofibrée $\underline{\Psi}_{L.(P,Q)}$ via ses catégories fibres $\underline{\Psi}_{L.(P,Q)}(G)$, on utilise 1.4 pour expliciter les extensions des $L_i(P,Q)$ (pour i=0,1,2) par G, en termes de torseurs. Ainsi, une extension de $L_o(P\times Q)$ par G s'identifie à un torseur sous $G_{P\times Q}$, une extension de $L_1(P,Q)$ par G s'identifie à un couple d'un torseur sous $G_{P\times Q\times Q}$ et d'un autre sous $G_{P\times P\times Q}$, et de même une extension de $L_2(P,Q)$ par G s'identifie à un système de cinq torseurs, sous les groupes déduits de G par changement de base sur les bases $P\times Q\times Q, P\times Q\times Q\times Q$, $P\times P\times Q\times Q, P\times P\times Q$, $P\times P\times P\times Q$ respectivement. Utilisant ce dictionnaire, on peut interpréter un couple (X,α) d'une extension de $L_o(P,Q)$ par G, et d'une trivialisation de $d_o^*(X)$ sur $L_1(P,Q)$, comme un torseur E sur $P\times Q$, muni d'un couple (φ,ψ) de trivialisations du couple de torseurs (E_1,E_2) sur $P\times Q\times Q$ resp. $P\times P\times Q$, déduit de E par image inverse à l'aide de $d_o : L_1(P,Q) \longrightarrow L_o(P,Q)$. Explicitant l'opérateur différentiel d_o, on trouve comme dans la démonstration de 3.5.3 que φ et ψ peuvent s'interpréter comme des isomorphismes

$$\varphi : \pi_Q^*(E) \xleftarrow{\sim} q_1^*(E)q_2^*(E) \ , \ \psi : \pi_P^*(E) \xleftarrow{\sim} p_1^*(E)p_2^*(E) \quad ,$$

où $\pi_Q, q_1 q_2$ sont les trois morphismes $P\times Q\times Q \longrightarrow Q$ déduits respectivement des trois morphismes $Q\times Q \longrightarrow Q$ loi de composition, première et deuxième projection, et où $\pi_P, p_1, p_2 : P\times P\times Q \longrightarrow P\times Q$ sont définis de façon symétrique. Donc φ et ψ peuvent s'interpréter comme des données du type (2.0.4) et (2.0.7) qui figurent dans 2.1. Enfin, la condition que le couple (X,α) soit bien un objet de $\underline{\Psi}_{L.(P,Q)}(G)$, i.e. que la trivialisation partielle α soit compatible avec la relation $d_o d_1 = 0$, s'exprime en termes de la structure (E,φ,ψ) par cinq relations de compatibilité, en termes de torseurs sur $P\times Q\times Q$, $P\times Q\times Q\times Q$, $P\times P\times Q\times Q$, $P\times P\times Q$, $P\times P\times P\times Q$ respectivement, ces cinq relations correspondant aux cinq termes intervenant dans l'expression (3.6.6) de $L_2(P,Q)$. On vérifie alors comme dans la démonstration de 3.5.3 que les deux premières relations ne sont autres que les relations (2.0.6) de commutativité et (2.0.5) d'associativité, dont la conjonction exprime que φ définit sur E une structure d'extension commutative de Q_P par G_P. De façon symétrique, les deux dernières conditions expriment que ψ définit sur E une structure d'extension commutative de P_Q par G_P. Enfin, la condition médiane, portant sur des torseurs sur $P\times P\times Q\times Q$, n'est autre que la commutativité du diagramme (2.1.1), qui exprime que φ et ψ sont compatibles, i.e. (compte tenu des autres conditions) qu'ils définissent sur E une structure de biextension de (P,Q) par G. La vérification de ces interprétations est essentiellement triviale, et laissée au lecteur. Le lecteur admettra sans doute avec nous que les discours précédents définissent bien une équivalence de catégories cofibrées sur $\underline{C} = \mathrm{GRAB}(\underline{T})$, qui est celle annoncée dans 3.6.4.

Remarque 3.6.7. Chacune des trois généralisations signalées dans 2.10 de la notion de biextension permet de donner une variante correspondante de 3.6.4 (donc aussi de 3.6.5). La généralisation au cas d'un nombre quelconque de facteurs (cf. 2.10.2) est triviale, et la généralisation au cas de biextensions de A-Modules (cf. 2.10.3) est immédiate, une fois qu'on a obtenu la variante de la construction de $L.(P)$ dans ce cas, signalée dans 3.5.4 b). Plus intéressante du point de vue de l'algèbre homologique semblerait la généralisation au cas où P et Q ne sont pas supposés commutatifs (cf. 2.10.1). Il convient alors d'associer à un Groupe P (pas nécessairement commutatif) de $\underline{T}$ un complexe tronqué à l'ordre 2, soit $K.(P)$, qui se décrit de façon analogue que $L.(P)$ dans 3.5, avec la différence que l'on prend $K_2(P) = \mathbb{Z}[P\times P\times P]$ (en omettant donc le premier facteur qui figurait dans $L.(P)$), d_o et d_1 étant définis comme dans (3.5.2). Ici $H_o(K.(P))$ s'identifie au Groupe $P/[P,P]$ déduit de P en le rendant abélien, qu'on peut aussi identifier au faisceau $\underline{H}_1(P,\mathbb{Z})$ des groupes d'homologie de degré 1 de P à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et $H_1(K.(P))$ est de même isomorphe au faisceau $\underline{H}_2(P,\mathbb{Z})$; en fait, $K.(P)$ n'est autre que le tronqué à l'ordre 2 du complexe des chaînes de P à coefficients dans $\mathbb{Z}$, soit $C.(P,\mathbb{Z})$. Ceci dit, l'argument établissant 3.5.3 établit de même que la catégorie cofibrée $\underline{Y}_{K.(P)}$ sur $\underline{C} = \mathrm{GRAB}(\underline{T})$ est canoniquement équivalente à la catégorie des <u>extensions centrales</u> de P par des Groupes commutatifs G variables. On trouve de même, pour deux Groupes P,Q, une équivalence de la catégorie cofibrée des biextensions de (P,Q) au sens de 2.10.1, avec la catégorie cofibrée $\underline{\Psi}_{K.(P,Q)}$, où $K.(P,Q) = K.(P) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} K.(Q)$.

Ces réflexions suggèrent qu'on trouvera peut-être, pour P commutatif, une résolution canonique de P comme souhaitée dans 3.5.4 a), par une modification judicieuse du complexe de chaînes $C.(P,\mathbb{Z})$.

3.7. <u>Compatibilités diverses</u>

Dans la présente section , nous examinons le comportement de l'équivalence de catégorie cofibrées 3.6.4, pour P et Q variables. La variance de la catégorie cofibrée des biextensions de (P,Q) par un G variable, par rapport à P,Q variables, est définie en principe dans 2.4, et peut aussi se formuler par l'assertion que l'on a un foncteur cofibrant (2.6.1). On notera que la variance en P,Q est <u>contravariante</u>. La variance de la catégorie cofibrée $\underline{\Psi}_{L.(P,Q)}$ par rapport à P,Q variables est également claire, puisque $L.(P,Q) = L.(P) \otimes L.(Q)$ dépend fonctoriellement du couple (P,Q) et que $\underline{\Psi}_{L.}$ dépend de façon contravariante de L. (3.4). Ceci posé, une première compatibilité s'exprime, pour tout triple de morphismes

(3.7.1) $$P' \longrightarrow P\ , \quad Q' \longrightarrow Q\ , \quad G \longrightarrow G'\ ,$$

par le fait que le diagramme de foncteurs

(3.7.2)
$$\begin{array}{ccc} \underline{\Psi}_{L.(P,Q)}(G) & \longrightarrow & \underline{\Psi}_{L.(P',Q')}(G') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{BIEXT}(P,Q;G) & \longrightarrow & \mathrm{BIEXT}(P',Q';G') \end{array}$$

est commutatif à un isomorphisme canonique près. Nous admettrons cette compatibilité, l'explicitation de l'isomorphisme de commutativité ne pouvant être qu'aussi évidente que fastidieuse (tout comme, du reste, l'explicitation complète qu'elle suppose de l'équivalence de catégories cofibrées 3.6.4).

3.7.3. De la compatibilité précédente résulte en particulier que l'isomorphisme (3.6.5.1) est fonctoriel non seulement en G, mais aussi en P et Q. On peut énoncer de même, et plus trivialement, une fonctorialité analogue pour l'isomorphisme défini via (3.1.8) comme (3.6.5.1) l'était via (3.2.4) :

$$\mathrm{Biext}^{0}(P,Q;G) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Ext}^{0}(P\overset{\mathbb{L}}{\otimes}Q,G) \simeq \mathrm{Hom}(P\otimes Q,G) \quad . \tag{3.7.4}$$

Mais on notera qu'on avait déjà obtenu un tel isomorphisme dans (2.5.4.1), et noté (2.6) qu'il était fonctoriel en ses trois arguments. Or il est immédiat de vérifier que les deux isomorphismes (3.7.4) et (2.5.4.1) sont égaux.

3.7.5. L'intérêt de l'isomorphisme de (3.6.5) est qu'il exprime le groupe remarquable de nature géométrique, $\mathrm{Biext}^{1}(P,Q;G)$, en termes d'un invariant d'algèbre homologique très simple $\mathrm{Ext}^{1}(P\overset{\mathbb{L}}{\otimes}Q,G)$, qui s'insère dans la suite des invariants $\mathrm{Ext}^{i}(P\overset{\mathbb{L}}{\otimes}Q,G)$, à laquelle s'applique le formalisme habituel d'algèbre homologique. En particulier, la suite de ces Ext^{i} est un <u>foncteur cohomologique</u> au sens de [3] (ou <u>suite liée de foncteurs</u> dans la terminologie de [5]) en chacun des trois arguments P,Q,G. En particulier, une suite exacte

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0 \tag{3.7.5.1}$$

(resp.

$$(3.7.5.2) \qquad 0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0, \text{ ou } 0 \longrightarrow Q' \longrightarrow Q \longrightarrow Q'' \longrightarrow 0)$$

donne naissance à une suite exacte infinie sur les Ext^i, dont les premiers six termes (ne faisant intervenir que des Ext^o et Ext^1) s'interprètent en termes de biextensions grâce à 3.6.5 et 3.7.4. On a déjà signalé une interprétation de la suite exacte déduite de (3.7.5.1), et notamment de l'opérateur cobord

$$(3.7.5.3) \qquad \partial : \mathrm{Biext}^o(P,Q;G'') \longrightarrow \mathrm{Biext}^1(P,Q;G'),$$

en termes géométriques, dans le cadre de la notion de catégorie cofibrée exacte à gauche (3.3.6). On peut se proposer de donner une interprétation analogue de la suite exacte à six termes associée à l'une des suites exactes courtes (3.7.5.2), la première disons, ou ce qui revient au même compte tenu de 3.7.3, de donner une interprétation géométrique de l'homomorphisme cobord

$$(3.7.5.4) \qquad \partial : \mathrm{Biext}^o(P',Q;G) \longrightarrow \mathrm{Biext}^1(P'',Q;G) \quad .$$

On a effectivement :

Proposition 3.7.6. *La catégorie cofibrée sur $\mathrm{GRAB}(\underline{T})^o \times \mathrm{GRAB}(\underline{T})^o \times \mathrm{GRAB}(\underline{T})$ des biextensions de (P,Q) par G, avec P,Q,G variables (cf. (2.6.1)) est exacte à gauche non seulement en l'argument G, mais aussi en chacun des arguments P et Q. Ceci dit, l'homomorphisme cobord (3.7.5.4) déduit de la suite exacte des Ext^i associée à (3.7.5.2) (grâce aux isomorphismes 3.6.5 et 3.7.4) est l'homomorphisme cobord de la théorie des catégories*

<u>cofibrées exactes à gauches sur $\underline{C}$ = GRAB($\underline{T}$)^{o} rappelé dans</u> 3.3.6, <u>appliqué à la catégorie cofibrée des biextensions de</u> (P,Q) <u>par</u> G, <u>où</u> Q <u>et</u> G <u>sont fixés</u>, <u>et</u> P <u>est variable (sous réserve d'erreur de signe dans</u> 3.4.9, (cf. 3.4.9.2)).

Esquissons la démonstration de 3.7.6. Grâce à 3.6.4 et la compatibilité (3.7.2), nous interprétons les biextensions de (P,Q) par G comme les objets de $\underline{\Psi}_{L.(P,Q)}(G)$. Considérons l'homomorphisme

$$L.(P,Q)=L.(P) \otimes L.(Q) \longrightarrow P \otimes L.(Q)$$

défini par l'augmentation $L.(P) \longrightarrow P$; il résulte de 3.5.3 et de la platitude de L.(Q) que cet homomorphisme induit un isomorphisme sur les objets H_o et H_1, donc (3.4.7) une équivalence $\underline{\Psi}_{P\otimes L.(Q)} \longrightarrow \underline{\Psi}_{L.(P,Q)}$. Ceci nous permet d'interpréter les biextensions de (P,Q) par G comme des objets de $\underline{\Psi}_{P\otimes L.(Q)}(G)$. Ceci posé, la suite exacte (3.7.5.2) donne une suite exacte de complexe de chaînes

$$0 \longrightarrow P'\otimes L.(Q) \longrightarrow P\otimes L.(Q) \longrightarrow P''\otimes L.(Q) \longrightarrow 0 \quad , \tag{3.7.6.1}$$

L'exactitude à gauche annoncée résulte alors de 3.4.8 appliqué à cette suite exacte de complexes.(La vérification directe serait d'ailleurs immédiate.) D'autre part, l'homomorphisme (3.7.5.4) n'est autre que l'homomorphisme cobord $\mathrm{Ext}^{o} \longrightarrow \mathrm{Ext}^{1}$ déduit de cette suite exacte, en prenant les Ext^{i} à valeurs dans G, et la dernière assertion de 3.7.6 est donc un cas particulier de 3.4.9.

3.8. Biextensions de (P,Q) trivialisées sur des extensions de P et Q

Considérons d'abord deux suites exactes de Groupes abéliens

(3.8.1) $$0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{i} L_o \xrightarrow{u} P \longrightarrow 0 \ , \ 0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{j} M_o \xrightarrow{v} Q \longrightarrow 0$$

Nous nous proposons de décrire la catégorie des biextensions E de (P,Q) par un Groupe abélien G, telles que l'image inverse $(u,v)^*(E)$ de E par (u,v) soit triviale, i.e. telles qu'il existe un homomorphisme s rendant commutatif le triangle suivant

(3.8.2) $$\begin{tikzcd} E \arrow[d] & \\ P\times Q & L_o\times M_o \arrow[l, "u\times v"'] \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd} \quad ,$$

et satisfaisant la condition d'additivité qu'il faut en chacun de ses deux arguments. La donnée d'un tel s permet donc d'identifier $(u,v)^*(E)$ à la biextension triviale $E_o = L_o\times M_o\times G$ de (L_o,M_o) par G. La propriété d'exactitude à gauche en P,Q de la catégorie cofibrée des biextensions de (P,Q) par G fixé (3.7.6) montre alors que la donnée de la biextension E de (P,Q), munie de la trivialisation s de son image inverse, équivaut essentiellement à la donnée de deux trivialisations partielles de la biextension triviale E_o de (L_o,M_o) par G, sur (L_1,M_o) et (L_o,M_1) respectivement, qui coïncident sur (L_1,M_1). Comme les biextensions induites par E_o sur (L_1,M_o), (L_o,M_1) et (L_1,M_1) s'identifient aux biextensions triviales, une trivialisation partielle sur (L_1,M_o) (resp. sur (L_o,M_1)) équivaut à la donnée d'un homomorphisme (ou accouplement)

(3.8.3) $$f : L_1\otimes M_o \longrightarrow G \quad (\text{resp. } g: L_o\otimes M_1 \longrightarrow G) \quad ,$$

et la condition de compatibilité envisagée signifie simplement que les deux homomorphismes en question coïncident sur $L_1 \otimes M_1$, i.e qu'on a

$$f(x_1 \otimes y_1) = g(x_1 \otimes y_1) \qquad . \tag{3.8.4}$$

pour des sections x_1, y_1 de L_1 , M_1 sur un objet de $\underline{T}$. En termes de l'homomorphisme s de (3.8.2), les formes f et g sont caractérisées par les conditions

$$s(x_1,y_o) = f(x_1 \otimes y_o) e_{E/Q}(y_o) \ , \ s(x_o,y_1) = g(x_o \otimes y_1) e_{E/P}(x_o) \qquad , \tag{3.8.5}$$

qui mettent en évidence à nouveau la nécessité de la condition (3.8.4).

La trivialisation s étant choisie, les autres trivialisations sont les morphismes $s' : L_o \times M_o \longrightarrow E$ de la forme

$$s'(x_o,y_o) = s(x_o,y_o) + h(x_o \otimes y_o) \qquad , \tag{3.8.6}$$

avec

$$h : L_o \otimes M_o \longrightarrow G$$

une forme quelconque ; il est alors clair sur (3.8.5) que les formes f,g définies par s sont changées en les formes

$$\begin{aligned} f'(x_1 \otimes y_o) &= f(x_1 \otimes y_o) + h(x_1 \otimes y_o) \\ g'(x_o \otimes y_1) &= g(x_o \otimes y_1) + h(x_o \otimes y_1) \qquad . \end{aligned} \tag{3.8.7}$$

On trouve ainsi :

Proposition 3.8.8. *Le sous-groupe de* $\mathrm{Biext}^1(P,Q;G)$ *formée des classes de biextensions dont l'image inverse par* (u,v) *est une biextension triviale de* (L_o,M_o) (*i.e. le noyau de* $\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \longrightarrow \mathrm{Biext}^1(L_o,M_o;G)$) *est canoniquement isomorphe, grâce à la description qui précède, au groupe quotient* du groupe des couples de formes (f,g) (3.8.3), satisfaisant la condition de compatibilité (3.8.4), modulo les couples de formes qui proviennent par restriction d'une forme $h : L_o \otimes M_o \longrightarrow G$.

Nous voulons maintenant interpréter cet isomorphisme en termes d'algèbre homologique, lorsqu'on tient compte de l'isomorphisme canonique $\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \simeq \mathrm{Ext}^1(P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q, G)$ de 3.6.5. Pour ceci, interprétons les données (3.8.1) comme étant deux complexes résolutions de P resp. de Q,

(3.8.9) $$L. : 0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_o \longrightarrow 0 \ , \ M. : 0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_o \longrightarrow 0 \quad ,$$

et considérons le complexe produit tensoriel $L.\otimes M.$

$$0 \longrightarrow L_1 \otimes M_1 \xrightarrow{d_2} L_1 \otimes M_o + L_o \otimes M_1 \xrightarrow{d_1} L_o \otimes M_o \longrightarrow 0 \quad .$$

On sait d'ailleurs qu'on a un homomorphisme canonique dans la catégorie dérivée

$$P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q \longrightarrow L.\otimes M. \quad ,$$

d'où un homomorphisme non moins canonique

(3.8.10) $$H^1(\mathrm{Hom}^\cdot(L.\otimes M., G)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q, G) \quad .$$

On notera d'ailleurs que le groupe des 1-cocycles du complexe $\mathrm{Hom}^\cdot(L.\otimes M., G)$ s'identifie au groupe des couples (f,g) comme en (3.8.3), satisfaisant à la condition de compatibilité (3.8.4), en associant à un tel couple l'homomorphisme $F : L_1 \otimes M_o + L_o \otimes M_1 \longrightarrow G$ de composantes (f,g) :

(3.8.11) $$F(x_1 \otimes y_o + x_o \otimes y_1) = f(x_1 \otimes y_o) + g(x_o \otimes y_1) \quad .$$

D'ailleurs le cobord de la 0-cochaîne $h : L_o \otimes M_o \longrightarrow G$ n'est autre que le couple de ses restrictions à $L_1 \otimes M_o$ et $L_o \otimes M_1$, de sorte que le groupe des couples (f,g) modulo les couples (h,h) décrit dans 3.8.8 est canoniquement isomorphe au premier membre de (3.8.10). Ceci posé, on a la compatibilité suivante :

<u>Proposition</u> 3.8.12. <u>Si</u> $\xi \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \longrightarrow \mathrm{Biext}^1(L_o,M_o;G))$ <u>est décrit par le couple</u> (f,g) <u>comme dit dans</u> 3.8.8, <u>alors l'image de</u> ξ <u>dans</u> $\mathrm{Ext}^1(P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q;G)$ <u>par l'isomorphisme</u> (3.6.5.1) <u>est l'image par</u> (3.8.10) <u>de l'élément du premier membre défini par le cocycle</u> (3.8.11).

La vérification de cette compatibilité est laissée au lecteur.

3.8.13. On va appliquer ceci en particulier dans le cas où on prend

$$L_o = \mathbb{Z}[P] \quad , \quad M_o = \mathbb{Z}[Q] \quad ,$$

L_1 et M_1 étant respectivement les noyaux des homomorphismes canoniques $\mathbb{Z}[P] \longrightarrow P$, $\mathbb{Z}[Q] \longrightarrow Q$. Notons que l'on a des isomorphismes canoniques

$$L_o \overset{\mathbb{L}}{\otimes} M_o \simeq L_o \otimes M_o \simeq \mathbb{Z}[P\times Q] \quad ,$$

L_o et M_o étant plats, d'où on déduit grâce à (1.4.5) des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Ext}^i(L_o \overset{\mathbb{L}}{\otimes} M_o, G) \simeq H^i(P\times Q, G_{P\times Q}) \quad .$$

De ceci et de 3.6.5, ou directement grâce aux définitions et à 1.4, on conclut que le foncteur qui à toute biextension de (L_o,M_o) par G associe le torseur sous $G_{P\times Q}$ sur P×Q qu'elle induit, est une équivalence de catégories. (Ceci reste valable sans utiliser de structure additive sur P,Q .) Par suite, si E est une biextension de (P,Q) par G, il revient au même de se donner une trivialisation de son image inverse sur (L_o,M_o), ou de se donner une section de E considéré seulement comme objet au-dessus de P×Q, i.e. une trivialisation de E considéré comme torseur sous $G_{P\times Q}$.

Les biextensions munies de cette structure supplémentaire sont donc décrites par les couples (f,g) (3.8.3) satisfaisant la compatibilité (3.8.4), et la description à isomorphisme près est celle donnée dans 3.8.8.

Notons d'ailleurs qu'avec les notations de 3.5, on peut considérer L_1 comme le conoyau de $L_2(P) \longrightarrow L_1(P)$, et de même pour M_1, ce qui permet d'expliciter la donnée de (f,g) en termes d'un système d'homomorphismes

$$\begin{cases} f' : L_1(P) \otimes L_o(Q) = \mathbb{Z}(P\times P\times Q) \longrightarrow G \\ g' : L_o(P) \otimes L_1(Q) = \mathbb{Z}(P\times Q\times Q) \longrightarrow G \end{cases},$$

i.e. d'homomorphismes de faisceaux d'<u>ensembles</u>

$$P\times P\times Q \longrightarrow G \ , \quad P\times Q\times Q \longrightarrow G \quad ,$$

satisfaisant cinq conditions de compatibilité (exprimant que f' et g' peuvent se factoriser en f et g - ce qui fait 2×2 équations à écrire, compte tenu de la forme de $L_2(P)$ et $L_2(Q)$ comme somme de deux termes - et la condition (3.8.4)). On constate alors que f' et g' ne sont autres que les données de multiplication partielle définissant une biextension, et les cinq conditions en question ne sont autres que les cinq axiomes des biextensions envisagés dans 2.1 (cf. démonstration de 3.6.4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Demazure, J. Giraud et M. Raynaud, Schémas abéliens, Séminaire Fac. Sc. Orsay 1967/68 (à paraître).

[2] J. Giraud, Cohomologie non abélienne, thèse Paris, 1967, (à paraître).

[3] A. Grothendieck, Sur quelques points d'Algèbre homologique ; Toh. Math. Journal, vol. 9 (1956), p.119-221

[4] A. Grothendieck, Catégories cofibrées additives et Complexe cotangent relatif, Lectures Notes in Math. n°79 1968 (Springer).

[5] J.L. Verdier, Catégories dérivées des catégories abéliennes (à paraître).

[6] D. Mumford, Biextensions of formal groups, Tata Institute of Fundamental Research 1968 (à paraître).

S G A 7

E X P O S E VIII

COMPLEMENTS SUR LES BIEXTENSIONS. PROPRIETES GENERALES DES BIEXTENSIONS DES SCHEMAS EN GROUPES

par A. Grothendieck

S O M M A I R E

0. Introduction

0.1. Nous continuons ici l'étude générale des biextensions, commencée dans l'exposé précédent. Tout d'abord nous donnons quelques compléments dans le cas d'un topos de base général, en développant notamment, avec les détails qu'il mérite, le formalisme des accouplements associés aux biextensions (n°2), dont l'importance dans la théorie des schémas abéliens est bien connue. D'autre part, nous abordons l'étude des biextensions de schémas en groupes généraux, le cas le plus intéressant pour nous étant celui des biextensions par le groupe multiplicatif $\underline{G}_m$. Nous serons cependant obligés, à titre d'intermédiaire technique, d'étudier aussi les biextensions par d'autres types de schémas en groupes (n°s 5 et 6).

Le résultat le plus intéressant pour la suite est donné dans 7.1, qui donne des conditions moyennant lesquelles, pour P et Q lisses sur un trait de point générique η, une biextension de (P_η, Q_η) par $\underline{G}_{m_\eta}$ peut se prolonger en une biextension de (P,Q) par $\underline{G}_m$, déterminée à isomorphisme unique près. Ce résultat sera fort commode dans l'exposé suivant, consacré à la théorie du modèle de Néron des variétés abéliennes. Il est probable qu'on y pourrait s'en tirer à meilleur compte, sans l'imposant poids-papier des exposés VII et VIII (qui ne serviront plus dans la suite du Séminaire) ; il nous semble cependant probable que les développements donnés dans ces exposés sont appelés à être utiles encore ailleurs.

0.2. Lorsque nous travaillons avec des schémas en groupes sur un schéma S, il sera sous-entendu que nous travaillons avec le topos fppf de S, qui est le topos associé au $\underline{U}$-site des schémas localement de présentation finie sur S (et $\in \underline{U}$), muni de la topologie fppf (SGA 3 IV 6.3). Le lecteur vérifiera d'ailleurs sans peine que la plupart des énoncés que nous donnerons seraient également valables (et essentiellement équivalents aux énoncés fppf) pour d'autres topologies sur S (ayant comme catégorie sous-jacente au site une catégorie contenant au moins les schémas localement de présentation finie sur S), telles les topologies de Zariski, la topologie étale, la topologie fpqc. Une des raisons en est que, grâce à la théorie de la descente, la catégorie des extensions d'un schéma en groupes P localement de présentation finie sur S par le schéma en groupes $\underline{G}_m$ ne dépend pas, à équivalence près, de la topologie choisie, et le même énoncé vaut pour la notion de biextension. La raison technique pour laquelle il y a lieu de préférer la topologie fppf (ou une topologie plus fine, comme fpqc) aux topologies moins fines comme celle de Zariski et la topologie étale, c'est que pour tout entier $n > 0$, l'homomorphisme n.id de $\underline{G}_m$ dans lui-même est un épimorphisme fppf (car il est fidèlement plat de présentation finie), mais en général pas un épimorphisme (Zar) ou (ét). (NB c'est un épimorphisme (ét) si et seulement si n est premier aux caractéristiques résiduelles de S et un épimorphisme (Zar) si et seulement si S est vide.)

0.3. Signalons enfin que la plupart des énoncés concernant les extensions ou les biextensions par $\underline{G}_m$ resteraient valables en remplaçant ce groupe par un <u>tore</u> G. Comme un tel G est localement isomorphe (pour fppf, et même pour (ét)) à un groupe $\underline{G}_m^r$, il s'agit là d'une généralisation essentiellement triviale.

1. <u>Cas particuliers divers sur un topos quelconque</u>

1.1. Dans le présent numéro et le suivant, comme dans VII, T désigne un topos, P,Q et G dénotent trois Groupes abéliens de T, de sorte qu'on a un isomorphisme canonique (VII 3.6.5) :

(1.1.1) $$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \simeq \mathrm{Ext}^1(P\overset{\mathbb{L}}{\otimes}Q\,;G) \quad .$$

Rappelons qu'on a des isomorphismes canoniques (dits "de Cartan")

(1.1.2) $$\mathrm{Ext}^1(P\overset{\mathbb{L}}{\otimes}Q,\ G) \simeq \mathrm{Ext}^1(P,\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)) \simeq \mathrm{Ext}^1(Q,\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(P,G)) \quad .$$

Tous ces isomorphismes sont fonctoriels en les trois arguments P,Q,G.

On déduit de (1.1.1) la suite exacte infinie suivante, compte tenu que les objets d'homologie de $P\overset{\mathbb{L}}{\otimes}Q$ sont les $\underline{\mathrm{Tor}}_i(P,Q)$, qui sont nuls pour $i \geq 1$:

(1.1.3) $$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(P\otimes Q,G) \longrightarrow \mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q),G) \longrightarrow$$
$$\mathrm{Ext}^2(P\otimes Q,G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(P\overset{\mathbb{L}}{\otimes}\,Q,G) \longrightarrow \ \ldots . \quad .$$

D'autre part, les objets de cohomologie de $\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)$ étant les $\underline{\mathrm{Ext}}^i(Q,G)$, la première égalité (1.1.2) donne lieu à la suite exacte à 5 termes,

(1.1.4) $$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(P,\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)) \longrightarrow \mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,G))$$
$$\mathrm{Ext}^2(P,\underline{\mathrm{Hom}}(Q,P)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(P,\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)) \quad ,$$

associée à la suite spectrale habituelle

$$\mathrm{Ext}^*(P,\underline{\mathrm{RHom}}(Q,G)) \Longleftarrow \mathrm{Ext}^p(P,\underline{\mathrm{Ext}}^q(Q,G)) \quad .$$

Nous laissons au lecteur le soin de préciser, s'il en ressent le besoin, la première flèche de (1.1.3) (resp. de (1.1.4)) à l'aide d'un <u>foncteur naturel pleinement fidèle</u>

(1.1.5) $$\mathrm{EXT}(P\otimes Q,G) \longrightarrow \mathrm{BIEXT}(P,Q;G)$$

(resp.

(1.1.6) $$\mathrm{EXT}(P,\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)) \longrightarrow \mathrm{BIEXT}(P,Q;G) \qquad),$$

où EXT et BIEXT désignent les catégories d'extensions et de biextensions qu'on devine.

Bien entendu, l'isomorphisme $\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \simeq \mathrm{Ext}^1(Q,\underline{\mathrm{RHom}}(P,G))$ donne naissance à une suite exacte analogue à (1.1.3), avec les rôles de P et Q intervertis, dont la première flèche peut se préciser à l'aide d'un foncteur pleinement fidèle

(1.1.7) $$\mathrm{EXT}(Q,\underline{\mathrm{Hom}}(P,G)) \longrightarrow \mathrm{BIEXT}(P,Q;G)$$

analogue à (1.1.6).

1.2. Supposons qu'on ait

(1.2.1) $$\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) = 0 \quad ,$$

alors (1.1.3) fournit un isomorphisme canonique

(1.2.2) $$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \simeq \mathrm{Ext}^1(P\otimes Q,G) \quad .$$

Il en est ainsi par exemple si P ou Q est un $\mathbb{Z}$-Module <u>plat</u>. On peut évidemment préciser cet énoncé en disant que sous la condition (1.2.1), le foncteur

(1.1.5) est une équivalence de catégories.

1.3. Supposons qu'on ait

(1.3.1) $$P\otimes Q = 0 \quad ,$$

alors (1.1.3) fournit un isomorphisme canonique

(1.3.2) $$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q),G) \quad .$$

Le cas le plus intéressant pour nous où (1.3.1) est vérifié est celui où on dispose d'un entier $n > 0$ tel que l'on ait

(1.3.3) $$nP=P \quad , \quad Q = \varinjlim_{i} {}_{n^i}Q \quad ,$$

i.e. P est divisible par n et Q est limite de sous-Groupes annulés par des puissances de n. Posant, suivant l'usage

$$T_n(P) = ({}_{n^i}P)_{i\geq 0} \text{ (système projectif)}, \quad {}_{n^\infty}P = \varinjlim_{i} {}_{n^i}P \quad ,$$

on conclut de (1.3.3) des formules plus précises que (1.3.1) :

(1.3.4) $$P\otimes Q = 0 \ , \quad \underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) \simeq \varinjlim_{i} {}_{n^i}P \otimes {}_{n^i}Q \simeq T_n(P)\otimes Q \simeq {}_{n^\infty}P \otimes T_n(Q) \ ,$$

de sorte que l'isomorphisme (1.3.2) prend ici la forme plus concrète :

(1.3.5) $$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \simeq \mathrm{Hom}(T_n(P),D(Q)) \simeq \mathrm{Hom}(Q,D(T_n(P)) \simeq \mathrm{Hom}(T_n(P)\otimes T_n(Q),T_n(G)).$$

Précisons la signification de ces formules :

a) Dans le système inductif qui intervient dans (1.3.4), l'homomorphisme de transition

$${}_{n^i}P \otimes {}_{n^i}Q \longrightarrow {}_{n^j}P \otimes {}_{n^j}Q \qquad (i \leq j)$$

est décrit en identifiant le premier membre à ${}_{n^j}P \otimes {}_{n^i}Q$ grâce à $n^{j-i}\otimes id$, et en utilisant l'homomorphisme

$$id\otimes inj \ : \ {}_{n^j}P \otimes {}_{n^i}Q \longrightarrow {}_{n^j}P \otimes {}_{n^j}Q \quad ,$$

où $inj : {}_{n^i}Q \longrightarrow {}_{n^j}Q$ désigne l'inclusion.

b) On pose, par définition

$$T_n(P) \otimes Q \overset{dfn}{=} \varinjlim T_n(P) \otimes {}_{n^i}Q \quad ,$$

où

$$T_n(P) \otimes M \overset{dfn}{=} {}_{n^i}P \otimes M \quad si \quad n^iM = 0 \quad .$$

On précise de même le sens du troisième terme écrit dans (1.3.4), lorsqu'on suppose que $nQ = Q$ (de sorte que $T_n(Q)$ est, comme $T_n(P)$, un système projectif strict). Le dernier terme de (1.3.4) est un Hom de systèmes projectifs de groupes.

c) La lettre D désigne $\underline{Hom}(-,G)$. L'objet $D(Q)$ est défini comme le système projectif de Groupes

$$D(Q) = (D({}_{n^i}Q))_{i\geq 0} = (Hom({}_{n^i}Q,G))_{i\geq 0} \quad ,$$

le deuxième membre de (1.3.5) étant le groupe d'homomorphismes de système projectifs de groupes. Le dernier membre s'interprète plus simplement en posant

$$D(T_n(P)) \ = \ \varinjlim_i D({}_{n^i}P) \quad ,$$

les morphismes de transition de ce sytème inductif étant évidemment ceux qui se déduisent par transposition des morphismes de transition

$n^{j-1} : {}_{n^j}P \longrightarrow {}_{n^i}P$ de $T_n(P)$.

Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter le calcul de $\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q)$ indiqué dans (1.3.4), et la conséquence (1.3.5) de ce calcul. Notons seulement qu'on utilise les relations déduites de la deuxième hypothèse (1.3.3) :

$$\underline{\mathrm{Tor}}_p(P,Q) \simeq \varinjlim_i \underline{\mathrm{Tor}}_p(P, {}_{n^i}Q) \quad ,$$

qui pour p=0 donne immédiatement $P\otimes Q = 0$, et qui ramène le calcul du $\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q)$ à celui des $\underline{\mathrm{Tor}}_1(P, {}_{n^i}Q)$ et de leurs morphismes de transition. Il reste donc, lorsque Q est annulé par un entier $m = n^i$ tel que $mP = P$, à expliciter un isomorphisme

(1.3.6) $$\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) \xleftarrow{\sim} {}_mP \otimes {}_mQ \qquad (mP=P \quad , \quad mQ = 0) \quad .$$

Il y a diverses façons de la faire, l'une d'elles consistant à utiliser la suite exacte des $\underline{\mathrm{Tor}}$ associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_mP \longrightarrow P \xrightarrow{m} P \longrightarrow 0 \quad .$$

On peut aussi utiliser l'homomorphisme (2.1.1) ci-dessous ; le fait que les morphismes de transition sont ceux précisés dans a) n'est alors autre que 2.1.11. Signalons que de toutes façons, le choix de (1.3.6) revient au choix d'un signe, cf. 2.1.10.

1.4. Supposons que l'on ait

(1.4.1) $$\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G) = 0,$$

alors (1.1.4) fournit un isomorphisme canonique

(1.4.2) $$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(P, \underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,G)) \quad .$$

Ce cas se présente en particulier si Q est un schéma abélien et si $G = \underline{G}_m$, cf. VIII.3.8. Donc le foncteur en P, $P \longmapsto \mathrm{Biext}^1(P,Q;G)$ est <u>représentable</u> par $Q^* = \underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,G)$, et on trouve en particulier une biextension canonique E^Q de (Q^*,Q) par G, défini à isomorphisme unique près (puisque le groupe des automorphismes de E^Q est $\mathrm{Hom}(P,\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)) = 0$). On pourra appeler cette biextension, ou la biextension symétrique ${}^sE^Q$ de (Q,Q^*) par G, la <u>biextension de Weil</u> de (Q^*,Q) ou (Q,Q^*) par G.

1.5. Supposons que l'on ait

$$\mathrm{Hom}(P, \underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,G)) = 0 \quad , \tag{1.5.1}$$

ce qui est le cas en particulier si $\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,G) = 0$ (par exemple si Q est un schéma en groupes fini localement libre ou un groupe de type multiplicatif (SGA 3 IX), et $G = \underline{G}_m$, cf. 3.4 ci-dessous). Alors (1.1.4) fournit un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Biext}^1(P,Q;\, G) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(P,\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)) \quad , \tag{1.5.2}$$

où $\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)$ joue le rôle d'un "groupe dual" de Q (relativement à G). Plus précisément, on déduit de 1.5.2 que le foncteur pleinement fidèle (1.1.6) est une <u>équivalence de catégories</u>.

1.6. Suppossons que l'on ait simultanément les relations

$$\underline{\mathrm{Hom}}(P,G) = 0,\ \mathrm{Hom}(P,\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,G)) = 0 \quad . \tag{1.6.1}$$

En vertu de 1.4, ces deux relations impliquent respectivement qu'on a des isomorphismes

$$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Q,\underline{\mathrm{Ext}}^1(P,G)) \quad ,$$

$$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(P,\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)) \quad ,$$

d'où en composant un isomorphisme canonique

(1.6.2) $\quad \mathrm{Ext}^1(P,\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Q,\underline{\mathrm{Ext}}^1(P,G))\ (\simeq \mathrm{Biext}^1(P,G;G))$,

jouant le rôle d'une formule de dualité. Notons d'ailleurs que la première relation (1.6.1) implique évidemment que $\mathrm{Hom}(P\otimes Q,G) = 0$, donc que la catégorie $\mathrm{EXT}(P,\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G))$ des extensions (commutatives) de P par $\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)$ est rigide (tout automorphisme d'un objet est l'identité), et qu'il en est de même de $\mathrm{BIEXT}(P,Q;G)$. La structure de ces catégories est donc connue quand on connaît le groupe des classes d'isomorphie d'objets, qui en vertu de (1.6.2) est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}(Q,\underline{\mathrm{Ext}}^1(P,Q))$.

Notons que l'application (1.6.2) est définie en tous cas (sans supposer (1.6.1)), et qu'elle peut se décrire aussi directement, sans passer par $\mathrm{Biext}^1(P,Q;G)$, en termes de l'accouplement naturel

$$Q \times Q' \longrightarrow G$$

(où $Q' = \underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)$), en l'interprétant comme un homomorphisme $Q \to \underline{\mathrm{Hom}}(Q',G)$, d'où un composé

(1.6.3) $\quad \mathrm{Ext}^1(P,Q')\times Q \to \mathrm{Ext}^1(P,Q')\times \mathrm{Hom}(Q',G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(P,G)$,

qui redonne (1.6.2).

Pour un cas utile où les considérations de 1.6 s'appliquent, voir 3.7 ci-dessous.

2. Accouplements définis par une biextension

2.1. Soient P et Q deux Groupes abéliens sur T, et $n > 0$ un entier. Rappelons qu'on désigne par ${}_nP$ le noyau de la multiplication par $n\,\mathrm{id}_P$. Nous allons définir un homomorphisme canonique

$$(2.1.1)\qquad \alpha = \alpha^n_{P,Q} \ : \ {}_nP \otimes {}_nQ \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) \quad ,$$

qui sera le composé

$$(2.1.2)\qquad {}_nP \otimes {}_nQ \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}_1({}_nP,{}_nQ) \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) \quad ,$$

où la première flèche est $\alpha^n_{{}_nP,{}_nQ}$, et la deuxième est celle déduite des inclusions ${}_nP \longrightarrow P$, ${}_nQ \longrightarrow Q$. On est donc ramené à définir (2.1.1) dans le cas où on a $nP = 0$, $nQ = 0$, i.e. où P et Q sont des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modules. Supposons seulement $nQ = 0$. Prenant une résolution plate L. de P (en tant que $\mathbb{Z}$-Module), on trouve des isomorphismes canoniques

$$P\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}} Q \simeq L.\otimes_{\mathbb{Z}} Q \simeq (L.\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} Q \quad ,$$

qu'on peut écrire comme un isomorphisme dans la catégorie dérivée

$$(2.1.3)\qquad P\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}} Q \simeq (P\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} Q \quad ,$$

donnant naissance à la suite spectrale de type homologique "de Kunneth" (cf. SGA 1 IV 5.2) :

$$(2.1.4)\qquad \underline{\mathrm{Tor}}^{\mathbb{Z}}_*(P,Q) \Longleftarrow E^2_{p,q} = \underline{\mathrm{Tor}}_p^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\underline{\mathrm{Tor}}_q^{\mathbb{Z}}(P,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),Q)$$

Rappelons d'ailleurs qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\underline{\mathrm{Tor}}_o^{\mathbb{Z}}(P,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = P_n \overset{\mathrm{dfn}}{=} P/nP \ , \ \underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathbb{Z}}(P,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq {}_nP \ ,$$
$$\underline{\mathrm{Tor}}_i^{\mathbb{Z}}(P,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{si } i \geq 2 \ ,$$

déduits du calcul des $\underline{\mathrm{Tor}}_i^{\mathbb{Z}}(P,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ à l'aide de la résolution plate canonique suivante de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_T$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathbb{Z}_T & \xrightarrow{n} & \mathbb{Z}_T & \longrightarrow 0 \\ & \wr\wr & & \wr\wr & \\ & \mathbb{L}_1 & & \mathbb{L}_o & \end{array} \quad ,$$

l'augmentation $\mathbb{L}_o \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_T$ étant définie en envoyant 1 sur 1. Par suite, la suite spectrale (2.1.4) se réduit essentiellement à une suite exacte

(2.1.5) $0 \rightarrow \underline{\mathrm{Tor}}_2^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(P_n,Q) \rightarrow {}_nP \otimes Q \xrightarrow{\alpha} \underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathbb{Z}}(P,Q) \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(P_n,Q) \rightarrow 0,$

où on a posé $P_n = P\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = P/nP$. L'homomorphisme α cherché est l'homomorphisme-coin $E^2_{0,1} \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathbb{Z}}$ qui figure dans la dernière suite exacte. Cette dernière étant évidemment fonctorielle en P et en Q, la fonctorialité en P montre que l'homomorphisme envisagé est bien le composé

$$ {}_nP\otimes Q \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}_1({}_nP,Q) \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) \quad , $$

où le premier homomorphisme est l'homomorphisme α défini comme précédemment, mais avec (P,Q) remplacé par $({}_nP,Q)$, et où le deu ième homomorphisme provient de l'inclusion ${}_nP \longrightarrow Q$.

2.1.6. Ceci définit donc bien, pour P et Q quelconque, un homomorphisme (2.1.1) satisfaisant à la condition de factorisation (2.1.2). De plus, pour nQ=0, la suite exacte (2.1.5) montre que α est un isomorphisme dès que P_n est <u>plat</u> sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (ce qui est le cas en particulier si $P_n = 0$ i.e. nP=P i.e. P est n-divisible, ou si P lui-même est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Module plat) ou si Q est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Module plat.

2.1.7. Explicitons le calcul de l'homomorphisme α de (2.1.5). Pour le connaître, il suffit de connaître, pour toute section q de Q (sur un objet S et T, disons l'objet final pour simplifier) l'homomorphisme ${}_nP \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathbb{Z}}(P,Q)$ correspondant. Or on peut considérer q comme l'image de la section 1 de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\underline{T}}$ par un homomorphisme $u_q : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\underline{T}} \longrightarrow Q$ bien déterminé, et la fonctorialité de l'homomorphisme α en Q nous ramène donc au cas où Q est le faisceau constant $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\underline{T}}$, et où q est la section unité de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\underline{T}}$. Dans ce cas, identifiant $\underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathbb{Z}}(P,Q) = \underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathbb{Z}}(P,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ à ${}_nP$ comme expliqué après (2.1.4) ci-dessus, l'homomorphisme cherché est l'identité, en d'autres termes, l'homomorphisme coin $E^2_{0,q} = \underline{\mathrm{Tor}}_q^{\mathbb{Z}}(P,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}_q^{\mathbb{Z}}(P,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est l'identité. Cela résulte en effet immédiatement des définitions (et l'assertion analogue reste valable en remplaçant $\mathbb{Z}$ et son quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par n'importe quel Anneau A sur $\underline{T}$ et n'importe quel Anneau-quotient A/I de A).

2.1.8. On peut aussi déterminer l'homomorphisme α de (2.1.1) en décrivant, pour tout couple de sections p de ${}_nP$ et q de ${}_nQ$ (sur un objet S de $\underline{T}$, que nous prendrons égal à l'objet final pour simplifier les notations), la section (p,q) de $\underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathbb{Z}}(P,Q)$. Utilisant comme ci-dessus la fonctorialité de α en P et en Q, on est donc ramené au cas où on a

$$P = Q = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\underline{T}} \quad ,$$

p et q étant la section unité de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\underline{T}}$, et on est donc ramené à déterminer l'homomorphisme

$$\alpha : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\underline{T}} \otimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\underline{T}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\underline{T}}, (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_T) \quad .$$

La description 2.1.7 nous montre que c'est l'isomorphisme

(2.1.8.1) $$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\underline{T}} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\underline{T}}, (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_T)$$

déduit de la résolution plate canonique

(2.1.8.2) $$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_T \xrightarrow{n} \mathbb{Z}_T \longrightarrow 0$$

du premier facteur, $P = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\underline{T}}$, qui figure dans le $\underline{\mathrm{Tor}}_1$.

2.1.9. La définition donnée de (2.1.1) n'est pas symétrique, et on peut en échangeant les rôles de P et de Q dans la construction précédente, définir un homomorphisme analogue

(2.1.9.1) $$\beta^n_{P,Q} : {}_nP \otimes {}_nQ \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) \quad ,$$

en se ramenant d'abord au cas nP=0, et utilisant une résolution plate de Q. On peut aussi définir β en termes de α , de façon équivalente, par la commutativité du diagramme

(2.1.9.2) $$\begin{tikzcd} {}_nP\otimes{}_nQ \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\beta^n_{P,Q}"'] & {}_nQ\otimes{}_nP \arrow[d, "\alpha^n_{Q,P}"] \\ \underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) \arrow[r, "\sim"] & \underline{\mathrm{Tor}}_1(Q,P) \end{tikzcd} \quad ,$$

où les flèches horizontales sont les isomorphismes de symétrie. Ceci posé, les relations entre α et β sont données par la formule :

(2.1.9.3) $$\beta^n_{P,Q} = -\alpha^n_{P,Q} \quad ,$$

en d'autres termes :

Lemme 2.1.10. Soient P et Q deux Groupes commutatifs, $n > 0$ un entier. Alors le diagramme suivant est anticommutatif, où α est défini dans (2.1.1) :

(2.1.10.1) $$\begin{tikzcd} {}_nP\otimes{}_nQ \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\alpha^n_{P,Q}"'] \arrow[dr, phantom, "-"] & {}_nQ\otimes{}_nP \arrow[d, "\alpha^n_{Q,P}"] \\ \underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) \arrow[r, "\sim"] & \underline{\mathrm{Tor}}_1(Q,P) \end{tikzcd} \quad ,$$

les flèches horizontales étant les isomorphismes de symétrie.

Démonstration. Le procédé de 2.1.8 nous ramène aussitôt au cas où on a $P=Q = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\underline{T}}$, et à prouver alors que les deux isomorphismes (2.1.8.1) obtenus en résolvant, par (2.1.8.2), le premier et le deuxième argument respectivement intervenant dans le $\underline{\mathrm{Tor}}_1$, on trouve des isomorphismes qui diffèrent par le signe (ou encore, que l'isomorphisme de symétrie sur $\underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est -id). On peut évidemment supposer pour ceci que $\underline{T}$ est le topos ponctuel, i.e qu'on travaille dans la catégorie des groupes commutatifs ordinaires. Or soit L. le complexe

$$L. = \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad ,$$

considéré comme résolution plate de $P = Q = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Utilisons $L.\otimes L.$ pour le calcul de $\mathrm{Tor}_1(P,Q) = \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, alors les isomorphismes avec le H_1 de $L.\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (qui permet de définir α) et avec le H_1 de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\otimes L.$ (qui permet de définir β) sont définis respectivement par l'augmentation $L. \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ du deuxième et du premier facteur de $L.\otimes L.$. Il s'ensuit aussitôt que $\alpha(1,1)$ est représenté par le cycle $- 1_o\otimes 1_1 + 1_1\otimes 1_o \in (L.\otimes L.)_1 = L_o\otimes L_1 + L_1\otimes L_o$ (NB on désigne par 1_o et 1_1 respectivement l'élément 1 de L_o et de L_1), tandis que $\beta(1,1)$ est représenté par le cycle $1_o\otimes 1_1 - 1_1\otimes 1_o$. Cela prouve donc 2.1.10.

Pour terminer ces généralités sur les accouplements α, il faut encore préciser les relations entre les divers homomorphismes $\alpha^n_{P,Q}$, pour n variable. Le résultat principal est donné dans le

Lemme 2.1.11. *Soient* P,Q *deux Groupes commutatifs de* $\underline{T}$, n *et* n' *deux entiers* > 0 *tels que* n' *soit un multiple de* n, *soit* n' = mn. *Alors on a commutativité dans le diagramme suivant*

(2.1.11.1)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & {}_{n'}P \otimes {}_{n}Q \arrow[dl, "p_m \otimes id_{{}_nQ}"'] \arrow[dr, "id_{{}_{n'}P} \otimes i_m"] & \\
{}_{n}P \otimes {}_{n}Q \arrow[dr, "\alpha^{n}_{P,Q}"'] & & {}_{n'}P \otimes {}_{n'}Q \arrow[dl, "\alpha^{n'}_{P,Q}"] \\
 & \underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) &
\end{tikzcd}$$,

où $p_m : {}_{n'}P \longrightarrow {}_{n}P$ désigne l'homomorphisme induit par $m.id_P$, et $i_m : {}_{n}Q \longrightarrow {}_{n'}Q$ désigne l'inclusion. On a de même commutativité dans le diagramme analogue (2.11.2), symétrique de (2.11.1), dont les sommets sont les mêmes que ceux de (2.11.1), sauf le sommet supérieur ${}_{n'}P \otimes {}_{n}Q$, qui est remplacé par ${}_{n}P \otimes {}_{n'}Q$.

Il suffit en effet de prouver le premier énoncé, le deuxième s'en déduit par symétrie, compte tenu de 2.1.10. On est ramené, par le procédé de 2.1.8, au cas où $\underline{T}$ est le topos ponctuel, i.e. où P et Q sont des groupes commutatifs ordinaires, et où on a $P = \mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}$, $Q = \mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}$. En fait, on utilisera pour P la seule hypothèse $n'P=0$. Nous identifierons $\mathrm{Tor}_1(P,Q)$ à ${}_{n'}P = P$, grâce à la résolution $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n'} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ de Q, et de même $\mathrm{Tor}_1({}_nP, {}_nQ)$ à ${}_nP$ grâce à la résolution $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ de ${}_nQ \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dont l'augmentation est donnée en envoyant 1_o sur $m.1_Q$ (1_Q désignant l'élément 1 de $Q = \mathbb{Z}/n'\mathbb{Z}$). L'homomorphisme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1({}_nP, {}_nQ) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \mathrm{Tor}_1(P,Q) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
{}_nP & {}_{n'}P = P
\end{tikzcd}$$

déduit des inclusions ${}_nP \hookrightarrow P$ et ${}_nQ \hookrightarrow Q$ n'est alors autre que l'inclusion naturelle ${}_nP \hookrightarrow {}_{n'}P$. Par suite, identifiant le sommet supérieur de (2.1.11.1) à P/nP, grâce au générateur $m.1_Q$ de ${}_nQ$, permettant d'identifier ${}_nQ$ à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le diagramme envisagé devient

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & P/nP \arrow[dl, "x \mapsto mx"'] \arrow[dr, "x \mapsto mx"] & \\ {}_nP \arrow[dr, "x \mapsto x"'] & & P \arrow[dl, "x \mapsto x"] \\ & {}_{n'}P & \end{tikzcd}$$

qui est évidemment commutatif.

Corollaire 2.1.12. *Avec les notations de* 2.1.11, *on a commutativité dans le diagramme suivant*

$$(2.1.12.1) \qquad \begin{tikzcd} {}_{n'}P \otimes {}_{n'}Q \arrow[r, "m \otimes m"] \arrow[d, "\alpha^{n'}_{P,Q}"'] & {}_nP \otimes {}_nQ \arrow[d, "\alpha^{n}_{P,Q}"] \\ {}_{n'}\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) \arrow[r, "m"] & {}_n\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) \end{tikzcd} \quad ,$$

où, dans la description des flèches horizontales, m *désigne les homomorphismes* ${}_{n'}E \longrightarrow {}_nE$ *induits par* $m.\mathrm{id}_E$ *(pour* E *égal respectivement à* P,Q *et à* $\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q)$).

En effet, en vertu de 2.1.11 on aura, pour $x \in {}_{n'}P(S)$, $y \in {}_{n'}Q(S)$: $\alpha^n(mx\otimes my) = \alpha^{n'}(x\otimes my)$, or le deuxième membre est égal à $m\alpha^{n'}(x\otimes y)$ puisque $x\otimes my = m(x\otimes y)$, d'où la commutativité de (2.1.12.1).

2.1.13. Soit ℓ un nombre premier. Pour tout Groupe commutatif E, désignons par $T_\ell(E)$ le système projectif

$$T_\ell(E) = ({}_{\ell^\nu}E)_{\nu \geq 0} \quad , \tag{2.1.13.1}$$

qui dépend évidemment fonctoriellement de E. Alors les compatibilités 2.1.12, pour n,n' de la forme $\ell^\nu, \ell^{\nu'}$ avec $\nu' \geq \nu$, nous montrent que les $\alpha_{P,Q}^{\ell^\nu}$ pour ν variable définissent un homomorphisme de systèmes projectifs, fonctoriel en P,Q :

$$\alpha_{P,Q}^{(\ell)} : T_\ell(P) \otimes T_\ell(Q) \longrightarrow T_\ell(\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q)) \quad . \tag{2.1.13.2}$$

La connaissance de ces homomorphismes, pour tout nombre premier ℓ, équivaut évidemment à la connaissance des $\alpha_{P,Q}^n$ pour tout entier n. Les relations d'antisymétrie 2.1.10 se traduisent alors par les relations d'antisymétrie analogues ℓ-adiques, pour tout ℓ, exprimées par l'anticommutativité des diagrammes

$$\begin{tikzcd}
T_\ell(P) \otimes T_\ell(Q) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{P,Q}^{(\ell)}"'] \arrow[dr, phantom, "-"] & T_\ell(Q) \otimes T_\ell(P) \arrow[d, "\alpha_{Q,P}^{(\ell)}"] \\
T_\ell(\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q)) \arrow[r] & T_\ell(\underline{\mathrm{Tor}}_1(Q,P))
\end{tikzcd} \quad , \tag{2.1.13.3}$$

où les flèches horizontales sont les flèches de symétrie.

<u>Remarque</u> 2.1.14. On peut généraliser la construction de l'homomorphisme (2.1.1) et les résultats 2.1.10 et 2.1.11 le concernant au cas où on se donne un Anneau commutatif $\underline{A}$ sur T, et deux Idéaux $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de $\underline{A}$ (qui dans le cas traités précédemment se réduisent au même Idéal $n\mathbb{Z}_T$ de

l'Anneau constant $\mathbb{Z}_T$ sur T). On définit alors un homomorphisme fonctoriel en les $\underline{A}$-Modules P,Q :

(2.1.14.1) $$ {}_{\underline{a}}P \otimes {}_{\underline{b}}Q \xrightarrow{\alpha} \underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{A}}(\underline{a} \cap \underline{b}/\underline{a}.\underline{b}\ ,\ \underline{\mathrm{Tor}}_1^{\underline{A}}(P,Q)) \quad ,$$

comme composé des homomorphismes

$$ {}_{\underline{a}}P \otimes {}_{\underline{b}}Q \to \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{A}/\underline{a},P) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{A}/\underline{b},Q) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Tor}}_1(\underline{A}/\underline{a},\underline{A}/\underline{b}),\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q)) \quad ,$$

compte tenu de l'isomorphisme canonique bien connu

(2.1.14.2) $$ \underline{\mathrm{Tor}}_1(\underline{A}/\underline{a},\underline{A}/\underline{b}) \simeq \underline{a} \cap \underline{b}/\underline{a}.\underline{b} \quad ;$$

en fait, c'est dans le choix de cet isomorphisme, suivant qu'on travaille avec la résolution $0 \longrightarrow \underline{a} \longrightarrow \underline{A} \longrightarrow 0$ de $\underline{A}/\underline{a}$ ou la résolution $0 \longrightarrow \underline{b} \to \underline{A} \to 0$ de $\underline{A}/\underline{b}$, qu'est "caché" le signe de 2.1.10, qui se généralise ici en l'anticommutativité du diagramme

(2.1.14.3) $$\begin{tikzcd}[column sep=small] {}_{\underline{a}}P \otimes {}_{\underline{b}}Q \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "-1"] & & {}_{\underline{b}}Q \otimes {}_{\underline{a}}P \arrow[d] \\ \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{a} \cap \underline{b}/\underline{a}.\underline{b},\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q)) \arrow[rr] & & \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{a} \cap \underline{b}/\underline{a}.\underline{b},\underline{\mathrm{Tor}}_1(Q,P)) \end{tikzcd} \quad ,$$

où les flèches horizontales sont les flèches de symétrie. Lorsque $\underline{a}=\underline{b}$, cette anticommutativité peut aussi s'exprimer par le fait que l'automorphisme de symétrie dans $\underline{\mathrm{Tor}}_1(\underline{A}/\underline{a},\underline{A}/\underline{a})$ est égal à -id . Dans le cas particulier où $\underline{a} = \underline{b} = n\underline{A}$, n étant une section de $\underline{A}$, alors la multiplication par n induit un épimorphisme

$$ \underline{A}/\underline{a} \longrightarrow \underline{a} \cap \underline{a}/\underline{a}.\underline{a} = \underline{a}/\underline{a}^2 \quad ,$$

d'où un isomorphisme injectif fonctoriel en le $\underline{A}$-Module T

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{a}/\underline{a}^2, T) \longrightarrow {}_{\underline{a}}T \quad ,$$

de sorte que dans ce cas l'homomorphisme (2.1.14.1) s'interprète comme un homomorphisme

(2.1.14.4) $${}_nP \otimes {}_nQ \longrightarrow {}_n\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) \quad ,$$

plus proche de la forme (2.1.1). Supposant toujours $\underline{a} = \underline{b} = n\underline{A}$, et n une section <u>régulière</u> de $\underline{A}$, la suite spectrale (2.1.4) garde un sens dans le cas présent, et donne lieu à une suite exacte de termes de bas degré qui généralise (2.1.5) (Q étant maintenant un $\underline{A}$-Module <u>annulé par</u> $\underline{a}$) :

(2.1.14.5) $$\underline{\mathrm{Tor}}_2^{\underline{A}}(P,Q) \to \underline{\mathrm{Tor}}_2^{\underline{A}/n\underline{A}}(P_n,Q) \to {}_nP \otimes Q \xrightarrow{\alpha} \underline{\mathrm{Tor}}_1^{\underline{A}}(P,Q) \to \underline{\mathrm{Tor}}_1^{\underline{A}/n\underline{A}}(P_n,Q) \to 0.$$

Revenons au cas où $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont quelconques, et où on se donne deux sections p et q de $\underline{A}$, on trouve alors commutativité dans le diagramme suivant (dont (2.1.11.1) est essentiellement le cas particulier obtenu en prenant q=1) :

(2.1.14.6)
$$\begin{tikzcd}
& {}_{p\underline{a}}P \otimes {}_{q\underline{b}}Q \arrow[dl, "p\otimes q"'] \arrow[dr, "i\otimes j"] & \\
{}_{\underline{a}}P \otimes {}_{\underline{b}}Q \arrow[d, "\alpha"'] & & {}_{pq\underline{a}}P \otimes {}_{pq\underline{b}}Q \arrow[d, "\alpha"] \\
\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{a}\cap\underline{b}/\underline{a}.\underline{b}, \underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q)) \arrow[dr, "\mathrm{incl.}"'] & & \underline{\mathrm{Hom}}(pq\underline{a}\cap pq\underline{b} \,/\, pq\underline{a}.pq\underline{b}, \underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q)) \arrow[dl, "(pq)^*"] \\
& \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{a}\cap\underline{b}/pq\underline{a}.\underline{b}, \underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q)) &
\end{tikzcd}$$
,

où $i : {}_{p\underline{a}}P \longrightarrow {}_{pq\underline{a}}P$ et $j : {}_{q\underline{b}}Q \longrightarrow {}_{pq\underline{b}}Q$ sont les inclusions canoniques, et $(pq)^*$ désigne l'homomorphisme injectif déduit par passage aux $\underline{\mathrm{Hom}}$ de l'homomorphisme surjectif $\underline{a}\cap\underline{b}/pq\ \underline{a}.\underline{b} \longrightarrow pq\ \underline{a}\cap\underline{b}/pq\underline{a}.pq\underline{b}$ induit par la multiplication par pq . Lorsque $\underline{a} = \underline{b} = n\underline{A}$, ce diagramme se réécrit sous une forme plus simple (donnée dans (2.1.11.1) pour $q = 1$).

2.2. Considérons maintenant, en plus de P et Q, un Groupe commutatif G. Nous avons alors défini dans (1.1.3) un homomorphisme canonique, fonctoriel en P,Q et G :

(2.2.1) $$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}_1(P,Q),G) \quad .$$

D'autre part, si n est un entier > 0 (resp. si ℓ est un nombre premier) alors l'homomorphisme $\alpha^n_{P,Q}$ de (2.1.1) (resp. l'homomorphisme $\alpha^{(\ell)}_{P,Q}$ de (2.1.13.2)) donne un homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}_1(P,Q),G) \longrightarrow \mathrm{Hom}({}_nP \otimes {}_nQ\ ,\ G)$$

(resp. un homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}_1(P,Q),G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_\ell(P)\otimes T_\ell(Q),\ T_\ell(G))\ ).$$

Ces derniers homomorphismes sont également fonctoriels en P,Q,G. Les composant avec (2.2.1), on en déduit des homomorphismes canoniques, fonctoriels en P,Q,G :

(2.2.2) $$\varphi^n = \varphi^n_{P,Q} : \mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}({}_nP\otimes{}_nQ,\ G) \quad ,$$

(2.2.3) $$\varphi^{(\ell)} = \varphi^{(\ell)}_{P,Q} : \mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_\ell(P)\otimes T_\ell(Q),\ T_\ell(G)) \quad .$$

Pour

(2.2.4) $$\xi \in \mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \quad ,$$

on désigne par φ_ξ^n (resp. $\varphi_\xi^{(\ell)}$) son image par (2.2.2) (resp. (2.2.3)) :

(2.2.5) $$\varphi_\xi^n : {}_nP \otimes {}_nQ \longrightarrow G \text{ (ou } {}_nG, \text{ au choix)} \quad ,$$

(2.2.6) $$\varphi_\xi^{(\ell)} : T_\ell(P) \otimes T_\ell(Q) \longrightarrow T_\ell(G) \quad .$$

2.2.7. Evidemment la connaissance de $\varphi_\xi^{(\ell)}$ équivaut à celle des $\varphi_\xi^{(n)}$ pour tout n de la forme ℓ^ν, avec $\nu \geq 0$, et pour n fixé, la connaissance de $\varphi_\xi^{(n)}$ équivaut à celle de l'homomorphisme

(2.2.8) $$\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) \longrightarrow G \quad ,$$

image de ξ par (2.2.1), sur l'image de $\varphi_{P,Q}^n : {}_nP \otimes {}_nQ \longrightarrow \underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q;G)$. On notera que lorsque P=nP et Q=nQ, alors l'image précédente est égale à ${}_n\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q)$, comme il résulte aisément de la considération de la suite exacte (1.3.5) et de la suite exacte analogue pour Q ; d'autre part, si P et Q sont divisibles i.e. si nP=P, nQ=Q pour tout entier $n > 0$, alors on vérifie aisément que $\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q)$ est de torsion i.e. $\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) = \varinjlim_n {}_n\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q)$, de sorte que dans ce cas la connaissance des φ_ξ^n pour tout n équivaut à celle de (2.2.8), tandis que la connaissance de $\varphi_\xi^{(\ell)}$, pour un nombre premier donné, équivaut à celle de la restriction de (2.2.8) à la composante ℓ-primaire de $\mathrm{Tor}_1(P,Q)$. Nous allons expliciter maintenant les propriétés de symétrie des accouplements (2.2.4), (2.2.6) associés aux biextensions. Notons d'abord qu'on a un diagramme <u>commutatif</u>

(2.2.9)
$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Biext}^1(Q,P;G) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q),G) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{Tor}}_1(Q,P),G)
\end{array} \quad ,$$

où les flèches horizontales sont les flèches de symétrie (la première de ces flèches étant définie dans VII **2.7**), et les flèches verticales sont (2.2.1). Cette commutativité résulte en effet de la commutativité des deux carrés composants du diagramme plus complet

$$\text{(2.2.10)}\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Biext}^1(P,Q;G) & \xrightarrow{\ \sim\ } & \mathrm{Biext}^1(Q,P;G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}^1(P\overset{\mathbb{L}}{\otimes}Q,G) & \xrightarrow{\ \sim\ } & \mathrm{Ext}^1(Q\overset{\mathbb{L}}{\otimes}P,G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q),G) & \xrightarrow{\ \sim\ } & \mathrm{Hom}(\underline{\mathrm{Tor}}_1(Q,P),G) \end{array} \quad ,$$

où la première flèche verticale de chaque colonne est l'isomorphisme canonique de VII 3.6.5 , et la deuxième flèche est l'homomorphisme évident. La commutativité du deuxième carré de (2.2.10) est triviale, compte tenu que l'isomorphisme de symétrie $P\overset{\mathbb{L}}{\otimes}Q \xrightarrow{\sim} Q\overset{\mathbb{L}}{\otimes}P$ induit par définition l'isomorphisme de symétrie $\underline{\mathrm{Tor}}_1(P,Q) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Tor}}_1(Q,P)$, et que pour un complexe variable L. , l'homomorphisme canonique $\mathrm{Ext}^1(L.,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H_1(L.),G)$ est fonctoriel en L. . Quant à la commutativité du premier carré de (2.2.10), elle résulte de l'explicitation simultanée des isomorphismes de symétrie et des isomorphismes verticaux définis dans VII 3. 6.5 , et nous laissons le détail de la vérification au lecteur ; on utilisera le fait que l'isomorphisme de symétrie $L.(P)\otimes L.(Q) \xrightarrow{\sim} L.(Q)\otimes L.(P)$ induit en degré 1 l'isomorphisme

$$L_o(P)\otimes L_1(Q) + L_1(P)\otimes L_o(Q) \xrightarrow{\sim} L_o(Q)\otimes L_1(P) + L_1(Q)\otimes L_o(P)$$

qui est donné sur les sommandes correspondants par l'isomorphisme de symétrie <u>ordinaire</u> des modules non gradués sous-jacents (donc sans intervention d'un signe).

Compte tenu de la commutativité de (2.2.9), l'anticommutativité de (2.1.10.1) se traduit, en termes des φ^n ou des $\varphi^{(\ell)}$, par la relation suivante :

<u>Proposition</u> 2.2.11. <u>On a anticommutativité dans les diagrammes suivants</u> :

(2.2.11.1)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\varphi^n_{P,Q}"'] \arrow[dr, phantom, "-"] & \mathrm{Biext}^1(Q,P;G) \arrow[d, "\varphi^n_{Q,P}"] \\ \mathrm{Hom}({}_nP \otimes {}_nQ, G) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}({}_nQ \otimes {}_nP, G) \end{tikzcd} ,$$

(2.2.11.2)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\varphi^{(\ell)}_{P,Q}"'] \arrow[dr, phantom, "-"] & \mathrm{Biext}^1(Q,P;G) \arrow[d, "\varphi^{(\ell)}_{Q,P}"] \\ \mathrm{Hom}(T_\ell(P)\otimes T_\ell(Q), T_\ell(G)) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(T_\ell(Q)\otimes T_\ell(P), T_\ell(G)) \end{tikzcd} ,$$

<u>où les flèches horizontales sont les flèches de symétrie</u>.

Signalons le corollaire important :

<u>Corollaire</u> 2.2.12. <u>Supposons</u> P=Q, <u>et supposons que</u> ξ <u>soit la classe d'une biextension</u> symétrique (<u>resp</u>. <u>antisymétrique</u>) <u>de</u> (P,Q) <u>par</u> G, <u>i.e</u>. <u>qu'on ait</u> ${}^s\xi = \xi$ (<u>resp</u>. ${}^s\xi = -\xi$), <u>où</u> ${}^s\xi$ <u>désigne l'image de</u> ξ <u>par symétrie</u>. <u>Alors les applications bilinéaires</u> φ^n_ξ (<u>sur</u> ${}_nP \times {}_nP$) <u>et</u> $\varphi^{(\ell)}_\xi$ (<u>sur</u> $T_\ell(P)\times T_\ell(P)$) <u>sont antisymétriques</u> (<u>resp</u>. <u>symétriques</u>).

<u>Remarque</u> 2.2.13. Supposons ξ <u>symétrique</u>. Si n (resp. ℓ) est impair, alors il résulte de 2.2.12 que φ_ξ^n (resp. $\varphi_\xi^{(\ell)}$) est même une forme alternée. Cette conclusion n'est pas valable en général sans la restriction n resp. ℓ impair, comme on voit déjà dans le cas où P est le groupe ordinaire $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Supposons cependant que l'on ait $2P = P$, (ce qui est le cas en particulier si P est un schéma abélien, en travaillant comme d'habitude avec la topologie fppf ou fpqc), alors il est encore vrai que les formes précédentes sont alternées. Il suffit de voir que $\varphi^{2^\nu}(x,x) = 0$, or, comme $2P=P$, on peut supposer que l'élément donné $x \in {}_{2^\nu}P(S)$ est de la forme $2y$, avec $y \in {}_{2^{\nu+1}}P(S)$, et on a alors $\varphi^{2^\nu}(x,x) = 2\,\varphi^{2^{\nu+1}}(y,y) = 0$, puisque $\varphi^{2^{\nu+1}}$ est antisymétrique.

2.3. <u>Lien avec la</u> "<u>dualité de Cartier</u>". La description donnée dans 2.2 des accouplements définis par une biextension, via le théorème d'isomorphisme VII 3.6.5 et l'homomorphisme (2.2.1), n'est évidemment pas la définition qui avait été utilisée précédemment dans le cas des schémas abéliens (à un moment où la notion même de biextension n'existait pas encore!). Celle-ci procède via la dualité de Cartier, et nous allons donner maintenant la relation avec cette dernière.

Reprenons l'homomorphisme

$$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P,\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,G)) \tag{2.3.1}$$

provenant de la suite exacte (1.4), qui est d'ailleurs un isomorphisme dans le cas où l'on a

$$\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G) = 0 \quad , \tag{2.3.2}$$

condition vérifiée en particulier lorsque Q est un schéma abélien sur un schéma S, et G est le groupe multiplicatif $\underline{G}_m$ (VII 1.3.8). On a d'autre part un homomorphisme évident "restriction à n Q", $\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,G) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(nQ,G)$, d'où un homomorphisme composé

(2.3.4) $\mathrm{Hom}(P,\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,G)) \to \mathrm{Hom}(P,\underline{\mathrm{Ext}}^1(nQ,G)) \to \mathrm{Hom}({}_nP,{}_n\underline{\mathrm{Ext}}^1(nQ,G))$,

où la deuxième flèche est l'homomorphisme de restriction à ${}_nP$. Composant avec (2.3.1), on trouve un homomorphisme

(2.3.5) $$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}({}_nP,{}_n\underline{\mathrm{Ext}}^1(nQ,G)) \quad .$$

D'autre part, la suite exacte

(2.3.6) $$0 \longrightarrow {}_nQ \longrightarrow Q \xrightarrow{n} nQ \longrightarrow 0$$

donne lieu à une suite exacte des $\underline{\mathrm{Ext}}^i(-,G)$, d'où une suite exacte courte

(2.3.7) $$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)_n \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}({}_nQ,G) \xrightarrow{\partial} {}_n\underline{\mathrm{Ext}}^1(nQ,G) \longrightarrow 0 \quad ,$$

où E_n désigne, comme d'habitude, E/nE . On en retiendra l'homomorphisme canonique surjectif

(2.3.8) $$\underline{\mathrm{Hom}}({}_nQ,G) \xrightarrow{\quad\partial\quad} {}_n\underline{\mathrm{Ext}}^1(nQ,G) \quad ,$$

qui est d'ailleurs un isomorphisme si $\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G)_n = 0$, a fortiori si on a (2.3.2). De (2.3.8) on déduit un homomorphisme

(2.3.9) $$\mathrm{Hom}({}_nP,\underline{\mathrm{Hom}}({}_nQ,G)) \simeq \mathrm{Hom}({}_nP\otimes{}_nQ,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}({}_nP,{}_n\underline{\mathrm{Ext}}^1(nQ,G)) \quad ,$$

qui est un isomorphisme si on a (2.3.2).

Tous les homomorphismes envisagés sont fonctoriels en P,Q,G.

Les homomorphismes (2.3.5), (2.3.9) et (2.2.2) donnent lieu à un diagramme

$$
(2.3.10) \qquad
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \arrow[dl, "\varphi^n"'] \arrow[dr, "(2.3.5)"] \arrow[d, phantom, "-"] & \\
\mathrm{Hom}({}_nP \otimes {}_nQ, G) \arrow[rr, "(2.3.9)"] & & \mathrm{Hom}({}_nP, {}_n\underline{\mathrm{Ext}}^1(nQ,G))
\end{tikzcd} \quad ,
$$

où la flèche horizontale (2.3.9) est un isomorphisme si on a (2.3.2).

Proposition 2.3.11. *Le diagramme* (2.3.10) *est* anticommutatif.

Dans le cas où $\underline{\mathrm{Hom}}(Q,G) = 0$, cet énoncé redonne donc une caractérisation de l'homomorphisme φ^n de (2.2.2) en termes des homomorphismes (2.3.5) et (2.3.9), qui est celle utilisée précédemment en théorie des schémas abéliens (où d'ailleurs on a $nQ = Q$).

Démonstration de 2.5.11 (*). Soient ξ un élément de $\mathrm{Biext}^1(P,Q;G)$, $\varphi_\xi : {}_nP \otimes {}_nQ \longrightarrow G$ l'accouplement associé, et $u_\xi : {}_nP \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(nQ,G)$ l'homomorphisme image de ξ par (2.3.5). Il faut prouver que $-u_\xi$ se déduit de φ_ξ par la flèche (2.3.9), i.e. que c'est le composé

$$
(*) \qquad {}_nP \xrightarrow{\varphi_\xi} \underline{\mathrm{Hom}}({}_nQ,G) \xrightarrow{(2.3.8)} {}_n\underline{\mathrm{Ext}}^1(nQ,G) \quad .
$$

Pour prouver ceci, on peut supposer donnée une section x de ${}_nP$ et prouver que son image $-u_\xi$ est égale à son image par le composé (*). (Ceci nous permettrait, si nous le désirions, de nous ramener au cas où $P = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_T$, mais cette réduction ne nous sera pas nécessaire.)

a) Choisissons des résolutions plates $L.$ et $M.$,

$$
0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_o \longrightarrow 0 \quad , \quad 0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_o \longrightarrow 0
$$

de P et Q respectivement, une résolution plate de P (par exemple) étant

---

(*) Pour une démonstration plus élégante, cf 2.3.19 ci-dessous.

obtenue en écrivant P comme quotient d'un $\mathbb{Z}_T$-Module plat L_o, et en désignant par L_1 le noyau de $L_o \longrightarrow P$ (qui est plat, car sans torsion). On en déduit un complexe $L.\otimes M.$

$$0 \longrightarrow L_1\otimes M_1 \xrightarrow{d_2} L_1\otimes M_o + L_o\otimes M_1 \xrightarrow{d_1} L_o\otimes M_o \longrightarrow 0 \quad ,$$

dont le faisceau $\underline{H}_1$ nous servira de $\underline{Tor}_1(P,Q)$. Désignons par L'_o resp. M'_o le sous-faisceau de L_o resp. M_o image inverse de ${}_nP$ resp. ${}_nQ$, de sorte que le complexe $0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L'_o \longrightarrow 0$ (resp. le complexe $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M'_o \longrightarrow 0$) est une résolution plate de ${}_nP$ (resp. de ${}_nQ$).
On peut alors expliciter l'homomorphisme

$${}_nP \otimes {}_nQ \longrightarrow \underline{Tor}_1(P,Q) = \underline{H}_1(L.\otimes M.)$$

par passage au quotient à partir de l'homomorphisme

$$L'_o \otimes M'_o \longrightarrow \underline{H}_1(L.\otimes M.)$$

donné par

$$x_o\otimes y_o \longmapsto \text{classe du 1-cycle } [nx_o]\otimes y_o - x_o\otimes [ny_o] \quad ,$$

où les crochets [ ] indiquent que l'élément envisagé est considéré comme section du sous-faisceau L_1 de L_o resp. M_1 de M_o . L'explicitation précédente résulte en effet du calcul fait dans la démonstration de 2.1.10.

b) Prenons une résolution injective

$$0 \longrightarrow C^o \xrightarrow{d^o} C^1 \longrightarrow \dots$$

de G, et identifions $\mathrm{Biext}^1(P,Q;G)$ à $\mathrm{Ext}^1(P\overset{\mathbb{L}}{\otimes}Q,G) = H^1(\mathrm{Hom}^\cdot(L.\otimes M.,C^\cdot))$.
Donc l'élément ξ peut s'interpréter comme un couple f_1, f_o d'homomorphismes, donnant lieu à un diagramme anticommutatif

(2.3.12)
$$\begin{tikzcd} L_1\otimes M_o + L_o\otimes M_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "-"] & L_o\otimes M_o \arrow[d, "f_o"] \\ C^o \arrow[r, "d^o"] & C^1 \end{tikzcd} .$$

Par définition, l'accouplement

$$\varphi_\xi : {}_nP \otimes {}_nQ \longrightarrow G$$

se déduit alors par passage au quotient de l'homomorphisme

$$\varphi : L'_o\otimes M'_o \longrightarrow G$$

donné par

(2.3.13) $\varphi(x_o \otimes y_o) = f_1([nx_o] \otimes y_o - x_o \otimes [ny_o]) \in G = \mathrm{Ker}(C^o \longrightarrow C^1)$.

Nous pouvons supposer que la section donnée x de ${}_nP$ se relève en une section x_o de L'_o (car l'assertion (2.3.11) est locale sur T), et la formule précédente, où y_o est considéré comme variable, définit donc un homomorphisme

(2.3.14) $\varphi' : M'_o \longrightarrow G \quad , \quad y_o \longmapsto f_1([nx_o]\otimes y_o \to x_o\otimes[ny_o])$,

qui passe au quotient pour nous donner l'homomorphisme

$${}_nQ \longrightarrow G \quad , \quad y \longmapsto \varphi_\xi(x,y)$$

associé à φ_ξ et à x .

c) Il faut prendre l'image de cet homomorphisme par l'opérateur ∂ de (2.3.7), associé à la suite exacte (2.3.6). Or $nQ \simeq Q/{}_nQ$ est évidemment aussi isomorphe à M_o/M'_o , de sorte qu'on a un homomorphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_o & \longrightarrow & M_o & \longrightarrow & M_o/M'_o & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \wr\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & {}_nQ & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & nQ & \longrightarrow & 0 \end{array} ,$$

où la dernière flèche verticale est un isomorphisme. Ceci montre que la section cherchée de $\underline{\mathrm{Ext}}^1(nQ,G)$ peut aussi être calculée comme l'image de φ' (2.3.14) par l'opérateur cobord

$$\underline{\mathrm{Hom}}(M'_o,G) \xrightarrow{\partial} \underline{\mathrm{Ext}}^1(M_o/M'_o,G) \quad ,$$

ou encore la section du deuxième membre défini par l'élément du Ext^1 global image de φ' par l'opérateur cobord

$$\mathrm{Hom}(M'_o\ ,G) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M_o/M'_o,G) \quad .$$

La construction habituelle de l'opérateur cobord nous donne alors la recette suivante : on prolonge le composé (2.3.13)

$$M'_o \xrightarrow{\varphi'} G \longrightarrow C^o$$

en un homomorphisme

$$\psi : M_o \longrightarrow C^o \quad ,$$

ce qui est possible puisque C^o est injectif, et on considère l'unique homomorphisme

$$\lambda : M_o/M'_o \longrightarrow C^1 \tag{2.3.15}$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_o & \longrightarrow & M_o & \longrightarrow & M_o/M'_o & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & C^o & \longrightarrow & C^1 & & \end{array} .$$

Il est clair que (2.3.15) est à valeurs dans les 1-cocycles, i.e. est un 1-cocycle, et que ce dernier représente l'élément cherché de $\mathrm{Ext}^1(nQ,G) = \mathrm{Ext}^1(M_o/M'_o,G)$.

d) Il reste à expliciter la section de $\underline{\mathrm{Ext}}^1(nQ,G)$ déduite de ξ et de x grâce à la flèche (2.3.5) du diagramme (2.3.10). Pour ceci, nous pouvons ignorer le fait que la section x de P est annulée par n, et on trouve la description suivante, en termes de relèvement choisi x_o de x en une section de L_o : cette dernière définit un homomorphisme d'augmentation

$$u : M. \longrightarrow L.\otimes M. \quad , \quad y_o \longmapsto x_o \otimes y_o \ , \ y_1 \longmapsto x_o \otimes y_1 \quad ,$$

et la section de $\mathrm{Ext}^1(Q,G)$ déduite de (2.3.1) est celle qui se déduit de l'élément ξ de $\mathrm{Ext}^1(L.\otimes M.,G)$ en composant avec l'homomorphisme précédent, donc est donné par l'homomorphisme de degré 1

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "y_1 \mapsto f_1(x_o\otimes y_1)"'] \arrow[dr, phantom, "-"] & M_o \arrow[r] \arrow[d, "y_o \mapsto f_1(x_o\otimes y_o)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^o \arrow[r, "d^o"] & C^1 & \ldots
\end{tikzcd} .$$

Pour prendre la restriction de cette classe à $nQ \hookrightarrow Q$, utilisons l'isomorphisme $nQ \xrightarrow{\sim} M_o/M'_o$, qui fournit une résolution plate

$$0 \longrightarrow M'_o \longrightarrow M_o \longrightarrow 0$$

de nQ, l'inclusion $nQ \hookrightarrow Q$ étant remontée en un homomorphisme de résolutions

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M'_o \arrow[r] \arrow[d, "y'_o \mapsto {[ny'_o]}"'] \arrow[dr, phantom, "+"] & M_o \arrow[r] \arrow[d, "y_o \mapsto ny_o"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & M_o \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

Par composition, on voit donc que la section cherchée de $\underline{\mathrm{Ext}}^1(nQ,G)$ est associée à l'élément de $\mathrm{Ext}^1(nQ,G)$ représenté par l'homomorphisme de complexes de degré 1

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M'_o & \xrightarrow{d_1} & M_o & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_o} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & C^o & \longrightarrow & C^1 & \longrightarrow & \cdots & & , \end{array}$$

avec

$$g_1(y'_o) = f_1(x_o \otimes [ny'_o]) \quad , \quad g_o(y_o) = nf_o(x_o \otimes y_o) \quad .$$

e) Utilisant maintenant le fait que x est une section de ${}_nP$, montrons que l'élément précédent de $\mathrm{Ext}^1(nQ,G)$ est opposé de celui défini par (2.3.15). Pour ceci, notons que pour tout homomorphisme

$$h : M_o \longrightarrow C^o \quad ,$$

l'élément du Ext^1 envisagé dans d) ne change pas si on change g_1, g_o respectivement en

$$g'_1 = g_1 + hd_1 \quad , \quad g'_o = g_o - d^o h \quad .$$

Or on dispose d'un homomorphisme $\psi : M_o \longrightarrow C^o$ construit dans c), qui par définition satisfait la condition

$$\psi(y'_o) = f_1([nx_o] \otimes y'_o - x_o \otimes [ny'_o])$$

pour y'_o section de M'_o, ce qui s'écrit encore

$$f_1(x_o \otimes [ny'_o]) \ (= g_1(y'_o)) = f_1([nx_o] \otimes y'_o\ ) - \psi(y'_o) \quad ;$$

définissons donc $h : M_o \longrightarrow C^o$ par

$$h(y_o) = -f_1([nx_o] \otimes y_o) + \psi(y_o) \quad ;$$

donc par construction on aura

$$g_1' = 0 \ , \ g_o'(y_o) = nf_o(x_o \otimes y_o) + d^o f_1([nx_o] \otimes y_o) - d^o\psi(y_o) \quad ,$$

or on a $d^o f_1 = -f_o d_1$ donc $d^o f_1([nx_o] \otimes y_o) = - f_o(nx_o \otimes y_o)$, et il reste

$$g_1' = 0 \quad , \quad g_o' = -d^o\psi \quad ,$$

de sorte que l'élément envisagé est celui défini par l'homomorphisme $M_o/M_o' \xrightarrow{\sim} nQ \longrightarrow C^1$ déduit de $- d^o\psi$ par passage au quotient. On trouve donc l'opposé de l'élément défini par (2.3.15).

Remarques 2.3.16. La démonstration précédente donne en fait une compatibilité légèrement plus précise que celle indiquée dans 2.3.11, obtenue en choisissant une section x de ${}_nP$. Cette section définit alors un homomorphisme $y \longmapsto \varphi_\xi(x,y)$ de ${}_nQ$ dans G, d'où par l'homomorphisme cobord relatif à (2.3.6) un élément de $Ext^1(nQ,G)$. D'autre part, oubliant que x est annulé par n, on considère l'homomorphisme $\mathbb{Z}_T \longrightarrow P$ défini par X, d'où par image inverse une biextension de $(\mathbb{Z}_T,Q)$ par G, dont la classe peut s'interpréter comme un élément de $Ext^1(Q,G)$, et induit donc un élément de $Ext^1(nQ,G)$. Ceci posé, les deux éléments obtenus dans $Ext^1(nQ,G)$ sont opposés.

2.3.17. Profitons de l'explicitation en termes de cocycles de l'accouplement $\varphi_\xi^n : {}_nP \otimes {}_nQ \longrightarrow G$, donnée dans (2.3.12), pour donner une autre expression de cet accouplement. Supposons d'abord que la biextension E de classe ξ admette une section s sur $P \times Q$. Prenons, comme dans VII 3.8.13, comme résolution plate de P celle donnée par $L_o = \mathbb{Z}[P]$, L_1 étant le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathbb{Z}[P] \longrightarrow P$, et définissons de même $M.$. Alors il existe une unique trivialisation de biextension de l'image inverse de E sur (L_o, M_o), dont la restriction à $P \times Q$ soit donnée par s, appelons la encore s (cf. VII 3.8.2). En vertu de VII 3.8.12, la classe de ξ dans $\mathrm{Ext}^1(P \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q, G)$ est donnée par le cocycle de composantes (f,g), caractérisées par

$$s(x_1, y_o) = f(x_1 \otimes y_o) e_{E/Q}(y_o) \ , \ s(x_o, y_1) = g(x_o \otimes y_1) e_{E/P}(x_o) \quad .$$

Si alors x , y sont des sections de ${}_nP$ et ${}_nQ$, on les remonte en les sections correspondantes $x_o = [x]$, $y_o = [y]$ de L_o et M_o, et on applique la formule (2.3.13), qui nous donne, posant $z = s(x,y)$:

$$(2.3.18) \qquad \varphi^n_\xi(x,y) = {}^n z / e_{E/Q}(y) \ - \ z^n / e_{E/P}(x) \quad ,$$

où l'exposant n à gauche resp. à droite de z indique la puissance n.ième pour la structure multiplicative gauche resp. droite sur E, de sorte qu'on trouve une section de E au-dessus de (0,y) resp. (x,0) ; la signification du "quotient" d'un tel élément par $e_{E/Q}(y)$ resp. $e_{E/P}(x)$ est claire.

Notons maintenant que la formule précédente (2.3.18) garde un sens, dès que z est une section globale de E qui relève les sections x,y de ${}_nP$, ${}_nQ$. Je dis que la formule (2.3.18) est valable pour toute telle section, sans supposer qu'il existe une section de E sur $P \times Q$. Comme la section (x,y) de $P \times Q$ se relève en tous cas localement en une section de E (puisque $E \longrightarrow P \times Q$ est un épimorphisme), ceci permet donc de calculer $\varphi^n_\xi(x,y)$ dans tous les cas. Noter d'ailleurs que si on remplace z par une autre section z' de E relevant (x,y), on aura $z' = z + g$, où g est une section de G, et les deux termes du deuxième membre de (2.3.18) correspondants à z' sont ceux correspondants à z, augmentés de ng, de sorte que la différence est bien indépendante de z , ce qui nous montre que la formule (2.3.18) définit bien un homomorphisme bien déterminé ${}_nP \otimes {}_nQ \longrightarrow G$.

Reste à montrer que ce dernier est bien φ^n. Or pour ceci on est ramené aussitôt au cas où $P=Q = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_T$, de sorte que $P\times Q$ est de la forme I_T , où $I = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un ensemble fini. Dans ce cas, le torseur E sous $G_{P\times Q}$ (qui s'identifie à une famille de torseurs E_i sous G, $i \in I$) devient évidemment trivial localement sur T, de sorte que nous sommes ramenés au cas où il existe une section globale de E sur $P\times Q$, cas déjà traité.

2.3.19. Autre démonstration de 2.3.11 (de DELIGNE).

a) Réduction à $P = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et à $T = (\mathrm{Ens})$

b) Soit ∂ la flèche suivante de nQ dans ${}_nQ[1]$:

$$nQ \xleftarrow[\text{"}n\text{"}]{\sim} [{}_nQ \longrightarrow Q] \longrightarrow {}_nQ[1] \quad .$$

Le diagramme suivant est anticommutatif :

$$\begin{tikzcd}
nQ[0] \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\partial"'] & {[Q \xrightarrow{n} Q]} \\
{}_nQ[1] \arrow[ur, "1"'] &
\end{tikzcd} \quad .$$

En effet, les flèches

$$\begin{tikzcd}
{[{}_nQ} \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & {Q]} \arrow[d, "n"] \\
{[Q} \arrow[r, "n"] & {Q]}
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
{[{}_nQ} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & {Q]} \arrow[d, "0"] \\
{[Q} \arrow[r, "n"] & {Q]}
\end{tikzcd}$$

sont opposées grâce à H :

$$\begin{tikzcd}
{[{}_nQ} \arrow[r] & {Q]} \arrow[dl, "1"] \\
{[Q} \arrow[r, "n"] & {Q]}
\end{tikzcd}$$

c) 2.3.10 est le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & H^1\mathrm{RHom}(\mathbb{Z} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q,G) \arrow[dd, "+"] \\
H^1\mathrm{RHom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q,G) \arrow[r] \arrow[urr] \arrow[d] & H^1\mathrm{RHom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} , \mathrm{RHom}(Q,G)) \arrow[d] & \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} ,Q),G) \arrow[r, phantom, "-?"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} ,\mathrm{Ext}^1(Q,G)) \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(Q,G) \arrow[dl] \\
\mathrm{Hom}({}_nQ,G) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(nQ,G) &
\end{tikzcd}$$

et

c 1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Q \simeq [Q \xrightarrow{n} Q]$, et, modulo cet isomorphisme, la 1ère flèche composée verticale est induite par

$${}_nQ[1] \longrightarrow [Q \xrightarrow{n} Q] \ ;$$

c 2) la $2^{\text{ème}}$ flèche horizontale est transposée de la flèche ∂ indiquée plus haut dans b);

c 3) si on parcourt le diagramme par l' $\curvearrowright$, il est clair qu'on tombe sur la flèche induite par $nQ[0] \longrightarrow [Q \xrightarrow{n} Q]$. D'où la conclusion 2.3.11.

2.4. Soit

$$f : \underline{T}' \longrightarrow \underline{T}$$

un morphisme de topos. Alors on a un homomorphisme canonique (VII 2.8)

$$\mathrm{Biext}^1(P,Q;G) \longrightarrow \mathrm{Biext}^1(P',Q';G') \quad ,$$

où les ' dénotent les Groupes images inverses. Comme, pour tout Groupe commutatif E de $\underline{T}$, on a évidemment un isomorphisme canonique

$$({}_nE)' \xrightarrow{\sim} {}_n(E') \quad ,$$

les homomorphismes (2.2.2) sur $\underline{T}$ et sur $\underline{T}'$ permettent de définir un diagramme canonique

$$\text{(2.4.1)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Biext}^1(P,Q;G) & \longrightarrow & \mathrm{Biext}^1(P',Q';G') \\ {\scriptstyle \varphi^n_{P,Q}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^n_{P',Q'}} \\ \mathrm{Hom}({}_nP\otimes {}_nQ,G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}({}_nP'\otimes {}_nQ',G') \end{array} \quad .$$

De même, les homomorphismes (2.2.3) donnent naissance à un diagramme analogue en termes des T_ℓ . Ceci posé, je dis que les diagrammes envisagés sont commutatifs. La vérification est essentiellement triviale en termes des définitions, et laissée au lecteur. On notera d'ailleurs, plus généralement, que tous les homomorphismes canoniques envisagés dans le présent numéro et le précédent sont compatibles au changement de topos, dans un sens évident. Nous utiliserons par la suite sans autre mention les compatibilités de cette nature.

3. Biextensions de schémas en groupes (P,Q) par $\underline{G}_m$: généralités

Dans le présent numéro, nous fixons un schéma de base S, et, comme annoncé au n° 0, nous travaillons dans le topos fppf de S.

3.1. Pour mémoire, rappelons d'abord l'exemple le plus important d'un groupe $\mathrm{Biext}^1(P,Q;\underline{G}_m)$: celui où P et Q sont deux schémas abéliens sur S, et où le groupe Biext^1 s'interprète comme le groupe des correspondances divisorielles sur (P,Q) (VII 2.9.4). Les accouplements ℓ-adiques du numéro précédent sont alors les accouplements bien connus [1] dans la théorie des schémas abéliens.

3.2. Plus généralement, supposons seulement Q un schéma abélien, alors il est bien connu (VII 1.3.8) qu'on a

(3.2.1) $$\underline{\mathrm{Hom}}(Q,\underline{G}_m) = 0 \quad ,$$

donc (1.4) on a un isomorphisme canonique

(3.2.2) $$\mathrm{Biext}^1(P,Q;\underline{G}_m) \simeq \mathrm{Hom}(P,Q^*) \quad ,$$

où

(3.2.3) $$Q^* = \underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,\underline{G}_m)$$

est le schéma abélien dual de Q. (Pour la représentabilité de Q*, due à M. RAYNAUD dans le cas général, cf. [1].)

Lorsque P est également un schéma abélien, on a, de façon symétrique à (3.2.2), un isomorphisme canonique

(3.2.4) $$\mathrm{Biext}^1(P,Q;\underline{G}_m) \simeq \mathrm{Hom}(Q,P^*) \quad .$$

Ainsi la donnée d'une biextension ξ de (P,Q) par $\underline{G}_m$ peut s'interpréter, indifféremment, par la donnée d'un homomorphisme

$$u : P \longrightarrow Q^*$$

ou d'un homomorphisme

$$v : Q \longrightarrow P^* \quad .$$

D'ailleurs, on sait qu'un homomorphisme de schémas abéliens $w : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme si et seulement si pour tout entier $n > 0$, l'homomorphisme induit ${}_n w : {}_n A \longrightarrow {}_n B$ est un isomorphisme. Or dans le cas de u et de v ci-dessus, ${}_n u : {}_n P \longrightarrow {}_n Q^*$ s'identifie à l'homomorphisme ${}_n P \longrightarrow D({}_n Q)$ défini par l'accouplement $\varphi_\xi^n : {}_n P \times {}_n Q \longrightarrow \underline{G}_m$ (cf. 2.3.11), tandis que ${}_n v : {}_n Q \longrightarrow {}_n P^*$ s'identifie à l'homomorphisme ${}_n Q \longrightarrow D({}_n P)$ défini par l'accouplement $\psi_\xi^n : {}_n P \times {}_n Q \longrightarrow \underline{G}_m$. Or on a $\varphi_\xi^n = - \psi_\xi^n$ (2.1.10), donc au signe ${}_n u$ et ${}_n v$ sont transposés l'un de l'autre. Tenant compte du fait bien connu que les ${}_n P$ et les ${}_n Q$ sont finis et localement libres sur S, donc satisfont à la dualité de Cartier, on trouve donc que ${}_n u$ est un isomorphisme si et seulement si ${}_n v$ est un isomorphisme, donc que u est un isomorphisme si et seulement si v est un isomorphisme. Une façon équivalente (un peu moins symétrique) d'énoncer ce résultat est la suivante : considérons la biextension canonique (biextension de Weil) de (P,P^*) par $\underline{G}_m$ (correspondante à $v : P^* \longrightarrow P^*$ l'identité), alors l'homomorphisme canonique correspondant $u : P \longrightarrow P^{**}$ est un <u>isomorphisme</u>. C'est le <u>théorème de bidualité</u> de BARSOTTI et CARTIER.

3.3. Nous passons au cas où Q est fini localement libre sur S, ou est un schéma de type multiplicatif sur S. Le lemme-clef dans ce cas est le résultat (bien connu) suivant :

Proposition 3.3.1. *Soit* Q *un schéma en groupes commutatifs sur* S, *et supposons que* Q *soit fini localement libre sur* S, *ou que* Q *soit de type fini et de type multiplicatif sur* S (SGA 3 IX). *Alors on a*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,\underline{G}_m) = 0 \quad .$$

Démonstration. Distinguons les deux cas envisagés.

a) Q est fini localement libre sur S. Il faut prouver que toute extension E de Q par $\underline{G}_m$ splitte localement pour la topologie fppf. On peut supposer évidemment S affine ; il existe alors un entier $n > 0$ tel qu'on ait $nQ = 0$ (SGA 3 IX 6.1). D'autre part, on sait que $n.\mathrm{id}$ est un épimorphisme dans $\underline{G}_m$ pour fppf, donc la suite exacte "de Kummer"

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \underline{G}_m \xrightarrow{n} \underline{G}_m \longrightarrow 0$$

donne naissance à une suite exacte des $\underline{\mathrm{Ext}}^i(Q, -)$, qui nous donne un épimorphisme

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,\mu_n) \longrightarrow {}_n\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,\underline{G}_m) = \underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,\underline{G}_m) \quad ,$$

la dernière égalité provenant du fait que la multiplication par n étant nulle dans Q, est également nulle dans $\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,\underline{G}_m)$. Cela montre que l'extension E provient d'une extension F de Q par μ_n ; F est représentable par un schéma fini localement libre sur S (théorie de la descente fpqc, SGA 1 VII). A cause des propriétés connues de la dualité de Cartier des groupes finis localement libres (SGA 3 VII 3), le dual $D(F) = \underline{Hom}(F,\underline{G}_m)$ est une extension de $D(\mu_n)$ par $D(Q)$. (Il faut voir que si $A \longrightarrow B$ est un monomorphisme de groupes commutatifs finis localement libres sur S, alors $D(B) \longrightarrow D(A)$ est un morphisme fidèlement plat. Comme D(B) et D(A) sont également finis localement libres sur S, le critère de fidèle platitude par fibres s'applique et nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps k. Dans ce cas, notre assertion signifie simplement que l'homomorphisme sur les anneaux affines $k(D(A)) \longrightarrow k(D(B))$ est injectif (SGA 3 VI_B 11.14), or cet homomorphisme est transposé de l'homomorphisme $k(B) \longrightarrow k(A)$, qui est surjectif puisque $A \longrightarrow B$ est une immersion fermée (SGA 3 VI_B 1.4.2). Donc $k(D(A)) \longrightarrow k(D(B))$ est bien injectif, cqfd.) Or l'inclusion $\mu_n \rightarrow \underline{G}_m$ s'identifie à une section de $D(\mu_n) = \underline{Hom}(\mu_n,\underline{G}_m)$, et tout revient à prouver que cette inclusion se prolonge, localement fppf sur S, en un homomorphisme $F \longrightarrow \underline{G}_m$, i.e. que la section envisagée de $D(\mu_n)$ se relève localement fppf en une section de D(F). Or ceci est clair, puisque $D(F) \longrightarrow D(\mu_n)$ est fidèlement plat et de présentation finie.

b) En vertu de (SGA 3 X 4.5), quitte à se localiser sur S pour la topologie étale, on peut supposer que Q est diagonalisable, i.e. de la forme D(M), où M est un $\mathbb{Z}$-module de type fini. Soit T le sous-module de torsion de M, et L = M/T le quotient, qui est isomorphisme à $\mathbb{Z}^r$.

Alors la suite exacte $0 \longrightarrow T \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ donne une suite exacte $0 \longrightarrow D(L) \longrightarrow D(M) \longrightarrow D(L) \longrightarrow 0$ (SGA 3 IX 3.1), donc on est ramené à prouver séparément que le $\underline{\mathrm{Ext}}^1$ de D(L) et de D(T) avec $\underline{G}_m$ est nul. Le cas de D(T) est justiciable de a), le cas de D(L) se ramène à celui où $L = \mathbb{Z}$, de sorte qu'on est réduit à vérifier que l'on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(\underline{G}_m, \underline{G}_m) = 0 \quad ,$$

i.e. que toute extension E de $\underline{G}_m$ par $\underline{G}_m$ est localement triviale fppf. Or une telle extension est représentable par un schéma en groupes affine et plat sur S (théorie de la descente fpqc SGA 1 VII), dont les fibres sont des tores, c'est donc un tore (SGA 3 X 4.9 et). En vertu de SGA 3 X 4.5, on peut supposer que E est un tore trivial $D(R) \simeq \underline{G}_m^{\,2}$. De plus, quitte à se localiser au sens de Zariski, on peut supposer que le monomorphisme $\underline{G}_m \hookrightarrow E = D(R)$ provient d'un morphisme constant $R \longrightarrow \mathbb{Z}_S$ (SGA 3 VIII 1.4), et celui-ci est nécessairement un épimorphisme (SGA 3 VIII 3.2 b)). Choisissant un $r \in R$ au-dessus de l'élément 1 de $\mathbb{Z}$, on trouve donc un homomorphisme $E \longrightarrow \underline{G}_m$ qui scinde l'extension E, ce qui prouve l'assertion voulue.

Corollaire 3.3.2. *Soit* Q *comme dans* 3.3.1. *Alors on a, pour tout* P, *un isomorphisme canonique*

$$(3.3.2.1) \qquad \mathrm{Biext}^1(P,Q;\underline{G}_m) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(P,D(Q)) \quad ,$$

où D(Q) *désigne le dual de Cartier* $\underline{\mathrm{Hom}}(Q,\underline{G}_m)$ *de* Q. *Plus précisément, le foncteur canonique* (1.1.6) *est une équivalence de la catégorie des extensions de* P *par* D(Q) *avec la catégorie des biextensions de* (P,Q) *par* $\underline{G}_m$.

C'est en effet un cas particulier de 1.5, compte tenu de 3.3.1.

Remarques 3.3.3. Sous les conditions de 3.3.1 , D(Q) est représentable par un schéma en groupes séparé, localement de présentation finie et localement quasi-fini sur S. Plus précisément, si Q est fini localement libre sur S, il en est de même de D(Q) comme il est bien connu (SGA 3 VII 3), et si Q est de type multiplicatif, alors D(Q) est un "groupe constant tordu à engendrement fini" (SGA 3 X 5.1), comme il a été vu dans (SGA 3 IX 4.5 et X 5.7). Si P est un schéma en groupes, toute extension de P par D(Q) est donc représentable, d'après un lemme connu de la théorie de la descente fpqc (SGA 3 X 5.4).

3.3.4 Il est faux que pour tout schéma en groupes Q affine, plat et de présentation finie sur S, on ait $\underline{\mathrm{Ext}}^1(Q,\underline{G}_m) = 0$, déjà pour $Q = \underline{G}_{a_S}$, $S = \mathrm{Spec}\, k[t]/(t^2)$, k étant un corps de car. $p > 0$.

Proposition 3.4. Soient P un schéma en groupes lisse de présentation finie sur S et à fibres connexes, Q un tore sur S. Alors la catégorie des biextensions de (P,Q) par $\underline{G}_m$ est équivalente à la catégorie ponctuelle, i.e. on a

$$\mathrm{Biext}^0(P,Q;\underline{G}_m) = \mathrm{Biext}^1(P,Q;\underline{G}_m) = 0 \tag{3.4.1}$$

Soit en effet M = D(Q), qui est un groupe constant tordu sur S à fibres isomorphes à des $\mathbb{Z}^r$ (3.3.3). En vertu de 3.3.2, la catégorie envisagée est équivalente à celle des extensions de P par M. Cette catégorie est rigide, i.e. le groupe des automorphismes d'un objet est réduit au groupe unité, ce qui exprime la première relation (3.4.1), qui s'écrit également Hom(P,M) = 0. Or cette relation résulte aussitôt du fait que M est étale sur S et P à fibres connexes. Il reste donc à prouver la relation

$$\mathrm{Ext}^1(P,M) = 0 \quad ,$$

i.e. que toute extension E de P par M est triviale. Utilisant l'unicité d'un scindage de cette extension (s'il en existe), on est ramené à prouver que E est localement triviale, ce qui nous ramène au cas où $M = \mathbb{Z}_S^r$, et même au cas où $M = \mathbb{Z}_S$. Lorsque S est le spectre d'un corps, la conclusion résulte de 5.5 (i) ci-dessous. (NB nous n'utiliserons pas 3.4 avant IX 6, et en particulier il n'y aura pas de cercle vicieux !). Montrons maintenant comment réduire le cas général à ce cas particulier. Notons qu'il suffit de trouver une section f de P sur P telle que f(0) = 0, car une telle section sera nécessairement multiplicative, i.e. satisfera $f(x+y)-f(x)-f(y) = 0$: en effet, le premier membre de cette relation désigne un morphisme $P\times_S P \longrightarrow \mathbb{Z}_S$ qui est nul sur la section nulle de $P\times_S P$, donc est nulle puisque $P\times_S P$ est à fibres connexes (P étant à fibres <u>géométriques</u> connexes). La conclusion voulue résulte alors du

<u>Lemme</u> 3.4.2. <u>Soient</u> S <u>un schéma</u>, P <u>un</u> S-<u>schéma lisse de présentation finie</u>, <u>à fibres géométriques connexes</u>, Z <u>un groupe</u>, E <u>un</u> Z_P-<u>torseur</u> (<u>pour la topologie</u> fppf, <u>la topologie étale ou la topologie</u> fpqc, <u>cela revient au même</u>, cf. SGA 3 X 5.4 ...), e <u>une section de</u> P <u>sur</u> S, e' <u>une section de</u> E <u>sur</u> S <u>au-dessus de</u> e (<u>i.e.</u> <u>une section de</u> $e^{-1}(E)$ <u>sur</u> S).

Pour que E soit trivial, il (faut et il) suffit que pour tout $s \in S$, le torseur induit E_s de P_s le soit, et alors il existe une unique section f de E sur P telle que $f \circ e = e'$.

L'unicité d'une telle section est claire, car deux telles sections f , g "différent" par un morphisme $h : P \longrightarrow Z_S$ tel que $h \circ e = 1$, et un tel morphisme est constant de valeur 1 puisque P est à fibres connexes. D'ailleurs, s'il existe une section f de E sur P, on peut toujours la corriger par un morphisme $P \longrightarrow Z_S$ (provenant d'un morphisme $z : S \longrightarrow Z_S$) pour obtenir une section f' telle que $f' \circ e = e'$: il suffit de choisir z tel que $f(e(t)) = e'(t)z(t)$. Appliquant cette dernière observation aux fibres au-dessus des $s \in S$, on trouve pour tout point $s \in S$ une section bien déterminée f_s de E_s sur P_s, transformant e_s en e'_s . Tout revient à prouver que ces f_s proviennent d'une section f de E sur P, ou ce qui revient au même (EGA IV 17.9.3), que l'ensemble $U \subset E$ réunion des $f_s(P_s)$ est une partie ouverte de E. Supposons d'abord S noethérien ; alors on vérifie facilement que U est constructible, en utilisant le fait que pour tout $s \in S$, il existe un voisinage ouvert T' de s dans T = adhérence de s muni de la structure induite réduite, et une section de $E_{T'}$ sur $P_{T'}$ prolongeant f_s et compatible avec les sections marquées e et e' (comme il résulte trivialement de EGA IV 8.8.2). En vertu du critère EGA IV 1.10.1, il reste alors à prouver que U est stable par générisation. Pour ceci, on est ramené, par la méthode habituelle utilisant EGA II 7.1.9, au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Comme P est lisse sur S, P est donc régulier donc normal, et comme il est à fibres connexes, il est connexe. Mais alors la section donnée de E au-dessus de la fibre générique de P sur S se prolonge de façon unique en une section f de E sur P (EGA IV 18.10.19 et 18.10.20), évidemment compatible avec e et e'. Donc dans ce cas U = f(P) est ouvert. Cela prouve 3.4 dans le cas où S est noethérien. Le cas général se ramène aisément à ce cas, par les procédés habituels de passage à la limite, utilisant EGA IV 8,9, dont nous laissons le détail au lecteur.

Remarque 3.4.3. On peut "écraser" le lemme 3.4.2 par des références savantes, savoir (SGA 4 XV 1.15, cas n=1, et 4.1).

Corollaire 3.5. *Soient* P *un schéma en groupes lisse de présentation finie sur* S, *à fibres connexes*, $0 \longrightarrow Q' \longrightarrow Q \longrightarrow Q'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte de Groupes commutatifs sur* S, *avec* Q' *un tore. Alors le foncteur "image inverse de biextensions"*

$$\mathrm{BIEXT}(P,Q'';\underline{G}_m) \xrightarrow{\approx} \mathrm{BIEXT}(P,Q;\underline{G}_m) \tag{3.5.1}$$

est une équivalence de catégories, en particulier les homomorphismes naturels suivants sont des isomorphismes

$$\mathrm{Biext}^i(P,Q'';\underline{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Biext}^i(P,Q;\underline{G}_m) \quad , \quad i = 0,1 \quad . \tag{3.5.2}$$

En effet, $\mathrm{BIEXT}(P,Q'';\underline{G}_m)$ s'identifie, à équivalence près, à la catégorie des biextensions E de (P,Q) par $\underline{G}_m$ munies d'une trivialisation de la biextension induite E' de (P,Q') par $\underline{G}_m$ (VII 3.7.6). Or pour une biextension donnée, il y a en vertu de 3.4 exactement une trivialisation de E'. Bien entendu, on peut également prouver le fait que $\mathrm{Biext}^i(P,Q'';\underline{G}_m) \longrightarrow \mathrm{Biext}^i(P,Q;\underline{G}_m)$ est un isomorphisme pour $i = 0,1$ (qui équivaut à la conclusion de 3.5) en utilisant la suite exacte (VII 3.7.5) des Biext^i associée à la suite exacte $0 \to Q' \to Q \to Q'' \to 0$.

Remarque 3.6. Bien entendu, l'énoncé symétrique déduit de 3.5, obtenu en échangeant la gauche et la droite, est également valable, et se déduit d'ailleurs formellement de 3.5 par l'opération de passage aux biextensions symétriques (VII 2.7). Lorsqu'on suppose, en plus des données et hypothèses de 3.5, qu'on a les données et hypothèses symétriques, i.e. Q est à fibres connexes (ou encore Q'' à fibres connexes, cela revient au même puisque Q' est à fibres connexes), et qu'on a une suite exacte $0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0$ avec P' un tore, alors l'application successive de 3.5, et de l'énoncé symétrique appliqué à la précédente suite exacte et à Q'' , montrent que le foncteur

$$\mathrm{BIEXT}(P'',Q'';\underline{G}_m) \xrightarrow{\approx} \mathrm{BIEXT}(P,Q;\underline{G}_m) \tag{3.6.1}$$

est une équivalence de catégories, et en particulier l'homomorphisme suivant est un isomorphisme

$$\mathrm{Biext}^i(P'',Q'';\underline{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Biext}^1(P,Q;\underline{G}_m) \quad , \quad i = 0,\ 1 \quad . \tag{3.6.2}$$

Proposition 3.7. Soient A un schéma abélien sur S, T un schéma en groupes de type multiplicatif (SGA 3 IX) et de type fini sur S, $\underline{M}=\underline{\mathrm{Hom}}(T,\underline{G}_m)$ le dual de Cartier de T (qui est un groupe constant tordu à engendrement fini sur S (3.3.3)). Alors les catégories EXT(A,T) et BIEXT(A,$\underline{M}$; $\underline{G}_m$), formées respectivement des extensions commutatives de A par T et des biextensions de (A,$\underline{M}$) par $\underline{G}_m$, sont rigides, et canoniquement équivalentes, *et les groupes des classes d'objets de ces catégories sont canoniquement isomorphes à* $\mathrm{Hom}(M,A^*)$, *où* $A^* = \underline{\mathrm{Ext}}^1(A,\underline{G}_m)$ *est le schéma abélien dual de* A (3.2). *En particulier, on a un isomorphisme canonique*

$$\text{(3.7.1)} \qquad \mathrm{Ext}^1(A,T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\underline{M},A^*) \quad .$$

C'est en effet le cas particulier de 1.6 obtenu en faisant $P = A$, $Q = M$; en vertu du théorème de bidualité (SGA 3 X 5.7), on a bien $T \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(M,\underline{G}_m)$, et il suffit de vérifier les conditions (1.6.1), qui s'écrivent ici

$$\underline{\mathrm{Hom}}(A,\underline{G}_m) = 0 \quad , \quad \mathrm{Hom}(A,\underline{\mathrm{Ext}}^1(\underline{M},\underline{G}_m)) = 0 \quad .$$

La première relation a été déjà été rappelée dans (3.2.1), la deuxième peut se préciser en

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(\underline{M},\underline{G}_m) = 0 \quad .$$

Pour vérifier cette dernière, la question étant locale sur S, on peut supposer $\underline{M}$ constant $= M_S$, et en décomposant M en somme de $\mathbb{Z}$-modules monogènes, on est ramené au cas où $M = \mathbb{Z}$, qui est trivial, et au cas $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qui provient du fait que $\underline{G}_m$ est n-divisible (ou, plus savamment, de 3.3.1).

On notera que lorsque $T = \underline{G}_m$ donc $\underline{M} = \mathbb{Z}_S$, (3.7.1) se réduit à l'isomorphisme identique (3.2.3). Bien entendu, la démonstration directe de (3.7.1) serait essentiellement triviale (sans faire intervenir le groupe $\mathrm{Ext}^1(A \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \underline{M},\underline{G}_m) = \mathrm{Biext}^1(A,\underline{M},\underline{G}_m)$).

4. Extensions et biextensions des schémas en groupes lisses et connexes sur un corps

Rappelons le lemme suivant dû à Rosenlicht [3 bis, Prop.3] :

Lemme 4.1. Soient k un corps, X et Y deux k-schémas de type fini, séparables et géométriquement connexes, munis de points e_X resp. e_Y rationnels sur k. Alors tout morphisme $X \times Y \longrightarrow \underline{G}_m$ qui est trivial sur les deux sous-schémas $X \times e_Y$ et $e_X \times Y$ est trivial.

Nous n'utiliserons ce résultat que lorsque X et Y sont des schémas en groupes sur k, auquel cas il résultera des hypothèses faites que X et Y sont même lisses sur k. Notons que par récurrence, le résultat 4.1 implique le résultat analogue pour un nombre quelconque de facteurs. Ceci nous permet donc d'appliquer les résultats de VII 1.3 et de VII 2.9. On obtient ainsi les deux propositions suivantes :

Proposition 4.2. Soient P un groupe lisse et connexe sur le corps k. Alors le foncteur naturel de la catégorie des extensions de Groupes de P par $\underline{G}_m$ dans la catégorie des Modules inversibles sur P rigidifiés en l'élément neutre e_P de P est pleinement fidèle. Son image essentielle est formée des Modules inversibles rigidifiés L sur P tels que l'on ait $\pi^*(P) \simeq pr_1^*(P)pr_2^*(P)$, où $\pi : P \times P \longrightarrow P$ est la loi de composition de P, et pr_1 et pr_2 sont les deux projections du produit.

Proposition 4.3. Soient P et Q deux Groupes algébriques lisses et connexes sur le corps k. Alors le foncteur naturel de la catégorie des biextensions de (P,Q) par $\underline{G}_m$, dans la catégorie des Modules inversibles sur $P \times Q$ birigidifiés par rapport aux sections unités e_P, e_Q de P resp. Q,

<u>est pleinement fidèle, les deux catégories envisagées étant par ailleurs rigides. Pour qu'un Module inversible birigidifié</u> $\mathbb{L}$ <u>sur</u> $P\times Q$ <u>provienne d'une biextension, il faut et il suffit que ses images inverses sur</u> $P\times P\times Q$ <u>et</u> $P\times Q\times Q$ <u>par</u> $\pi_P\times id_Q$ <u>et</u> $id_P\times\pi_Q$ <u>satisfassent au "théorème du cube"</u> ([1] <u>ou</u> [2]).

Cette dernière condition n'est en effet que traduction des conditions envisagées dans VII 2.9.3 b), dans l'explicitation qui en est donnée dans VII 3.5 b).

4.4. J'ignore si la condition du cube envisagée dans 4.3 est automatiquement vérifiée. On sait tout au moins [2, IV 2.6] que pour $\mathbb{L}$ donné, il existe toujours un entier $n \geq 1$, puissance de l'exposant caractéristique de k, tel que $\mathbb{L}^{\otimes n}$ satisfasse à la condition envisagée, donc provienne d'une biextension de (P,Q) par $\underline{G}_m$; et que l'on peut toujours trouver une extension radicielle k' de k, telle que la condition voulue devienne vraie après l'extension de la base $k \longrightarrow k'$, de sorte qu'après cette extension $\mathbb{L}$ donne un Module inversible birigidifié qui provienne d'une biextension de (P,Q) par $\underline{G}_m$. En particulier, si k est parfait, la condition envisagée dans 4.3 est toujours vérifiée. Ce dernier fait, qui implique formellement les précédents par un argument de trace, peut se voir aussi en appliquant 4.7 plus bas, cf. 4.9.

Rappelons sous forme de lemme le résultat suivant de EGA Err_{IV} 53, 21.4.13 :

Lemme 4.5. Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme lisse surjectif à fibres intègres, avec Y normal intègre de point générique y, $\mathbb{L}$ un Module inversible sur X dont la restriction à X_y soit trivial. Alors il existe un Module inversible $\underline{M}$ sur Y tel que $\mathbb{L}$ soit isomorphe à $f^*(\underline{M})$.

Proposition 4.6. Soient P,Q deux groupes algébriques lisses et connexes sur le corps k, avec P affine. On suppose de plus que P admet une suite de composition dont chacun des facteurs est un tore, ou est isomorphe au groupe additif $\underline{G}_a$ (condition vérifiée en particulier si k est parfait [SGA 3, XVII 7.2.1, 4.1.1 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) et 4.1.5]), ou que Q soit extension d'une variété abélienne B par un groupe algébrique lisse, connexe et affine satisfaisant à la condition précédente. Sous ces conditions, tout Module inversible birigidifié $\mathbb{L}$ sur $P\times Q$ est trivial, à fortiori (4.3) toute biextension de (P,Q) par $\underline{G}_m$ est triviale.

Signalons d'abord que comme tout automorphisme du Module birigidifié est l'identité (4.3), la théorie de la descente nous montre qu'il suffit de prouver que $\mathbb{L}$ devient trivial après extension séparable finie de k, ce qui nous ramène aussitôt, par passage à la limite, au cas où k est séparablement clos. Comme dans ce cas tout tore sur k est déployé, on voit que si P admet une suite de composition comme indiquée dans 4.6, il admet aussi une suite de composition à quotients isomorphes à $\underline{G}_a$ ou $\underline{G}_m$, ce qui implique, par application répétée de 4.5, compte tenu de $\mathrm{Pic}\,(\underline{G}_{a_K}) = \mathrm{Pic}(\underline{G}_{m_K}) = 0$ pour tout corps K, que l'on a

$$\mathrm{Pic}(P) = 0 \quad .$$

Comme cette relation restera encore vraie par tout changement du corps de base k, on voit, en appliquant 4.5 à $pr_2 : P\times Q \longrightarrow Q$ et au Module $\mathbb{L}$, que $\mathbb{L}$ est isomorphe à un Module de la forme $pr_2^*(\underline{M})$, où $\underline{M}$ est un Module inversible sur Q. Comme la restriction de $\mathbb{L}$ à $e_P\times Q$ est triviale, on en conclut aussitôt que $\underline{M}$ est trivial, donc $\mathbb{L}$ est trivial, ce qui établit la conclusion dans le premier cas envisagé. Dans le deuxième, où Q est une extension d'un schéma abélien B par un groupe M admettant une suite de composition à quotients isomorphes à $\underline{G}_m$ ou à $\underline{G}_a$, on applique 4.5 au morphisme

$$f : X = P\times Q \longrightarrow Y = P\times B \quad ,$$

dont la fibre au point générique y de $P\times B$ est un torseur sous M_y, nécessairement trivial en vertu de la structure particulière de M et des relations classiques $H^1(K,\underline{G}_a) = 0$, $H^1(K,\underline{G}_m) = 0$, valables pour tout corps K (qu'on prendra ici égal à k(y)). Comme on aura $\mathrm{Pic}(M) = 0$, donc $\mathrm{Pic}(X_y) = 0$, 4.5 est bien applicable et montre que $\mathbb{L}$ est isomorphe à l'image inverse d'un Module inversible $\underline{M}$ sur $Y = P\times B$. Quitte à remplacer $\underline{M}$ par $\underline{M}\, pr_1^*(\underline{M}_1)^{-1} pr_2^*(M_2)^{-1}$, où pr_1 et pr_2 sont les deux projections de $Y=P\times A$, et où $\underline{M}_1$ et $\underline{M}_2$ sont les deux restrictions de $\underline{M}$ à $P\times e_B$ et à $e_P\times B$ respectivement, on peut supposer $\underline{M}$ birigidifié, et que $\mathbb{L}$ est son image inverse birigidifiée. Cela nous ramène au cas où Q est lui-même un schéma abélien. Mais alors $\mathbb{L}$ définit un morphisme canonique

$$(*) \qquad P \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{Q/k} \quad ,$$

transformant unité en unité, et comme P est connexe, ce morphisme se factorise par le schéma abélien dual $Q' = \underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{Q/k}$. Or il est bien connu qu'un morphisme de schémas d'un groupe algébrique affine lisse et connexe dans un schéma abélien est constant. (C'est une question "géométrique" i.e. on peut supposer k algébriquement clos, et dans ce cas on est ramené aussitôt par dévissage au cas où P est $\underline{G}_a$ ou $\underline{G}_m$; or il est bien connu que toute application rationnelle de $\underline{P}^1_k$ dans un schéma abélien sur k est constante.) Le fait que (*) soit constant, donc nul, s'interprète par la condition que $\mathbb{L}$ soit isomorphe à l'image inverse d'un Module inversible $\underline{M}$ sur P, et comme $\mathbb{L}$ est trivial sur $P \times e_A$, $\underline{M}$ est trivial, donc $\mathbb{L}$ l'est également, cqfd.

Proposition 4.7. Soient P,Q deux groupes algébriques lisses et connexes sur le corps k. Supposons que P soit extension d'un schéma abélien A par un groupe algébrique lisse, connexe et affine L admettant une suite de composition dont chaque facteur soit isomorphe à un tore ou à $\underline{G}_a$ (condition toujours remplie si k est parfait). Alors le foncteur envisagé dans 1.3 est une équivalence de catégories, i.e. tout Module inversible birigidifié $\mathbb{L}$ sur $P \times Q$ provient d'une biextension de (P,Q). De plus, le foncteur de catégories rigides

$$\mathrm{BIEXT}(A,Q;\underline{G}_m) \longrightarrow \mathrm{BIEXT}(P,Q;\underline{G}_m)$$

est une équivalence de catégories, en d'autres termes, il donne naissance à un isomorphisme de groupes :

(4.7.1) $$\mathrm{Biext}^1(A,Q;\underline{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Biext}^1(P,Q;\underline{G}_m) \quad .$$

Pour la première assertion, on se ramène encore, par descente et en utilisant 4.3, au cas où k est séparablement clos. Procédant comme dans la démonstration de 4.6, on déduit de 4.5 et de l'hypothèses sur L que $\mathbb{L}$ est isomorphe à l'image inverse d'un Module birigidifié $\underline{M}$ sur $A\times Q$, et pour la première assertion de 4.7, on est donc ramené au cas A=P. Or $\mathbb{L}$ définit un morphisme de schémas ponctués

$$f:Q \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{P/k} \quad ,$$

qui se factorise nécessairement par le schéma abélien dual P' de P. Soit $\mathbb{L}'$ l'image inverse du faisceau de Weil sur $P\times P'$ par

$$\mathrm{id}_P\times f \ : \ P\times Q \longrightarrow P\times P' \quad ,$$

c'est un Module birigidifié qui, par définition de f, ne diffère de $\mathbb{L}$ que modulo l'image inverse d'un Module inversible $\underline{M}$ sur P. Comme $\mathbb{L}'$ et $\mathbb{L}$ ont une restriction triviale à $P\times e_Q$, on en conclut que $\underline{M}$ est trivial, donc que $\mathbb{L}$ est isomorphe à $\mathbb{L}'$. Or nous avons signalé dans VII 2.9.4 que sur un produit de deux schémas abéliens, les correspondances divisorielles provenaient de biextensions. Il en résulte que $\mathbb{L}'$, ou ce qui revient au même, $\mathbb{L}$, provient d'une biextension.

Revenant au cas général (P extension de A par L), il reste à prouver que (4.7.1) est bien un isomorphisme. Mais cela résulte de la suite exacte des Biext^i (i=0,1) associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad ,$$

et des relations

$$\mathrm{Biext}^0(L,Q;\underline{G}_m) = 0 \quad , \quad \mathrm{Biext}^1(L,Q;\underline{G}_m) = 0 \quad ,$$

dont la première est un cas particulier de l'assertion de rigidité faite dans 4.3, et la deuxième n'est autre que le premier cas de 4.6.

Corollaire 4.8. Sous les conditions de 4.7, supposons que Q soit extension d'un groupe algébrique B (nécessairement lisse et connexe) par un groupe algébrique M qui est lisse, connexe et affine. Alors le foncteur de catégories rigides

$$\mathrm{BIEXT}(A,B,\underline{G}_m) \longrightarrow \mathrm{BIEXT}(P,Q;\underline{G}_m)$$

est une équivalence de catégories, en d'autres termes, elle donne naissance à un isomorphisme de groupes

(4.8.1) $$\mathrm{Biext}^1(A,B;\underline{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Biext}^1(P,Q;\underline{G}_m) \quad .$$

Compte tenu de (4.7.1), il reste à prouver que l'on a un isomorphisme

$$\mathrm{Biext}^1(A,B;\underline{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Biext}^1(A,Q;\underline{G}_m) \quad .$$

Cela se déduit comme (4.7.1) de la suite exacte des Biext^i déduite de la suite exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad ,$$

et des relations

$$\mathrm{Biext}^0(P,M;\underline{G}_m) = 0 \quad , \quad \mathrm{Biext}^1(P,M;\underline{G}_m) = 0 \quad ,$$

dont la deuxième est un cas particulier du deuxième cas envisagé dans 4.6 (où on aurait échangé le rôle des deux facteurs envisagés).

Remarque 4.9. Soient P,Q deux groupes algébriques lisses et connexes sur un corps parfait k. On sait alors [3] que chacun d'eux est extension d'un schéma abélien par un groupe lisse, connexe et affine, ce dernier étant produit d'un tore par une extension multiple de groupes $\underline{G}_a$ (cf. référence donnée dans 4.6) :

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad , \quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad .$$

Donc 4.8 s'applique, et nous montre que la théorie des biextensions de (P,Q) par $\underline{G}_m$ se ramène à la théorie analogue (et combien classique !) pour le couple (A,B) de variétés abéliennes.

Corollaire 4.10. Soient P et Q deux groupes algébriques lisses et connexes sur k, L un sous-groupe algébrique affine lisse et connexe de P, E une biextension de (P,Q) par $\underline{G}_m$, d'où par 2.2 un accouplement déduit de E

$$T_\ell(P) \times T_\ell(Q) \longrightarrow T_\ell(\underline{G}_m) \quad .$$

Alors l'accouplement induit

$$T_\ell(L) \times T_\ell(Q) \longrightarrow T_\ell(\underline{G}_m)$$

est nul.

En effet, on peut supposer évidemment k algébriquement clos, auquel cas on est sous les conditions de 4.6, qui impliquent que la restriction de E à (L,Q) est la biextension triviale, d'où la conclusion, puisque l'accouplement induit envisagé est celui défini par cette restriction.

4.11. Soient P,Q deux groupes algébriques et lisses sur k, E une biextension de (P,Q) par $\underline{G}_m$, et T le plus grand sous-tore de P. On se propose de déterminer l'annulateur gauche de l'accouplement

(4.11.1) $$T_\ell(P) \times T_\ell(Q) \longrightarrow T_\ell(\underline{G}_{m_k}) \quad ,$$

ℓ étant encore un nombre premier fixé. En vertu de 4.10, cet annulateur contient en tous cas le sous-progroupe $T_\ell(T)$ de $T_\ell(P)$. Considérons une extension k' de k au-dessus de laquelle P et Q s'écrivent comme extension d'un schéma abélien par un schéma en groupes affine, extension multiple de tores et de groupes $\underline{G}_a$; lorsque P et Q sont de rangs unipotents nuls, on peut prendre k'=k ; en tous cas, on peut prendre pour k' la clôture parfaite (ou une extension finie radicielle) de k. Soient A' resp. B' la partie abélienne de $P_{k'}$ resp. $Q_{k'}$. En vertu de 4.7, la biextension $E_{k'}$ de $(P_{k'},Q_{k'})$ provient d'une biextension F' de (A',B'), bien déterminée à isomorphisme unique près. Donc l'accouplement

(4.11.2) $$T_\ell(P_{k'}) \times T_\ell(Q_{k'}) \longrightarrow T_\ell(\underline{G}_{mk'})$$

déduit de (4.11.1) par changement du corps de base $k \longrightarrow k'$, et qui est aussi l'accouplement défini par la biextension $E_{k'}$ de $(P_{k'},Q_{k'})$, s'obtient à l'aide de l'accouplement

(4.11.3) $$T_\ell(A') \times T_\ell(B') \longrightarrow T_\ell(\underline{G}_{mk'})$$

défini par la biextension F', en composant avec les homomorphismes canoniques (qui sont en fait des épimorphismes si P et Q sont ℓ-divisibles).

(4.11.4) $$T_\ell(P_{k'}) \longrightarrow T_\ell(A') \quad , \quad T_\ell(Q_{k'}) \longrightarrow T_\ell(B') \quad .$$

Par suite, l'annulateur gauche de l'accouplement (4.11.2) (qui est déduit de l'annulateur gauche de (4.11.1) par changement de base) n'est autre que l'image inverse par le premier homomorphisme (4.11.4) de l'annulateur gauche de l'accouplement (4.11.3). Si C' est le plus grand sous-schéma abélien de A' tel que la restriction de F' à (C',B') soit la biextension triviale (donc C' est aussi la composante neutre réduite de l'homomorphisme

(4.11.5) $\qquad A' \longrightarrow$ schéma abélien dual de B'

défini par F'), l'annulateur à gauche de (4.11.3) s'identifie à $T_\ell(C')$; donc l'annulateur à gauche de l'accouplement (1.11.1) n'est autre que l'image inverse de $T_\ell(C') \hookrightarrow T_\ell(A')$ par le premier morphisme (4.11.4).

En particulier, dire que l'annulateur à gauche de l'accouplement (4.11.1) est réduit à $T_\ell(T)$, i.e. que l'annulateur à gauche de (4.11.2) est réduit au noyau $T_\ell(T')$ du premier morphisme (4.11.4), revient à dire que l'accouplement (4.11.3) est séparant à gauche i.e. que C' = 0, ou encore que le morphisme (4.11.5) défini par F' est à noyau fini. On notera sous cette dernière forme que cette condition ne dépend pas de ℓ, et il est clair (sous n'importe quelle forme) qu'elle ne dépend pas du choix de l'extension k'. Lorsque cette condition est remplie, nous dirons simplement que la biextension donnée E de (P,Q) par $\underline{G}_m$ est <u>séparante à gauche</u>. On notera par dualité que cela signifie aussi que le morphisme

(4.11.6) $\qquad B' \longrightarrow$ schéma abélien dual de A'

défini par F' est un épimorphisme (i.e. surjectif).

On définit de façon symétrique la notion de <u>biextension séparante à droite</u>, qui correspond au cas où (4.11.6) est à noyau fini, i.e. (4.11.5) un épimorphisme. On dit que la biextension E de (P,Q) par $\underline{G}_{mk}$ est <u>séparante</u> si elle est séparante à gauche et à droite, ce qui revient à dire que (4.11.5) est une isogénie, ou ce qui revient au même, que (4.11.6) est une isogénie.

Il est évident par définition que ces notions sont invariantes par toute extension du corps de base k.

4.12. Soient P un schéma en groupes lisse et connexe, $\mathbb{L}$ un Module inversible sur P, et posons

(4.12.1) $$\delta(\mathbb{L}) = \pi^*(\mathbb{L})\, pr_1^*(\mathbb{L})^{-1} pr_2^*(\mathbb{L})^{-1} \quad ,$$

les notations étant celles de 4.2. Comme on a déjà signalé dans VII 1.3.4, on trouve ainsi un Module inversible birigidifié sur P×P. En vertu de 4.3, si $\delta(\mathbb{L})$ provient d'une biextension, celle-ci est déterminée à isomorphisme unique près. Cette biextension est définie en particulier, en vertu de 4.7, si P est une extension d'un schéma abélien A par une extension multiple de tores et de groupes $\underline{G}_a$. En tous cas, si elle est définie, il est clair que cette biextension est symétrique. Dans le cas favorable précédent, et lorsqu'on suppose le tore maximal de P déployé, on peut ramener la construction de $\delta(\mathbb{L})$ au cas où P est un schéma abélien, en notant qu'elle est évidemment fonctorielle en P, et que d'autre part l'homomorphisme

(4.12.2) $$\mathrm{Pic}(A) \longrightarrow \mathrm{Pic}(P)$$

déduit de l'homomorphisme canonique $f : A \longrightarrow P$ est surjectif grâce à 4.5 (cf. début démonstration de 4.6), de sorte que l'on peut trouver un isomorphisme

$$\mathbb{L}^* \simeq f^*(\underline{M}) \quad ,$$

où $\underline{M}$ est un Module inversible sur $\underline{M}$. Alors $\delta(\mathbb{L})$ "est" l'image inverse de la biextension $\delta(\underline{M})$ de (A,A) par $\underline{G}_{mk}$.

Proposition 4.13. Sous les conditions de 4.12, supposons que $\mathbb{L}$ soit un Module inversible ample sur P. Alors si la biextension $\delta(\mathbb{L})$ de (P,P) par $\underline{G}_{mk}$ est définie, elle est séparante (4.11) ; si P est extension d'un schéma abélien A par un groupe affine lisse connexe L satisfaisant la condition de 4.7, alors la biextension de (A,A) dont $\delta(\mathbb{L})$ provient (en vertu de 4.8) est de la forme $\delta(\underline{M})$, où $\underline{M}$ est un Module inversible ample sur A.

On est ramené au cas où k est algébriquement clos. Par définition, il suffit alors de prouver, avec les notations de 4.12, que la biextension $\delta(\underline{M})$ de (A,A) est séparante. Or il est prouvé dans la thèse de M. RAYNAUD [2, XI 1.11] que si $\mathbb{L} = f^*(\underline{M})$ est ample, il en est de même de $\underline{M}$. Or il est bien connu par la théorie de A. WEIL que cela implique que $\delta(\underline{M})$ est séparante [1] [2], i.e. que l'homomorphisme de A dans son schéma abélien dual est une isogénie.

Remarque 4.14. Plaçons nous dans le cas favorable où P est extension d'un schéma abélien A par un groupe L extension multiple de tores et de groupes $\underline{G}_a$, et considérons l'homomorphisme composé canonique

$$(4.14.1)\qquad NS(A) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Biext}^1(A,A;\underline{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Biext}^1(P,P;\underline{G}_m) \quad .$$

On sait par 4.8 que la deuxième flèche est bijective, d'autre part il est bien connu en théorie des variétés abéliennes que la première flèche induit un isomorphisme du groupe de Néron-Séveri NS(A) de A sur le sous-groupe de $\mathrm{Biext}^1(A,A,\underline{G}_m) = \mathrm{Corr}(A,A)$ formé des (classes de) biextensions ($\simeq$ correspondances divisorielles) symétriques. De ceci résulte que le composé (4.14.1) induit un isomorphisme de NS(A) avec le groupe des biextensions symétriques de (P,P) par $\underline{G}_m$ (qui, en vertu de 4.7, peut d'ailleurs se décrire également comme le groupe des (classes de) correspondances divisorielles sur (P,P) qui sont symétriques. Il s'impose d'appeler une correspondance divisorielle sur (P,P) correspondance divisorielle ample, et d'appeler encore biextension ample de (P,P) par $\underline{G}_m$ la biextension correspondante, lorsqu'elle provient d'un élément ample du groupe NS(A). Cette condition étant manifestement invariante par changement du corps de base, on voit que la notion précédente garde un sens sans la condition restrictive mise plus haut sur P, en supposant seulement P lisse et connexe.

Notons, lorsqu'on suppose même L "résoluble sur k" i.e. qu'il se dévisse en groupes $\underline{G}_a$ et $\underline{G}_m$, qu'il résulte de l'observation précédente, et du fait que l'application (4.12.2) est surjective, que l'image de

$$(4.14.2)\qquad \mathrm{Pic}(P) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Biext}^1(P,P;\underline{G}_m)$$

est formée des biextensions symétriques, et que son noyau est le sous-groupe $\mathrm{Pic}^o(P)$ de Pic(P) image de $\mathrm{Pic}^o(A)$, de sorte que, posant

$$NS(P) = \mathrm{Pic}(P)/\mathrm{Pic}^o(P) \quad (\simeq NS(A)) \quad ,$$

on peut interpréter également le composé (4.14.1) comme un isomorphisme canonique

(4.14.3) $$NS(P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Biext}^1(P,P;\underline{G}_m)^{sym}$$

Notons enfin que le théorème de RAYNAUD cité pour 4.13 s'énonce en disant qu'un élément ξ de Pic(P) est ample si et seulement si son image $\delta(\xi)$ par 4.14.1 est une classe de biextensions amples.

5. Extensions et biextensions par des schémas en groupes constants tronqués sans torsion

Nous donnons, dans ce numéro et le suivant, quelques résultats auxiliaires, qui seront utilisés au numéro 7 dans le cas $Z = \mathbb{Z}$.

Proposition 5.1. Soient S un schéma géométriquement unibranche et irréductible de point générique η, Z un groupe sans torsion, d'où un schéma en groupes constant Z_S sur S. Alors tout torseur E sous le schéma en groupes Z_S est trivial, et le foncteur $E \longmapsto E(\eta)$ de la catégorie des torseurs sous Z_S dans la catégorie des torseurs sous $Z = Z_S(\eta)$ est une équivalence de catégories.

Un lemme connu de théorie de la descente (SGA 3 X 5.4) nous montre que tout torseur E sous G_S est représentable (ce résultat étant valable pour tout schéma en groupes sur S qui est séparé, localement de présentation finie et localement quasi-fini sur S). Comme Z_S est étale sur S, il en est de même par descente fpqc de tout torseur E sous Z_S, qui est donc localement trivial pour la topologie étale (et non seulement la topologie fppf). Pour prouver que E est trivial, il suffit donc de prouver qu'on a

$$H^1(S_{ét}, Z_S) = e \quad ,$$

et de même l'assertion de pleine fidèlité de 5.1 se réduit à la relation

$$H^o(S_{ét}, Z_S) \xleftarrow{\sim} Z \quad .$$

Cette dernière étant triviale, prouvons la première. Pour ceci, considérons l'inclusion

$$i : \eta \longrightarrow S \quad ,$$

on a alors, grâce au fait que S est géométriquement unibranche

$$i_*(Z_\eta) \xleftarrow{\sim} Z_S$$

(SGA 4 IX 2.14.1), d'où par la suite exacte non commutative de bas degrés tenant lieu de suite spectrale de Leray pour $i : \eta \longrightarrow S$ (SGA 4 XII 3.2) :

$$e \longrightarrow H^1(S, i_*(Z_\eta)) \longrightarrow H^1(\eta, Z_\eta) \quad \ldots. \; ,$$

le fait que $H^1(S, Z_S) \longrightarrow H^1(\eta, Z_\eta))$ est injectif. On est donc ramené au cas où S est le spectre d'un corps k. Si π est le groupe de Galois d'une clôture séparable de k, on aura donc

$$H^1(k, Z) = \mathrm{Hom\ cont}(\pi, Z)/Z = e \quad ,$$

puisque E est sans torsion. Cela achève la démonstration.

Corollaire 5.2. Avec les notations de 5.1, soit P un schéma lisse sur S. Alors tout torseur E sous Z_P est trivial, et le foncteur $E \longmapsto E_\eta$ de la catégorie des torseurs sur P_η de groupe Z_{P_η} dans la catégorie des torseurs *sur* P_η *de groupe* Z_{P_η} *est une équivalence de catégories.*

En effet, P est géométriquement unibranche (EGA IV 17.5.7), et comme chaque composante irréductible de P domine S, P étant plat sur S, l'ensemble des composantes irréductibles de P est localement fini. Donc P est un préschéma somme de préschémas irréductibles géométriquement unibranches P_i . Ceci dit, 5.2 résulte aussitôt de 5.1 appliqué aux divers P_i et aux $P_{i\eta}$, compte tenu que le point générique p_i de P_i est aussi point générique de P_i .

5.2.1. Du corollaire précédent résulte aussitôt l'énoncé analogue pour les bitorseurs sur P sous (Z_P, Z_P) : le foncteur $E \longmapsto E_\eta$ de la catégorie de ceux-ci, dans la catégorie des bitorseurs sur P_η sous (Z_{P_η}, Z_{P_η}) est une équivalence de catégories. En effet, il suffit d'expliciter la structure de bitorseur de E en termes de celle de torseur à droite sous Z_P , muni d'un isomorphisme de Z_P dans le commutant de Z_P pour son opération sur E, en utilisant le fait que E est nécessairement trivial donc que le commutant en question est isomorphe à Z_P lui-même. On est donc ramené à la remarque triviale suivante pour les composantes irréductibles X de P : si X est un schéma connexe non vide, le foncteur $Z \longmapsto Z_X$ de la catégorie des ensembles dans celle des X-schémas est pleinement fidèle.

Proposition 5.3. *Soient* S *et* Z *comme dans* 5.1, *et* P *un schéma en groupes lisse sur* S. *Considérons les extensions* E *de schémas en groupes de* P *par* Z_S . *Alors le foncteur* $E \longmapsto E_\eta$, *allant de la catégorie de ces extensions dans celle des extensions de schémas en groupes de* P_η *par* Z_η , *est une* équivalence de catégories. Si P et Z sont commutatifs, ce foncteur induit aussi une équivalence entre les catégories d'extensions commutatives correspondantes.

Notons d'abord que toute extension de faisceaux de groupes de P par Z_S (ou de P_η par Z_η) donne naissance par 5.2 à un torseur trivial, et a fortiori représentable. Donc les catégories envisagées dans 5.3 peuvent aussi s'interpréter comme des catégories d'extensions de faisceaux de groupes. Celles-ci sont justiciables de la description donnée dans VII 1.1.6 et 1.2 en termes de bitorseurs sur P, $P \times P$, $P \times P \times P$ (resp. sur P_η , $P_\eta \times P_\eta$, $P_\eta \times P_\eta \times P_\eta$), sous les paires de groupes déduites de (Z,Z) par changement de base. Appliquant 5.2 dans le cas des extensions commutatives, et 5.2.1 dans le cas général, aux schémas (lisses sur S) P, $P \times P$ et $P \times P \times P$, on obtient la conclusion annoncée. On trouve de façon toute analogue :

Corollaire 5.4. Soient S,Z comme dans 5.1, et P,Q deux schémas en groupes lisses sur S. On suppose P,Q,Z commutatifs, et on considère les biextensions E de (P,Q) par Z_S . Alors le foncteur $E \longmapsto E_\eta$ qui va de la catégorie de ces biextensions dans la catégorie des biextensions de (P_η, Q_η) par Z_η , est une équivalence de catégories.

Les résultats précédents nous amènent donc à déterminer les catégories d'extensions ou de biextensions par un groupe constant sans torsion, dans le cas d'un schéma de base réduit au spectre d'un corps. On trouve alors ceci :

Proposition 5.5. *Soient* k *un corps*, Z *un groupe sans torsion*, P *un* k-*schéma en groupes localement de type fini*, P^{o} *la composante neutre*, $\Phi = P/P^{o}$ *le groupe des composantes connexes* (SGA 3 VI_A 4). *Alors*

(i) *Le foncteur naturel allant de la catégorie des schémas en groupes, extensions* (*resp. extensions commutatives*) *de* Φ *par* Z_k, *dans la catégorie des schémas en groupes extensions* (*resp. extensions commutatives*) *de* P *par* Z_k, *est une équivalence de catégories. En particulier, si* P *est connexe, toute extension de* P *par* Z_k *est triviale, et la catégorie de ces extensions est rigide*.

(ii) *Supposons que* Φ *soit un groupe de torsion* (*p.ex.* P *de type fini*), *et* P *et* Z *commutatifs. Alors la catégorie des extensions de* P *par* Z_k *est rigide, i.e. tout automorphisme d'un objet de cette catégorie est trivial. Si de plus il existe* $n > 0$ *tel que* $n.\mathrm{id}_{\Phi} = 0$, *par exemple si* Φ *est fini* p.ex. Z *de type fini, alors le groupe des classes d'extensions commutatives de* P *par* G_k *est donné par un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Ext}^1(P,Z_k) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Phi\, ,\, (Z\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})/Z)\ , \tag{5.5.1}$$

donné par l'opérateur cobord de la suite exacte des Ext *déduite de la suite exacte*

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow Z\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \longrightarrow (Z\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})/Z \longrightarrow 0\ . \tag{5.5.2}$$

Notons que le morphisme canonique

$$P \longrightarrow \Phi$$

induit évidemment un isomorphisme sur les ensembles de composantes irréductibles, car c'est un morphisme plat à fibres irréductibles.

Donc en vertu de 5.1, le foncteur induit de la catégorie des torseurs sous Z_Φ dans la catégorie des torseurs sous Z_P est une équivalence de catégories. (On se rappelera qu'un schéma en groupes localement de type fini sur k est géométriquement unibranche). La même conclusion s'applique aux catégories de bitorseurs, et aux morphismes

$$P\times P \longrightarrow \Phi\times\Phi \quad , \qquad P\times P\times P \longrightarrow \Phi\times\Phi\times\Phi \quad .$$

La description VII 1.1.6 des extensions de P par Z_k resp. de Φ par Z_k (et VII 1.3 dans le cas d'extensions commutatives) implique alors les assertions de (i). Bornons nous maintenant au cas des extensions commutatives. Alors le groupe des automorphismes d'une extension de P par G_k est le groupe

$$\mathrm{Hom}(P,G_k) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Phi,G_k) \quad ,$$

qui est évidemment nul si Φ est un groupe de torsion. On a de même, si $V = G\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et lorsque Φ est fini,

$$\mathrm{Ext}^i(\Phi,V_k) = 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z} \quad ,$$

car les groupes envisagés sont des vectoriels sur $\mathbb{Q}$ annulés par l'entier $n > 0$. L'isomorphisme (5.5.1) en résulte aussitôt.

On prouve de la même façon essentiellement :

Corollaire 5.6. *Soient k un corps, Z un groupe commutatif sans torsion, P et Q deux schémas en groupes commutatifs localement de type fini sur k , $\Phi = P/P^o$ et $\Psi = Q/Q^o$ les groupes des composantes neutres. Alors :*

(i) *Le foncteur naturel, allant de la catégorie des biextensions* *de* (Φ,Ψ) *par* Z_k *dans celle des biextensions de* (P,Q) *par* Z_k *est une équivalence de catégories. Si en particulier* P *ou* Q *est connexe, la catégorie des biextensions de* (P,Q) *par* Z_k *est équivalente à la catégorie ponctuelle.*

(ii) *Supposons que* Φ *ou* Ψ *soit un groupe de torsion. Alors la catégorie des biextensions de* (P,Q) *par* Z_k *est rigide. Si de plus il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $n.\mathrm{id}_\Phi = 0$ *ou* $n.\mathrm{id}_\Psi = 0$, *alors le groupe des classes de biextensions de* (P,Q) *par* Z_k *est donné par un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Biext}^1(P,Q;\, G_k) \xleftarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}(\Phi\otimes\Psi\ ,\ (Z\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})/Z\ ) \quad , \tag{5.6.1}$$

donné par l'opérateur cobord de la suite exacte des Biext^i $(i=0,1)$ *déduite de la suite exacte* (5.5.2).

5.7. Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé, Z un ensemble. Appelons *schéma constant sur* S *tronqué sur* T, *de valeur* Z, et désignons par $Z_{S,T}$, le schéma obtenu par recollement en prenant la somme de Z copies S_z $(z \in Z)$ de S, qu'on recolle suivant l'ouvert $U = S-T$ complémentaire de T. Donc on a

$$Z_{S,T}\times_S U \xrightarrow{\ \sim\ } U \quad , \quad Z_{S,T}\times_S T \xrightarrow{\ \sim\ } Z_T \quad , \tag{5.7.1}$$

et $Z_{S,T}$ est un schéma *étale sur* S. Pour un S-schéma variable S', on a un isomorphisme fonctoriel en S' :

$$\mathrm{Hom}_S(S',Z_{S,T}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_T(S'_T,Z_T) \quad , \tag{5.7.2}$$

la flèche étant définie par "restriction à S'_T ", compte tenu du deuxième isomorphisme (5.7.1) ; nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette flèche est bijective. Désignant par

$$i : T \longrightarrow S$$

l'inclusion, l'isomorphisme fonctoriel (5.7.2) peut aussi s'écrire comme un isomorphisme de faisceaux

(5.7.3) $$Z_{S,T} \xrightarrow{\sim} i_*(Z_T) \quad .$$

On voit sur cette formule, ou directement sur la définition, que pour Z variable, $Z_{S,T}$ dépend fonctoriellement de Z, ledit foncteur commutant aux limites projectives finies. Il transforme en particulier groupes en groupes, groupes commutatifs en groupes commutatifs, ce qui est également clair sur la forme (2.7.2) du foncteur représenté par $Z_{S,T}$.

Signalons aussi qu'il est trivial sur la définition, ou sur (5.7.3), que la formation de $Z_{S,T}$ commute à tout changement de base $f : S' \longrightarrow S$, qui donne naissance à un isomorphisme de foncteurs en Z

(5.7.4) $$Z_{S,T} \times_S S' \xrightarrow{\sim} Z_{S',T'} \quad , \quad \text{où } T' = T \times_S S' = T_{S'} \quad .$$

5.8. Nous nous proposons d'étudier les torseurs E sous un groupe de la forme $Z_{S,T}$, où Z est un groupe, qu'on suppose ici commutatif pour simplifier. On a un foncteur naturel

(5.8.0) $$E \longmapsto E_T$$

de la catégorie des torseurs sous $Z_{S,T}$ dans la catégorie des torseurs sous Z_T. Je dis que ce foncteur est une <u>équivalence de catégories</u>. En effet, le fait qu'il est pleinement fidèle, i.e. que pour deux torseurs, E,F sous $G_{S,T}$, l'application $\mathrm{Hom}(E,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_T,F_T)$ est bijective, se ramène immédiatement par descente fpqc au cas où E et F

sont triviaux, donc au cas $E = F = (G_{S,T})$, où ce n'est autre que la bijectivité de (5.7.2) pour $S'=S$. Prouvons que (5.8.0) est essentiellement surjectif. Soit E_T un torseur sous Z_T. On a déjà noté dans la démonstration de 5.1 que E_T est représentable et localement trivial pour la topologie étale. Il suffit donc de prouver que

$$H^1(S_{ét},Z_{S,T}) \longrightarrow H^1(T_{ét},Z_T)$$

est bijectif, ce qui résulte de (5.7.3) et de la relation

$$R^1 i_{ét\,*}(Z_T) = 0 \quad ,$$

cas particulier de SGA 4 VIII 5.6.

5.8.1. Soit maintenant P un schéma en groupes commutatif sur S, et proposons-nous de déterminer la catégorie des extensions de faisceaux en groupes commutatifs de P par $Z_{S,T}$. Pour ceci, on utilise la description (VII 1.1.6, 1.3) en termes de torseurs sur P, $P\times P$, $P\times P\times P$, sous les groupes images inverses de $Z_{S,T}$. Or ces images inverses sont de la même forme que $Z_{S,T}$ en vertu de (5.7.4), et on peut donc appliquer à la description de ces torseurs le résultat précédent, qui nous apprend qu'ils correspondent aux torseurs sur P_T, $P_T\times_T P_T$, $P_T\times_T P_T\times_T P_T$ sous les groupes images inverses de Z_T. On trouve ainsi :

Proposition 5.9. *Soient* S *un schéma,* T *un sous-schéma fermé,* G *un groupe commutatif,* $G_{S,T}$ *le schéma en groupes constant tronqué correspondant sur* S *défini dans* 5.7, P *un schéma en groupes commutatifs sur* S. *Alors le foncteur de restriction à* T *induit une équivalence entre la catégorie* *des faisceaux en groupes commutatifs extensions de* P *par* $Z_{S,T}$, *et la catégorie des faisceaux en groupes commutatifs extensions de* P_T *par* Z_T .

On trouve, par une démonstration essentiellement identique :

Corollaire 5.10. *Avec les notations de* 5.9, *soit de plus* Q *un schéma en groupes commutatifs sur* S. *Alors le foncteur restriction à* T *induit une équivalence entre la catégorie des biextensions de* (P,Q) *par* $Z_{S,T}$, *et la catégorie des biextensions de* (P_T,Q_T) *par* Z_T .

6. *Extensions et biextensions par le modèle de Néron de* $\underline{G}_m$.

6.1. Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé, Z un ensemble, d'où un schéma constant tronqué $Z_{S,T}$ sur S (5.7). On a un homomorphisme canonique, fonctoriel en Z, de schémas étales sur S :

(6.1.1) $$Z_S \longrightarrow Z_{S,T} \quad ,$$

qui est un morphisme *surjectif*, comme il résulte aussitôt de (5.7.1). De sa fonctorialité en Z résulte que lorsque Z est un groupe, (6.1.1) est un homomorphisme de schémas en groupes étales sur S. Son noyau est donc un schéma en groupes étale sur S, noté $Z_{S,U}$, et on a une suite exacte canonique, fonctorielle en Z :

(6.1.2) $$0 \longrightarrow Z_{S,U} \longrightarrow Z_S \longrightarrow Z_{S,T} \longrightarrow 0 \quad .$$

On constate aussitôt, grace à (5.7.1), que $Z_{S,U}$ est la somme d'une famille de S-schémas S_n , $n \in Z$, avec $S_n = S$ pour $n = 0$, et $S_n = U$ pour $n \neq 0$. De cette description de $Z_{S,U}$ résulte aisément que pour tout

Groupe F sur S, l'application de restriction à U induit une bijection :

$$(6.1.3) \qquad \mathrm{Hom}_{gr}(Z_{S,U},F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{gr}(Z_U,F|U) \quad .$$

6.1.4. Nous supposons par la suite Z commutatif, et nous nous proposons d'examiner les extensions de Groupes commutatives de $Z_{S,T}$ par un Groupe commutatif donné G sur S. Par la suite exacte (6.1.2), la catégorie de ces extensions est équivalente à la catégorie des extensions F de Z_S par G, munies d'une trivialisation de l'image inverse de cette extension par $Z_{S,U} \longrightarrow Z_S$. En vertu de (6.1.3), une telle trivialisation revient à la donnée d'une trivialisation de l'extension $F|U$ de Z_U par $G|U$.

Pour la suite, nous prendrons pour Z le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers, donc $\mathbb{Z}_S$ est le Groupe libre à un générateur, et VII 1.4 nous fournit une équivalence entre la catégorie des extensions de $\mathbb{Z}_Z$ par G, et la catégorie des torseurs sous G. On trouve donc, en appliquant le même résultat à Z_U et $G|U$:

Lemme 6.2. *Soient* S *un schéma,* T *un sous-schéma fermé,* U = S-T, G *un Groupe commutatif sur* S. *La catégorie des Groupes commutatifs sur* S *extensions de* $\mathbb{Z}_{S,T}$ *(défini dans* (5.7)) *par* G *est équivalente à la catégorie des couples* (F,s) *formés d'un torseur* F *sous* G *et d'une section* s *de* $F|U$. *Si* $\alpha : S \longrightarrow \mathbb{Z}_{S,T}$ *est la section de* $\mathbb{Z}_{S,T}$ *image de la section* 1 *de* $\mathbb{Z}_S$ *sur* $\underset{G}{-}S$, *à l'extension* $\overline{G}$ *de* $\mathbb{Z}_{S,T}$ *par* G *correspond le torseur* $F = \alpha^*(\overline{G})$ *sous* G, *muni de la section de* $F|U$ *donnée par la restriction à* U *de la section unité de* $\overline{G}$.

6.2.1. Si $\overline{G}$ correspond au couple (F,s), l'image inverse $f_n^*(\overline{G})$ dans $\overline{G}$ de la section f_n de $\mathbb{Z}_{S,T}$, définie par la section constante de valeur $n \in \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}_S$, s'identifie canoniquement, comme torseur sous G, à la puissance n.ième $F^{(n)}$ du G-torseur F ; l'isomorphisme canonique de G_U-torseurs $f_n^*(\overline{G})|U \xrightarrow{\sim} G_U$, définie par la première relation (5.7.1), est définie par la section $s^{(n)}$ de $F_U^{(n)}$ puissance n.ème de la section donnée s de F_U. De cette explicitation résulte la description suivante des sections de $\overline{G}$ sur S : une section $\overline{g}$ de $\overline{G}$ sur S est définie par

a) une section $\underline{n}$ de $\mathbb{Z}_{S,T}$ sur S, qu'on peut interpréter comme une section de $\mathbb{Z}_T$ i.e. une fonction localement constante sur T à valeurs dans $\mathbb{Z}$, ou si on préfère, une partition $T = \coprod_{i\in\mathbb{Z}} T_i$ de T en somme disjointe de parties ouvertes indexées par les $i \in \mathbb{Z}$;

b) une famille de sections

$$\overline{g}_i \in \Gamma(F^{(i)}/S_i') \ , \quad i \in \mathbb{Z} \ , \text{ où } S_i' = S - T_i' \ , \ T_i' = \coprod_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\neq i}} T_j \ ,$$

les sections $\overline{g}_i$ pour $i \in \mathbb{Z}$ étant liées par la condition de compatibilité suivante : pour $i,j \in \mathbb{Z}$, g_i et g_j coïncident sur $S_i' \cap S_j' = U$, quand on identifie $F^{(i)}|U$ et $F^{(j)}|U$ à G_U, grâce à la section $s^{(i)}$ resp. $s^{(j)}$ de ces torseurs. En d'autres termes, il doit exister une section $h_{ij} \in \Gamma(G/U)$, évidemment uniquement déterminée, telle qu'on ait

$$\overline{g}_i = h_{ij}s^{(i)} \ , \ \overline{g}_j = h_{ij}s^{(j)} \quad .$$

Comme la description 3.2 d'une extension $\overline{G}$ de $\mathbb{Z}_{S,T}$ par G est évidemment compatible avec tout changement de base $S' \longrightarrow S$, ce qui précède donne une description complète du faisceau $\overline{G}$ comme foncteur en l'argument $S' \in \mathrm{Ob}\, Sch_{/S}$.

6.2.2 Lorsque T est un schéma somme de schémas connexes non vides T_i, $i \in I$, alors la description 6.2.1 des sections de $\overline{G}$ sur S peut se simplifier : une telle section est définie par une famille d'entiers $(n_i)_{i\in I}$ indexée par le même ensemble I, une famille des sections $\overline{g}_i \in \Gamma(F^{(n_i)}/S'_i)$, pour $i \in I$, où $S'_i = S-T'_i$, $T'_i = \coprod_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} T_j$, les $\overline{g}_i$ satisfaisant à la condition de compatibilité suivante : pour tout couple d'léments $i,j \in I$, les restrictions de $\overline{g}_i$ et $\overline{g}_j$ à $S'_i \cap S'_j = U$ s'identifient, modulo l'identification de $F^{(n_i)}|U$ et de $F^{(n_j)}|U$, déduites des sections $s^{(n_i)}$ resp. $s^{(n_j)}$ de ces torseurs.

6.2.3. Lorsqu'on suppose enfin T connexe non vide, la donnée d'une section $\overline{g}$ de $\overline{G}$ sur S revient à la donnée d'un entier n, et d'une section $\overline{g}$ de $F^{(n)}$ sur S. Il n'y a plus de condition de compatibilité à imposer, de sorte que la section s de $F|U$ est absente de la description du groupe des sections de $\overline{G}$ sur S. (Mais s apparaît de nouveau, bien entendu, dès qu'on se propose de donner une description des points de $\overline{G}$ à valeurs dans un S-schéma général S'.)

6.2.4. Comme $\overline{G}$ est réunion des "ouverts" $f_n^*(\overline{G})$ $(n \in \mathbb{Z})$ décrits dans 6.2.1, on en conclut que $\overline{G}$ est représentable si et seulement si les torseurs $F^{(n)}$ le sont. Il suffit par exemple, pour ceci, que G soit représentable et soit un schéma en groupes affine sur S, grâce à la théorie de la descente SGA 1 VIII 2.1.

6.3. Dans la suite, nous supposerons que $G = \underline{G}_{m\ S}$, de sorte que toute extension $\underline{G}$ de $\mathbb{Z}_{S,T}$ par $G = \underline{G}_{mS}$ sera bien représentable (6.2.4), et bien entendu, sera lisse sur S comme extension d'un schéma en groupes étale $\mathbb{Z}_{S,T}$ par un schéma en groupes lisse $\underline{G}_{mS}$. De plus, la donnée d'un torseur F sous $\underline{G}_m$ équivaut à la donnée d'un Module inversible $\mathbb{L}$ sur S (en associant à ce dernier le torseur des sections inversibles de $\mathbb{L}$). Donc $\overline{G}$ est décrit par un couple $(\mathbb{L},s)$, où $\mathbb{L}$ est un Module inversible sur S, et s une trivialisation de $\mathbb{L}$ sur U=S-T, i.e. une section inversible de $\mathbb{L}|U$. Lorsque U est schématiquement dense dans S, et que S est localement noethérien, ou réduit et l'ensemble de ses composantes irréductibles est localement fini, la donnée d'un tel couple équivaut à celle d'un <u>diviseur</u> D <u>sur</u> S <u>tel que</u>

(6.3.1) $$\operatorname{supp} D \subset T \quad ,$$

en faisant correspondre à un tel diviseur le couple

(6.3.2) $$(\underline{O}_S(-D), s_D|U)$$

du Module inversible $\underline{O}_S(-D)$ associé à -D (EGA IV 21.2.8.1), et de la restriction à U de la section rationnelle canonique s_{-D} de celui-ci (EGA IV 21.2.11 et 20.2.11 (ii)). En tous cas, sans hypothèse sur S, la donnée d'un diviseur D sur S satisfaisant (6.3.1) définit un couple $(\mathbb{L},s)$ par (6.3.2), donc une extension G de $\mathbb{Z}_{S,T}$ par $\underline{G}_m$, que nous appelerons le <u>modèle de Néron-Raynaud de</u> $\underline{G}_m$, associé au diviseur D et au fermé T de S satisfaisant (6.3.1). Si T = supp D, on omet T dans la terminologie.

Il est immédiat que la formation de cette extension $\overline{G}$ commute à tout changement de base $f : S' \longrightarrow S$ tel que le diviseur image inverse $f^*(D)$ soit défini (EGA IV 21.4.2), en particulier à tout changement de base <u>plat</u>.

6.3.3. On voit aussitôt, grâce à la description générale 6.2.1 des sections de $\overline{G}$, que celles-ci peuvent s'identifier aux sections f du faisceau $\mathcal{M}_S^*$ des sections méromorphes régulières sur S (EGA IV 20.1.8) dont le diviseur div(f) est localement (au sens de la topologie de Zariski) un multiple entier de D . Si V est un ouvert de S tel que la restriction de div f à V est égal à celle de nD, où $n \in \mathbb{Z}$, alors la section de $\mathbb{Z}_{S,T}$ définie par f n'est autre que l'image de la section constante de valeur n de $\mathbb{Z}_S$ dans (6.1.2). La description précédente du groupe des sections de $\overline{G}$ sur S reste valable au-dessus de tout ouvert de S, plus généralement pour le groupe de points de $\overline{G}$ à valeurs dans n'importe quel S-schéma plat S'. Comme $\overline{G}$ lui-même est plat (et même lisse) sur S, cette description redonne donc une caractérisation complète du modèle de Néron-Raynaud de $\underline{G}_m$ défini par D et $T \supset \operatorname{supp} D$.

6.4. Supposons maintenant que S soit <u>normal</u>, et l'ensemble de ses composantes irréductibles localement fini (donc S est un schéma somme de schémas normaux intègres), et supposons que le diviseur D soit positif, à multiplicités 1 (EGA IV 21.6), que T=supp D, et que T soit localement irréductible i.e. que ses composantes irréductibles soient disjointes. Alors pour toute fonction rationnelle f sur S, régulière sur U = S-T, div f est localement un multiple de D, donc on a dans ce cas un isomorphisme de groupes canonique :

$$(6.4.1) \qquad \Gamma(S,\overline{G}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U,\underline{G}_{mU}) \quad .$$

Supposons même T géométriquement unibranche et localement intègre, hypothèse qui est stable par changement de base lisse (EGA IV 17.5.7). Alors, toutes les hypothèses étant stables par changement de base, on déduit de (6.4.1) que pour S' lisse sur S, on a un isomorphisme de groupes canonique, fonctoriel en S' :

$$(6.4.2) \qquad \mathrm{Hom}_S(S', \overline{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_U(S'_U, \underline{G}_{mU}) \simeq \Gamma(S'_U \, , \underline{O}^*_{S'_U}) \quad .$$

Comme $\overline{G}$ est lui-même lisse sur S, cet isomorphisme caractérise le schéma en groupes $\overline{G}$ sur S à isomorphisme unique près. D'autre part, il montre que $\overline{G}$ joue le rôle d'un "modèle de Néron" pour le schéma en groupes $\underline{G}_{mU}$ sur l'ouvert U de S, ce qui (joint au fait qu'il a été introduit et utilisé pour la première fois par M. RAYNAUD) justifie la terminologie adoptée dans 6.3 pour désigner $\overline{G}$.

Théorème 6.5. Soient S un schéma normal localement intègre, D un diviseur positif sur S, sans composantes multiples, tel que le support de D soit géométriquement unibranche et localement intègre. Soit $\overline{G}$ le modèle de Néron-Raynaud de $\underline{G}_m$ sur S relatif à D (6.3), et considérons la catégorie des torseurs E sur S sous le schéma en groupes $\overline{G}$. Le foncteur restriction

$$E \longmapsto E_U = E|U \quad ,$$

qui va de cette catégorie dans la catégorie des torseurs sur U sous le schéma en groupes $\underline{G}_{mU}$, est pleinement fidèle. Si S est un schéma régulier (plus généralement, si ces anneaux locaux sont factoriels), alors ce foncteur est même une équivalence de catégories.

Montrons que le foncteur envisagé est pleinement fidèle, i.e. que pour deux torseurs E,F sous $\overline{G}$, l'application de restriction

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}(E,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_U,F_U)$$

est bijective, où les Hom désignent les ensembles d'homomorphismes de torseurs. Notons d'abord que cette question est manifestement locale sur S pour la topologie de Zariski : si S est réunion d'ouverts S_i tels que pour tout ouvert S' de S contenu dans un S_i (donc en particulier pour S' de la forme S_i ou $S_i \cap S_j$), l'application

$$\mathrm{Hom}(E_{S'},F_{S'}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_{S' \cap U},F_{S' \cap U})$$

est bijective, alors l'application (*) est bijective. D'autre part, il résulte aussitôt de 5.8 appliqué à S,T,$\mathbb{Z}$, et de 5.1 appliqué à T,$\mathbb{Z}$, que tout torseur sous $\overline{G}$ est localement trivial pour la topologie de Zariski. Ces deux observations nous ramènent à prouver la bijectivité de l'application (*) dans le cas où $E=F=\overline{G}$. Mais alors cette application n'est autre que (6.4.1), dont la bijectivité a déjà été établie.

Montrons maintenant que le foncteur $E \longmapsto E_U$ envisagé est essentiellement surjectif lorsque les anneaux locaux de X sont factoriels. Comme $\underline{G}_{m\ S}$ s'identifie à un sous-schéma en groupes ouvert de $\overline{G}$, il suffit de prouver que tout torseur sous $\underline{G}_{m\ U}$ est isomorphe à la restriction à U d'un torseur sous $\underline{G}_{m\ S}$. Il revient au même de dire que tout Module inversible sur U est isomorphe à la restriction d'un Module inversible sur S, ce qui résulte en effet de l'hypothèse faite sur S (EGA IV 21.6.11, où on se borne au cas localement noethérien, qui est le seul cas qui nous servira par la suite). Cela prouve 6.5.

6.5.1. Plaçons nous maintenant dans le cas où on suppose de plus S localement noethérien et <u>régulier</u>. Comme S est alors localement factoriel, la donnée de D équivaut à celle d'un sous-schéma fermé (que nous notons encore D) qui soit purement 1-codimensionnel, réduit et géométriquement unibranche. Notons aussi que les hypothèses sur S et D sont stables par tout changement de base lisse $S' \longrightarrow S$, de sorte que la conclusion de 6.5 s'appliquera à S' muni du sous-schéma $D' = D \times_S S'$ de S'. Ceci dit, la description VII 1.1.6 des Groupes extensions nous donne aussitôt la conséquence suivante :

<u>Corollaire</u> 6.6. <u>Soient</u> S <u>un schéma localement noethérien et régulier</u>, D <u>un sous-schéma fermé réduit géométriquement unibranche et purement 1-codimensionnel</u> <u>(définissant donc un diviseur sur</u> S), $\overline{G}$ <u>le modèle de Néron-Raynaud de</u> G_m <u>relatif à</u> D, P <u>un schéma en groupes commutatifs lisse sur</u> S. <u>Considérons la catégorie des extensions commutatives de faisceaux en Groupes de</u> P <u>par</u> $\overline{G}$. <u>Alors le foncteur restriction à</u> U, $E \longrightarrow E|U$, <u>induit une équivalence de cette catégorie avec la catégorie des extensions de</u> P_U <u>par</u> $G_{m\,U}$.

6.6.1. On obtient par la même méthode l'énoncé analogue, relatif au cas d'extensions pas nécessairement commutatives (P n'étant plus supposé commutatif). Nous laissons au lecteur le détail de la démonstration, légèrement plus compliquée du fait qu'il faut considérer ici des bitorseurs au lieu de torseurs.

Par essentiellement la même démonstration que 6.6, on obtient de même :

<u>Corollaire</u> 6.7. <u>Soient</u> $S, D, \overline{G}$ <u>comme dans</u> 6.6, <u>et</u> P, Q <u>deux schémas en groupes commutatifs et lisses sur</u> S. <u>On considère la catégorie des biextensions de</u> (P,Q) <u>par</u> $\overline{G}$. <u>Alors le foncteur restriction à</u> U, $E \longmapsto E|U$, <u>qui va de cette catégorie dans la catégorie des biextensions de</u> (P_U, Q_U) <u>par</u> $\underline{G}_{m\ U}$, <u>est une équivalence de catégories</u>.

<u>Remarques</u> 6.8. a) Nous appliquerons 6.6 et 6.7 lorsque S est un trait, et D le diviseur défini par l'inclusion du point fermé s de S dans S. Dans ce cas, U est le spectre du corps des fractions K de S, et $\overline{G}$ est le modèle de Néron habituel du groupe multiplicatif sur K, introduit par Raynaud. On notera que, même en se bornant à ce cas, la démonstration de 6.6 et de 6.7 utilise 6.5 sur des bases plus générales que des traits (telles que P et ses puissances cartésiennes ...). Néanmoins, il suffit dans ce cas de connaître l'<u>existence</u> du modèle de Néron $\overline{G}$ dans le cas particulier envisagé, pour en conclure formellement 6.5 pour des schémas de base lisses sur S, donc pour obtenir 6.6 et 6.7. Pour nous, l'introduction de $\overline{G}$ sera surtout un intermédiaire commode pour étudier au numéro suivant le problème des prolongements d'extensions et de biextensions par le groupe multiplicatif.

b) On peut définir un modèle de Néron-Raynaud $\overline{G}$ de $\underline{G}_{m\ U}$, satisfaisant à la condition fondamentale (6.4.2) pour tout S' lisse sur S, sous des conditions nettement plus générales que celles envisagées plus haut, U étant simplement un ouvert schématiquement dense d'un schéma localement noethérien <u>normal</u> S. Dans ce cas, $\overline{G}$ sera un <u>faisceau</u> fppf, pas nécessairement représentable. Désignant par $\underline{D}$ le faisceau, sur le petit site étale de S, des diviseurs sur S de support contenu dans T=S-U, et (par abus de langage) par la même lettre l'extension canonique de $\underline{D}$ en un faisceau sur $(Sch)_{/S}$ (dont les sections sur le schéma relatif $f:S' \longrightarrow S$ sont les sections de $f^*_{\text{ét}}(\underline{D})$ sur S'), le modèle cherché est une extension de Groupes

$$(6.8.1) \qquad 0 \longrightarrow \underline{G}_{mS} \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow \underline{D} \longrightarrow 0 \quad .$$

La construction d'une extension canonique (6.8.1) (sans hypothèse de normalité sur S) ne présente pas de difficultés, en utilisant la description générale VII 1.1.6, et on obtient en même temps (6.4.2) pour S' étale sur S. Pour avoir la même relation pour tout S' lisse sur S, il revient au même de vérifier que la formation du faisceau $\underline{D}$ commute à tout changement de base lisse $f: S' \longrightarrow S$, ce qui pour S normal résulte de EGA Err_{IV} 53, 21.4.9.

6.9. "Autocritique" (observations de P. DELIGNE)(*).

Les n°s 5 et 6, sont vraiment peu inspirants. On a périodiquement l'impression qu'on refait "à la main" le formalisme i_*, i^*, sans voir ce qui est géométrique ou "general non-sense".

Je propose de dégager les énoncés "géométriques" a)b)c) :

a) (cf. 6.8 b) Soit $j:V \hookrightarrow S$ un ouvert schématiquement dense d'un schéma normal noethérien S. Le faisceau étale $\underline{G}_{mS}$ s'identifie alors à un sous-faisceau du faisceau étale $j_*\underline{G}_{mU}$. Soit $\underline{D}$ le faisceau étale quotient

$$0 \longrightarrow \underline{G}_{mS} \longrightarrow j_* \underline{G}_{mS} \longrightarrow \underline{D} \longrightarrow 0 \quad .$$

(*) Le rédacteur du présent exposé déclarant forfait, le lecteur est invité à récrire, en cas de besoin, les n°s 5 et 6 suivant les directives jointes.

Alors la formation de $\underline{D}$ commute à tout changement de base lisse (EGA Err_{IV} 53, 21.4.9) ; de plus, $R^1 j_* \underline{G}_m = 0$ (Th. 90) si les anneaux strictement locaux de S sont factoriels.

b) Si $U = S-Y$, avec Y un diviseur géométriquement unibranche, et si i est l'inclusion de Y dans S, alors

$$\underline{D} = i_* \mathbb{Z}_Y .$$

c) Si Y est sous-schéma fermé d'un schéma X, et E un ensemble, alors le faisceau étale $i_* \underline{E}_Y$ est représentable par un schéma étale sur X, de formation compatible à tout changement de base.

Corollaire. Soient S un schéma noethérien normal, Y un diviseur géométriquement unibranche et $U = S-Y$:

$$U \xhookrightarrow{j} S \xhookleftarrow{i} Y .$$

Il existe un unique schéma en groupes lisse $\mathcal{G}_m$ sur S, tel qu'après tout changement de base lisse, on ait $\mathcal{G}_m \mid S_{ét} = j_*(\underline{G}_m)_U$.

Les exigences précédentes déterminent en effet $\mathcal{G}_m$ en tant que faisceau (pour la topologie étale) sur la catégorie des schémas lisses sur S. Par a), b), la suite

$$0 \longrightarrow \underline{G}_m \longrightarrow \mathcal{G}_m \xrightarrow{q} i_* \mathbb{Z}_Y \longrightarrow 0$$

est exacte. Par c), $i_*\mathbb{Z}_Y$ est représentable. Enfin le morphisme q est représentable.

L'usage du "petit site lisse" précédent devrait permettre de déduire formellement les énoncés du n° 6 de a).

7. Prolongements canoniques d'extensions et de biextensions par $\underline{G}_m$

7.0. Nous récoltons maintenant le fruit de nos préparatifs des n°s 5 et 6. Plaçons nous d'abord dans le cas d'un schéma de base S qui soit un trait, i.e. le spectre d'un anneau de valuation discrète, et soit η son point générique, s sont point fermé, $k = k(s)$. Soit P un schéma en groupes commutatifs lisse sur S, on posera $P_o = P_s$, fibre spéciale de P. Dans le présent numéro, nous ne considérons que des groupes commutatifs, et en particulier les extensions de groupes envisagées sont commutatives.

Théorème 7.1. Les notations sont celles rappelées dans 7.0.

a) Supposons que le groupe des composantes connexes de la fibre spéciale de P,

$$\Phi = P_o/P_o^{\,o}$$

soit un groupe de torsion, - ce qui est le cas en particulier si P est de type fini sur S ; alors le foncteur $E \longmapsto E_\eta$ de la catégorie des extensions de P par $\underline{G}_{mS}$ dans la catégorie des extensions de P_η par $\underline{G}_{m\eta}$ est pleinement fidèle. Supposons qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $n\Phi = 0$, alors si E_η est une extension de P_η par $\underline{G}_{m\eta}$, il lui est associé un homomorphisme canonique

(7.1.1) $$d(E_\eta) : \Phi \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k \quad ,$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour que l'extension E_η soit isomorphe à la fibre générique d'une extension de P par $\underline{G}_{mS}$. En particulier, si P_o est connexe, le foncteur précédent $E \longmapsto E_\eta$ est une équivalence de catégories.

b) Soient P et Q deux schémas en groupes lisses sur S, posons

$$\Phi = P_o/P_o^{\,o} \quad , \quad \Psi = Q_o/Q_o^{\,o} \quad ,$$

et supposons que Φ ou Ψ soit un groupe de torsion (par exemple P ou Q de type fini sur S) ; alors le foncteur $E \longmapsto E_\eta$ dans la catégorie des biextensions de (P,Q) par $\underline{G}_{mS}$ dans la catégorie des biextensions de (P_η, Q_η) par $\underline{G}_{m\eta}$ est pleinement fidèle. Supposons qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $n\Phi=0$ ou $n\Psi=0$, alors si E_η est une biextension de (P_η, Q_η) par $\underline{G}_{m\eta}$, il lui est associé un accouplement canonique

(7.1.2) $$d(E_\eta) : \Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \Psi \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k \quad ,$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour que E soit isomorphe à la fibre générique d'une biextension E de (P,Q) par $\underline{G}_{m\,S}$. En particulier, si P_o ou Q_o est connexe, le foncteur précédent $E \longmapsto E_\eta$ est une équivalence de catégories.

Démonstration. a) Soit $\overline{G}$ le modèle de Néron-Raynaud de $\underline{G}_m$. Le foncteur envisagé est le composé du foncteur "extension du noyau $\underline{G}_{mS} \longrightarrow \overline{G}$ " avec le foncteur "restriction à η " défini sur la catégorie des biextensions par $\overline{G}$. Ce dernier foncteur étant une équivalence de catégories en vertu de 6.6, on est ramené à étudier le premier foncteur. Pour ceci, on utilise la suite exacte de schémas en groupes

(7.1.3) $$0 \longrightarrow \underline{G}_{mS} \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow \mathbb{Z}_{S,s} \longrightarrow 0 \quad ,$$

la notation pour $\mathbb{Z}_{S,s}$ étant celle de 5.7. La suite exacte des Ext^i (i=0,1) associée à cette suite exacte nous montre que pour que le foncteur envisagé soit pleinement fidèle, il faut et il suffit que l'on ait

(7.1.4) $$\mathrm{Hom}(P,\mathbb{Z}_{S,s}) = 0 \quad ,$$

et que l'obstruction, pour une extension $\overline{E}$ de P par $\overline{G}$, de provenir d'une extension E de P par $\underline{G}_{mS}$ se trouve dans

(7.1.5) $$\mathrm{Ext}^1(P,\mathbb{Z}_{S,s}) \quad .$$

Or le premier groupe (7.1.4) est isomorphe à $\mathrm{Hom}(P_o,\mathbb{Z}_k)$ en vertu de (5.7.2), qui est isomorphe lui-même à $\mathrm{Hom}(\Phi, \mathbb{Z}_k)$, de sorte que (7.1.4) équivaut à la relation

(7.1.4 bis) $$\mathrm{Hom}(\Phi,\mathbb{Z}_k) = 0 \quad .$$

Cette relation est certainement vérifiée si Φ est un groupe de torsion. D'autre part, si on a même $n\Phi = 0$, alors en vertu de 5.9 et 5.5 on a des isomorphismes canoniques

(7.1.6) $$\mathrm{Ext}^1(P,\mathbb{Z}_{S,s}) \simeq \mathrm{Ext}^1(P_o,\mathbb{Z}_k) \simeq \mathrm{Hom}(\Phi, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k) \quad ,$$

ce qui achève de prouver 7.1 a).

b) La démonstration est essentiellement la même. On est ramené, grâce à 6.7, à étudier le foncteur "extension du noyau $\underline{G}_{mS} \longrightarrow \overline{G}$ " de la catégorie des biextensions de (P,Q) par $\underline{G}_{mS}$ dans celle des biextensions de (P,Q) par $\overline{G}$. Cette étude se fait en utilisant la suite exacte (7.1.3), et la suite exacte des Biext^i (i=0,1) associée (VII 3.7.5). La pleine fidèlité du foncteur envisagé équivaut à la relation

(7.1.7) $$\mathrm{Hom}(P\otimes Q, \mathbb{Z}_{S,s}) = 0 \quad ,$$

or le premier membre est isomorphe à $\mathrm{Hom}(P_o\otimes Q_o , \mathbb{Z}_k)$ en vertu de (5.7.2), donc à $\mathrm{Hom}(\Phi\otimes\Psi, \mathbb{Z}_k)$, groupe qui est bien nul si Φ ou Ψ est un groupe de torsion. D'autre part, pour une biextension donnée $\overline{E}$ de (P,Q) par $\overline{G}$, l'obstruction à ce qu'elle provienne d'une biextension E de (P,Q) par $\underline{G}_{mS}$ se trouve dans $\mathrm{Biext}^1(P,Q;\mathbb{Z}_{S,s})$, qui est isomorphe en vertu de 5.10 à $\mathrm{Biext}^1(P_o,Q_o, \mathbb{Z}_k)$, lui-même isomorphe (si $n\Phi = 0$ ou $n\Psi = 0$) à $\mathrm{Hom}(\Phi\otimes\Psi, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ en vertu de 5.6. Cela achève la démonstration de 7.1.

<u>Remarque</u> 7.2. On peut se proposer, étant donné un schéma en groupes lisse P sur un schéma localement noethérien régulier connexe S de point générique η, d'étudier le foncteur $E \longmapsto E_\eta$ de la catégorie des extensions de P par $\underline{G}_{mS}$ dans celle des extensions de P_η par $\underline{G}_{m\eta}$. Ce problème se ramène en fait facilement à celui traité dans 7.1 a). Supposons pour simplifier P de type fini sur S. Alors il résulte facilement de 7.1 que le foncteur envisagé est pleinement fidèle(*). On en déduit aisément que si E_η est une extension de P_η par $\underline{G}_{m\eta}$, alors pour que celle-ci soit isomorphe à la fibre générique d'une extension E de P par $\underline{G}_{mS}$, il faut et il suffit que pour tout $s \in S$ tel que $\dim \mathrm{Spec}(\underline{O}_{S,s}) = 1$, le problème de prolongement analogue obtenu par le changement de base $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{S,s}) \to S$ ait une solution, - ce qui, en vertu de 7.1 a), s'exprime par la nullité d'un certain homomorphisme

$$d(E_\eta, s) : P_s/P_s^{\,o} \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{k(s)} \qquad (7.2.1)$$

L'assertion précédente se réduit de façon évidente à la suivante : soit U un ouvert de S, de complémentaire T tel que

$$\mathrm{codim}(T,S) \geq 2 \quad ,$$

(*) Il suffit pour ceci que S soit normal (au lieu de régulier).

alors le foncteur $E \longmapsto E|U$ de la catégorie des extensions de P par $\underline{G}_{mS}$ dans celle des extensions de P_U par $\underline{G}_{m\,U}$ est une équivalence de catégories. Or cette assertion est essentiellement triviale en termes de la description VII 1.1.6, en utilisant le fait que pourtout S-schéma lisse X (tel $P, P\times P, P\times P\times P \ldots$), X est localement factoriel et $X_T = X - X_U$ est de codimension ≥ 2 dans X, d'où résulte que le foncteur $F \longmapsto F|X_U$ de la catégorie des torseurs sous $\underline{G}_{mX}$ dans celle des torseurs sous $\underline{G}_{mX_U}$ est une équivalence de catégories.

On a des résultats tout analogues pour la question des prolongements de biextensions, qu'on laisse au lecteur le soin de formuler.

7.3. Nous allons expliciter quelques propriétés fonctorielles des obstructions définies dans (7.1.1) et (7.1.2) pour P,Q,S variables, et de leurs relations entre elles. On supposera vérifiées par la suite les conditions qui permettent de définir ces obstructions. Comme les vérifications n'offrent pas de difficulté, nous les laissons aux soins du lecteur.

7.3.1. Soit

$$u : P' \longrightarrow P$$

un morphisme de schémas en groupes lisses sur S, E_η une extension de P_η par $\underline{G}_{m\eta}$, d'où par image inverse par $u_\eta : P'_\eta \longrightarrow P_\eta$ une extension E'_η de P'_η par $\underline{G}_m$. Ceci posé, on a commutativité dans le diagramme

$$(7.3.1.1)\qquad \begin{tikzcd} P'_o/P'^{o}_o \arrow[d, "u_o"'] \arrow[dr, "d(E'_\eta)"] & \\ P_o/P_o^{o} \arrow[r, "d(E_\eta)"'] & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k \end{tikzcd}$$

De même, si on des morphismes de schémas en groupes lisses sur S

$$u : P' \longrightarrow P \quad , \quad v : Q' \longrightarrow Q$$

et une biextension E_η de (P_η, Q_η) par $\underline{G}_{m\eta}$, d'où par image inverse par (u_η, v_η) une biextension E'_η de (P'_η, Q'_η) par $\underline{G}_{m\eta}$, on a commutativité dans le diagramme

$$(7.3.1.2)\qquad \begin{tikzcd} P'_o/P'^{o}_o \otimes Q'_o/Q'^{o}_o \arrow[d, "u_o\otimes v_o"'] \arrow[dr, "d(E'_\eta)"] & \\ P_o/P_o^{o} \otimes Q_o/Q_o^{o} \arrow[r, "d(E_\eta)"'] & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k \end{tikzcd}$$

La vérification, essentiellement mécanique, de ces compatibilités est laissée au lecteur.

7.3.2. De la compatibilité (7.3.1.1) résulte que si E_η est une extension de P_η par $\underline{G}_m$, il existe un plus grand sous-schéma en groupes V de P tel que la restriction de E_η à V_η s'étende en une extension de V par

$\underline{G}_{mS}$: c'est le sous-groupe ouvert V de P contenant P_η défini par la condition

(7.3.2.1) $$V_o/V_o^{\,o} = \operatorname{Ker} d(E_\eta) \quad .$$

Si alors $u:P' \longrightarrow P$ est un morphisme de schémas en groupes lisses sur S, l'extension E'_η , image inverse de E_η par u_η , se prolonge en une extension de P' par $\underline{G}_{mS}$ si et seulement si on a

(7.3.2.2) $$u(P') \subset V \quad .$$

Dans le cas d'une biextension E de (P_η , Q_η) par $\underline{G}_{m\eta}$, il existe de même un plus grand sous-schéma en groupes V de P tel que la restriction de E à (V_η , Q_η) se prolonge en une biextension de (V,Q) par $\underline{G}_{mS}$: c'est le sous-groupe ouvert de P, contenant la fibre générique P_η , défini par la condition que $V_o/V_o^{\,o}$ soit le sous-groupe de Φ annulateur gauche de l'accouplement (7.1.2), i.e. noyau de l'homomorphisme correspondant de Φ dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\Psi, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k)$:

(7.3.2.3) $$V_o/V_o^{\,o} = \operatorname{Ker} (\Phi \xrightarrow{d(E_\eta)} \underline{\mathrm{Hom}}(\Psi,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k)) \quad .$$

Si alors on se donne $u: P' \longrightarrow P$ de schémas en groupes lisses sur S, la biextension de (P'_η , Q_η) par $\underline{G}_{m\eta}$ image inverse de E_η par u_η se prolonge en une biextension de (P',Q) par $\underline{G}_{mS}$ si et seulement si on a la relation (7.3.2.2). On a des résultats symétriques en échangeant le rôle de P et de Q. Mais bien entendu on ne pourra en général trouver un plus grand couple de sous-groupes $P' \longrightarrow P$, $Q' \longrightarrow Q$ tels que la restriction E'_η de E_η en une biextension de (P'_η , Q'_η) par $\underline{G}_{m\eta}$ se prolonge en une biextension de (P',Q') par $\underline{G}_{mS}$; on peut seulement dire que pour un couple

(P',Q') donné, plus généralement pour un couple de morphismes donné $P' \longrightarrow P$, $Q' \longrightarrow Q$ de schémas en groupes lisses, le prolongement cherché existe si et seulement si la restriction de la forme $d(E_\eta)$ à $P'_o/P'^o_o \otimes Q'_o/Q'^o_o$ est nulle.

7.3.3. Symétrie. Soit E_η une biextension de (P_η , Q_η) par $\underline{G}_{m\eta}$, et considérons la biextension symétrique ${}^sE_\eta$ (VII 2.7), qui est une biextension de (Q_η , P_η) par $\underline{G}_{m\eta}$. On a alors commutativité dans le diagramme

(7.3.3.1)
$$\begin{tikzcd} \Phi \otimes \Psi \arrow[d, "\mathrm{sym}"'] \arrow[dr, "d(E_\eta)"] & \\ \Psi \otimes \Phi \arrow[r, "d({}^sE_\eta)"'] & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k \end{tikzcd}$$,

où la flèche verticale est la symétrie canonique. (On comparera cet énoncé avec l'énoncé d'antisymétrie de 2.2.10.) On en déduit en particulier que si $P=Q$, et si E_η est une biextension symétrique de (P_η , Q_η) par $\underline{G}_{m\eta}$, i.e. si E_η est isomorphe à ${}^sE_\eta$, alors la forme bilinéaire $d(E_\eta)$ sur $\Phi \times \Phi$ à valeurs dans $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k$ est symétrique (et non alternée comme dans 2.2.12 !). On notera que si elle est nulle, i.e. si E se prolonge en une biextension de (P,P) par $\underline{G}_{mS}$, cette dernière est nécessairement symétrique également, puisqu'en vertu de 7.1 a) tout isomorphisme ${}^sE_\eta \longrightarrow E_\eta$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme ${}^sE \longrightarrow E$.

7.3.4. <u>Réduction des obstructions du type</u> (7.1.2) <u>à celles du type</u> (7.1.1).

Supposons pour fixer les idées qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $n\,\Phi = 0$, et soit

$$q \in Q(S)$$

une section de Q. On désigne, par abus de notation, par

$$q_o \in \Psi(k)$$

l'image dans $\Psi(k)$ de la valeur de q en s. Considérant E_η comme une extension de $P_{\eta Q_\eta}$ par $\underline{G}_{mQ_\eta}$, on trouve une extension

$$q_\eta^*(E_\eta) \text{ , extension de } P_\eta \text{ par } \underline{G}_{m\eta} \quad ,$$

d'où une obstruction

$$(7.3.4.1) \qquad d_q \overset{\text{dfn}}{=} d(q_\eta^*(E_*)) : \Phi \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k \quad .$$

Ceci posé, on a la relation (où on a posé $d = d(E_\eta)$)

$$(7.3.4.2) \qquad d_q(x) = d(x,q_o) \quad ,$$

valable pour tout point x de Φ à valeurs dans un k-schéma T .

7.3.4.3. Cette formule, qui pour tout $q \in Q(S)$ détermine d_q en termes de l'accouplement d , redonne évidemment ce dernier en termes des invariants d_q , du moins lorsque tout point de Ψ provient d'une section de Q. Cette condition est d'ailleurs vérifiée automatiquement lorsque S est strictement local, en vertu du lemme de Hensel. Comme l'accouplement d est connu quand on le connaît sur la clôture séparable de k, et que sa formation commute à la localisation étale sur S en vertu de 7.3.5.3

---

ci-dessous, on voit que, quitte à passer au localisé strict de S, la détermination de l'accouplement d se ramène à celle des invariants d_q. En particulier, lorsque tout point de Ψ provient d'une section q de Q, on voit que d est nul (i.e. E_η se prolonge en une biextension E de (P,Q) par $\underline{G}_m$) si et seulement si pour tout section q de Q, d_q est nul i.e. $q^*_\eta(E_\eta)$ se prolonge en une extension de P par $\underline{G}_m$. Lorsqu'on ne fait pas d'hypothèse sur Ψ, le critère analogue est valable, à condition de prendre pour q des points à valeurs dans des S' locaux étales sur S.

7.3.4.4. Inversement, partant de la situation de 7.1 a), l'obstruction (7.1.1) peut s'interpréter comme une obstruction du type (7.1.2), en prenant $Q = \mathbb{Z}_S$ et la biextension de $(P,\mathbb{Z}_S)$ déduite de E. Pour le voir, il suffit d'appliquer ce qui précède en prenant pour q la section 1 de $\mathbb{Z}_S$.

7.3.5. Effet d'un changement de base $S' \longrightarrow S$. On suppose donné un morphisme local dominant de traits

$$f : S' \longrightarrow S \quad ,$$

et on désigne par η' le point générique de S', par s' son point fermé, et on pose $k'=k(s')$. Si S=Spec(V), S' = Spec(V'), V' est donc un anneau de valuation discrète dominant l'anneau de valuation discrète V. Posons

$$e(S'/S) = e(V'/V) = \mathrm{long}(V'/\underline{m}\,V) \quad , \tag{7.3.5.1}$$

où $\underline{m}$ est l'idéal maximal de V. Soient maintenant P dans 7.1 a), E_η une extension de P_η par $\underline{G}_{m\eta}$, $P' = P\times_S S'$, $E'_{\eta'}$ l'extension de $P'_{\eta'}$ par $\underline{G}_{m\eta'}$ image inverse de E_η. On a alors un isomorphisme canonique

$$\Phi' \overset{\text{dfn}}{=} P'_o/P'^{o}_o \simeq \Phi \otimes_k k' \simeq \Phi_{k'} \quad ,$$

avec les notations de 4.1 a), et on peut par suite considérer

$$d(E_\eta)_{k'} : \Phi' \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{k'} \quad .$$

Ceci posé, on a la relation

$$(7.3.5.2) \qquad d(E'_{\eta'}) = e(S'/S)\, d(E_\eta)_{k'} \quad .$$

De même, sous les conditions de 7.1 b), et avec les notations évidentes, on a la relation (7.3.5.2), où $d(E_\eta)$ désigne maintenant l'accouplement (7.1.2), $d(E_\eta)_{k'}$ l'accouplement

$$\Phi' \otimes \Psi' \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{k'}$$

qui s'en déduit par le changement de base $k \longrightarrow k'$, et où $E'_{\eta'}$ est la biextension de $(P'_{\eta'}, Q'_{\eta'})$ par $\underline{G}_{m\eta'}$ déduite de la biextension E_η de (P_η, Q_η) par $\underline{G}_{m\eta}$ à l'aise du changement de base $\eta' \longrightarrow \eta$.

7.3.5.3. Un cas intéressant est celui où on a $e(S'/S) = 1$, i.e. où

$$\underline{m}' = \underline{m}\, V' \quad ,$$

où $\underline{m}'$ désigne l'idéal maximal de V'. C'est le cas en particulier si V' est étale sur V, ou si c'est le hensélisé, ou le hensélisé strict, ou le complété de V. Dans ce cas la relation (7.3.5.2) s'exprime simplement en disant que <u>la formation de l'obstruction</u> (7.1.1) <u>resp</u>. (7.1.2) <u>commute au changement de base envisagé</u> $S' \longrightarrow S$.

7.3.5.4. D'autre part, la relation (7.3.5.2) dans le cas général montre que pour toute extension E_η comme dans 7.1 a) (resp. toute biextension E_η comme dans 7.1 b)), il existe un morphisme de traits <u>fini</u> $S' \longrightarrow S$, tel que $k(\eta')$ soit une extension séparable de $k(\eta)$, et que l'extension (resp. la biextension) $E'_{\eta'}$, déduite de E_η par changement de base $\eta' \longrightarrow \eta$ se prolonge en une extension (resp. biextension) E' sur S' tout entier. En effet, il suffit de choisir S'/S tel que $e(S'/S)$ soit un multiple de l'entier $n > 0$ figurant dans 7.1, et on sait qu'on peut toujours trouver une telle extension, avec $k(\eta')$ séparable sur $k(\eta)$.

Proposition 7.4. *Soit* S *un schéma réduit.*

a) *Soit* P *un schéma en groupes lisse sur* S *dont les fibres aux points maximaux de* S *sont connexes. Alors le foncteur naturel* VII 1.3.4.1

(7.4.1) $$\mathrm{EXT}(P,\underline{G}_{mS}) \longrightarrow \mathrm{TORSRIG}(P,e_P;\underline{G}_{mS})$$

de la catégorie des extensions de P *par* $\underline{G}_{mS}$ *dans la catégorie des torseurs sous* $\underline{G}_{mP}$ *rigidifiés par rapport à la section unité de* P, *est* pleinement fidèle. *Si* S *est normal*, *et* P *à fibres connexes*, *alors un objet* E *du deuxième membre de* (7.4.1) *appartient à l'image essentielle de ce foncteur si et seulement si pour tout point maximal* η *de* S, *le torseur rigidifié* E_η *sur* P_η *provient d'une extension de* P_η *par* $\underline{G}_{m\eta}$.

b) *Soient* P,Q *deux schémas en groupes lisses sur* S *dont les fibres aux points maximaux de* S *sont connexes. Alors le foncteur naturel* VII 2.9.1

(7.4.2) $$\mathrm{BIEXT}(P,Q;\underline{G}_{mS}) \longrightarrow \mathrm{TORSBIRIG}(P,Q;\underline{G}_{mS})$$

de la catégorie des biextensions de (P,Q) *par* $\underline{G}_{mS}$ *dans la catégorie des torseurs sous* $\underline{G}_{m\,P\times_S Q}$ *birigidifiés relativement au couple des* sections unités de P et de Q, est pleinement fidèle. Si S est normal, et P ou Q à fibres connexes, un objet E du second membre de (7.4.2) appartient à l'image essentielle du foncteur si et seulement si pour tout point maximal η de S, E_η provient d'une biextension de (P_η, Q_η) par $\underline{G}_{m\eta}$.

Nous prouverons a), la démonstration de b), essentiellement identique, étant laissée au lecteur. Pour l'assertion de pleine fidélité, on peut noter que 4.1 reste valable si X et Y sont des schémas plats sur un schéma réduit S, dont les fibres aux points maximaux satisfont aux conditions énoncées dans 4.1 : en effet, la famille des fibres maximales de $X \times_S Y$ (qui est plat sur S réduit) est schématiquement dense dans $X \times_S Y$, de sorte qu'un morphisme de $X \times_S Y$ dans le S-schéma séparé $\underline{G}_{mS}$ est trivial dès qu'il l'est sur les fibres maximales. Ceci dit, la pleine fidélité de (7.4.1) se démontre comme 4.2, et la caractérisation qui y est donnée de l'image essentielle reste également valable. Il reste à prouver que si le torseur rigidifié E sur P est tel que les E_η proviennent d'extensions, il en est de même de E, lorsqu'on suppose S normal et P à fibres connexes. Cette dernière condition implique que P est de présentation finie sur S (SGA 3 VI_B 5.5) ; la pleine fidélité nous montre d'autre part que la question est locale sur S, qu'on peut donc supposer local affine, et le passage à la limite habituel (utilisant le théorème de NAGATA de finitude de la clôture intégrale d'une $\mathbb{Z}$-algèbre réduite de type fini EGA IV 7.8) nous ramène au cas où S est de plus supposé noethérien. Alors 7.1 a) nous montre qu'il existe un ouvert $U \subset S$, dont le complémentaire est de codimension ≥ 2, tel que E_U provienne d'une extension de P_U par $\underline{G}_{mU}$. En d'autres termes, l'isomorphisme cherché

$$\pi^*(E) \simeq pr_1^*(E)pr_2^*(E)$$

peut être construit au-dessus de $(P\times_S P)_U$. Or c'est là un ouvert du schéma normal $P\times_S P$, dont le complémentaire est de codimension ≥ 2. Donc l'isomorphisme en question sur $(P\times_S P)_U$ se prolonge à $P\times_S P$ tout entier, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 7.5. Soient S un schéma normal, P et Q deux schémas en groupes lisses sur S, à fibres maximales connexes, P ou Q étant à fibres connexes. Supposons de plus que pour tout point maximal η de S, P_η ou Q_η soit une extension d'un schéma abélien par un tore (plus généralement qu'il admette une suite de composition dont les facteurs soient des schémas abéliens, des tores ou des groupes $\underline{G}_a$). Alors le foncteur (7.4.2) est une équivalence de catégories.

C'est en effet une conséquence immédiate de 7.4 b) et de 4.7.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Demazure, J.Giraud, M.Raynaud, Schémas abéliens, Séminaire Orsay 1967/68, à paraître.

[2] M. Raynaud, Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes, thèse Paris 1968 (à paraître dans Lecture Notes, Springer).

[3] M. Rosenlicht, Some basic theorems on algebraic groups, Amer. Jour. Math. vol 78 n°2 (1956), p.401-443.

[3bis] M. Rosenlicht, Some rationality questions on algebraic groups, Annali di Matematica, Série 4, n° 43 (1957), p.25-50.

[4] J.P. Serre, corps locaux, Act. Sci. Ind, 1296 (1962), Hermann Paris.

SGA 7

EXPOSE IX

MODELES DE NERON ET MONODROMIE

par A. Grothendieck

(avec un appendice par M. Raynaud)

SOMMAIRE

0. Introduction

0.1. Dans le présent exposé, nous appliquons les résultats des exposés précédents à l'étude du modèle de Néron (1.1) A d'un schéma abélien A_K défini sur le corps des fonctions K du trait hensélien S. Nous verrons en effet que les propriétés les plus importantes du modèle de Néron peuvent s'interpréter en termes de l'action du groupe de monodromie locale I sur le module de Tate $T_\ell(A_K(\overline{K}))$ (où ℓ est un nombre premier $\neq p$). Comme le dual de ce dernier s'interprète comme le groupe de cohomologie ℓ-adique $H^1(A_{\overline{K}},\mathbb{Z}_\ell)$, et que pour tout schéma projectif et lisse X sur K, $H^1(X_{\overline{K}},\mathbb{Z}_\ell)$ s'identifie à $H^1(A_{\overline{K}},\mathbb{Z}_\ell)$, où $A_{\overline{K}}$ est la variété d'Albanese de $X_{\overline{K}}$, on voit donc que le présent exposé peut aussi être considéré comme une étude détaillée des phénomènes de monodromie locale pour les H^1 ℓ-adiques (ou mieux encore, pour les H^1 "motiviques") des variétés projectives et lisses sur K. Dans cette optique, il semble clair que les principaux résultats du présent exposé sont destinés à être englobés dans une "théorie de Néron" pour des motifs de poids quelconque, i.e. pour des H^i (ℓ-adiques, ou de De Rham, ou de Hodge etc) avec i quelconque, qu'on ne commence qu'à entrevoir à l'heure actuelle. (Cf. à ce sujet [9], et plus particulièrement les conjectures de DELIGNE 9.8 à 9.13 du rapport cité.)

0.2. Le résultat le plus important du présent exposé est le "théorème de réduction semi-stable" 3.6, affirmant qu'après extension séparable finie K' de K, le modèle de Néron de $A_{K'}$ a une fibre spéciale dont la composante neutre est extension d'un schéma abélien par un tore. Ce résultat avait été conjecturé par J.P. SERRE en 1964, et le principe de la démonstration que nous en donnons ici (*) remonte à la même année. Il apparaît (3.5) que cette propriété de "réduction semi-stable" équivaut au fait que l'action du groupe de monodromie I sur $T_{\ell}(A_K(\overline{K}))$ est "essentiellement unipotente d'échelon 2" (ℓ étant un nombre premier fixé distinct de la caractéristique résiduelle p de S), et sous cette forme a été prouvée en termes de H^1 ℓ-adique dans l'exposé III comme cas particulier du "théorème de monodromie", en utilisant la résolution des singularités des schémas excellents de dimension 2 (due à S. ABHYANKAR). Pour établir l'équivalence des deux propriétés, nous aurons besoin d'autre part d'un "théorème d'orthogonalité" 2.4, dû à IGUSA [11] dans le cas particulier où A_K est la jacobienne d'une courbe lisse X_K sur K, fibre générique d'un schéma projectif régulier et connexe X sur S dont la fibre spéciale géométrique n'a comme seuls points singuliers que des points singuliers quadratiques ordinaires. C'est d'ailleurs là un cas de réduction semi-stable, qui ne suffirait pas pour notre propos ; c'est surtout pour établir le théorème d'orthogonalité sous sa forme générale que nous utilisons l'outil commode que fournit la théorie des biextensions, développée dans les deux exposés précédents. Signalons d'ailleurs qu'une démonstration très différente du théorème de réduction semi-stable, n'utilisant pas la résolution des singula-

(*) Il est développé dans une lettre du conférencier à J.P. SERRE du 30.10.64.

rités, a été trouvée par D. MUMFORD, en utilisant sa théorie des fonctions θ (non publié) ; malheureusement, il est obligé de se limiter au cas d'une caractéristique résiduelle $\neq 2$.

0.3. Le théorème de réduction semi-stable est l'outil principal utilisé dans les paragraphes ultérieurs pour l'étude des modèles de Néron, que nous entreprenons ici du point de vue "algébrique". Il semble indispensable également dans l'étude des variétés abéliennes sur K du point de vue "rigide-analytique" ou des "fonctions θ " (ces termes étant synonymes, parait-il, lorsqu'il est question de variétés abéliennes sur des corps valués complets ...), telle qu'elle a été développée récemment par D. MUMFORD et M. RAYNAUD (à la suite de travaux de TATE et MORIKAWA). (Nous dirons quelques mots aux § 13, 14 sur les liens entre les points de vue algébrique et transcendant.) Enfin, ce même théorème est un ingrédient-clef de la démonstration du "théorème de réduction semi-stable des courbes algébriques" de ARTIN-DELIGNE-MUMFORD [3] (*), dont nous avons déjà eû à faire usage dans l'étude de l'action de monodromie sur le groupe fondamental ("théorème d'action essentiellement modérée" V), et qui est utilisé à nouveau dans la démonstration du théorème d'intégrité et de positivité 10.4 dans le présent exposé (**).

0.4. Le présent exposé se distingue des autres exposés du Séminaire par le fait que dans l'étude du module de TATE $T_\ell(A_K)$, nous avons systématiquement tenu compte aussi du cas où ℓ est égal à la caractéristique

(*) La démonstration de ce théorème avait été donnée par P. DELIGNE dans le Séminaire oral, mais il n'a pas été jugé utile de la reproduire dans les textes de Séminaire.

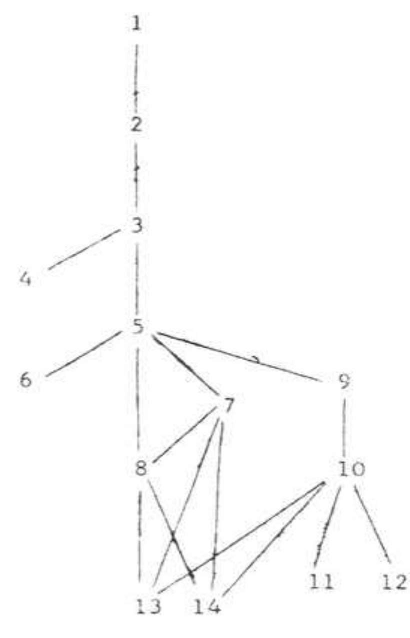
(**) Il existe une autre démonstration de ce dernier théorème, via la théorie rigide-analytique, n'utilisant pas le théorème de réduction semi-stable.

résiduelle p. Il se trouve que le langage des <u>groupes de Barsotti-Tate</u> [33] (*) permet d'étendre à ce cas tous les phénomènes les plus importants établis pour le cas $\ell \neq p$, sous la réserve toutefois, parfois, de disposer du théorème fondamental de TATE [33 th. 4], établi pour l'instant seulement dans le cas où K est de caractéristique nulle. Bien entendu, dans ce dernier cas le pro-p-groupe de Barsotti-Tate $T_p(A_K)$ s'interprète encore en termes de l'action du groupe de monodromie I sur le module p-adique $T_p(A_K(\overline{K}))$, mais on fera attention que la plupart des énoncés que pourrait suggérer cette analogie superficielle avec le cas $\ell \neq p$ sont grossièrement faux. (Ainsi, il n'est plus vrai que l'action du groupe de monodromie soit essentiellement unipotente pour $\ell = p$.) Mais utilisant des traductions plus judicieuses (telle par exemple 5.13 plus bas), il est clair dès maintenant que l'étude des pro-p-groupes de Barsotti-Tate définis par voie géométrique sur le corps des fonctions d'un trait à caractéristique résiduelle $p > 0$, qu'il soit ou non d'inégales caractéristiques, doit être considéré comme faisant partie de la théorie de la "monodromie locale", où ces groupes jouent le rôle de "<u>systèmes locaux</u> p-<u>adiques</u>" sur Spec(K). En fait, ce sont essentiellement les "systèmes locaux" qui s'introduisent dans l'<u>étude</u>, <u>du point de vue</u> "p-<u>adique</u>", <u>du</u> H^1 <u>des variétés projectives et lisses sur</u> K. Pour l'étude des H^i supérieurs du point de vue p-adique, qui reste à faire, il apparaît qu'il faudra élargir convenablement la catégorie des pro-p-groupes de Barsotti-Tate sur K resp. sur S, en s'inspirant des points de vue fournis par la "cohomologie cristalline".

(*) ou "groupes p-divisibles" dans la terminologie de TATE.

0.5. L'exposé donné ici, très proche des exposés oraux jusqu'au § 4, est nettement plus détaillé et complet à partir des paragraphes suivants, qui avaient été seulement partiellement esquissés. Il ne sera pas utilisé dans les exposés ultérieurs. Par contre, certains résultats du présent exposé (10.4 et 12.5) utilisent la <u>formule de Picard-Lefschetz</u>, qui sera établie seulement ultérieurement.

<u>LEITFADEN</u>



1. <u>Modèle de Néron des schémas abéliens</u> : <u>notations</u> ; <u>l'accouplement canonique</u> $\Phi_o \times \Phi'_o \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k$, <u>et la biextension canonique</u> W^o <u>de</u> (A^o, A'^o).

1.0. Dans toute la suite du présent exposé, on suppose fixé un trait S, pour lequel nous utilisons nos notations habituelles s, η, k, X etc. de I 1 . Nous supposons donné un schéma abélien A_K sur K, dont le schéma abélien dual [5] sera noté A'_K . La dualité entre A_K et A'_K est donnée par une correspondance divisorielle W_K sur (A_K, A'_K), i.e. un Module inversible sur $A_K \times A'_K$, birigidifié relativement aux sections unité de A_K, A'_K , lequel est déterminé à isomorphisme unique près par sa classe (cf. VIII 3.1)

$$(1.0.1) \qquad w_K \in \mathrm{Biext}^1(A_K, A'_K; \mathbb{G}_{m\ K}) \quad .$$

Un rôle important sera joué par l'accouplement correspondant (VIII 2.2)

$$(1.0.2) \qquad \varphi : T_\ell(A_K) \times T_\ell(A'_K) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)_K \overset{\mathrm{dfn}}{=} T_\ell(\mathbb{G}_{mK}) \quad ,$$

où ℓ est un nombre premier quelconque. Lorsque $\ell \neq p$ = car.k, la donnée de φ équivaut à celle d'un accouplement de $\mathbb{Z}_\ell$-modules libres de type fini

$$(1.0.3) \qquad \varphi : T_\ell(A_K(\overline{K})) \times T_\ell(A'_K(\overline{K})) \longrightarrow T_\ell(\overline{K}^*) \quad ,$$

compatible avec l'action de

$$\pi = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$$

sur les trois modules en jeu, $\overline{K}$ étant une clôture séparable de K. Il est connu (VIII 3.2) que l'accouplement en question est une dualité parfaite, i.e. qu'il identifie chacun des modules $T_\ell(A_K(\overline{K}))$, $T_\ell(A'_K(\overline{K}))$ au "dual" de l'autre à valeurs dans le module inversible $\mathbb{Z}_\ell(1) = T_\ell(\overline{K}^*)$.

On supposera parfois choisie une polarisation de A_K , qui est donc un élément

$$\xi \in NS(A_K/K) = \underline{NS}_{A_K/K}(K) \quad , \tag{1.0.4}$$

où

$$\underline{NS}_{A_K/K} \overset{dfn}{=} \underline{Pic}_{A_K/K}/(\underline{Pic}^{o}_{A_K/K} = A'_K) \quad .$$

Elle définit de la façon habituelle un homomorphisme

$$\psi_{\xi} : A_K \longrightarrow A'_K \quad , \tag{1.0.5}$$

d'où un homomorphisme

$$T_{\ell}(\psi_{\xi}) \text{ ou } \psi_{\xi} : T_{\ell}(A_K) \longrightarrow T_{\ell}(A'_K) \quad , \tag{1.0.6}$$

et une forme bilinéaire φ_{ξ}

$$\varphi_{\xi}(x,y) = \varphi(x,\psi_{\xi}(y)) : T_{\ell}(A_K) \times T_{\ell}(A_K) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ell}(1)_K \quad , \tag{1.0.7}$$

qu'on peut aussi interpréter pour $\ell \neq p$ comme accouplement de $\mathbb{Z}_{\ell}$-modules libres de type fini à opérateurs :

$$\varphi_{\xi} : T_{\ell}(A_K(\overline{K})) \times T_{\ell}(A_K(\overline{K})) \longrightarrow T_{\ell}(\overline{K}^*) \quad . \tag{1.0.8}$$

Ces constructions ont un sens pour tout élément du groupe de Néron-Séveri de A_K, et fournissent une forme φ_{ξ} (1.0.7) ou (1.0.8) <u>alternée</u> (VIII 2.2.11). Le fait que ξ soit une <u>polarisation</u> implique que ψ_{ξ} dans (1.0.5) est une isogénie, ou ce qui revient au même puisque dim A_K = dim A'_K, un épimorphisme de Groupes, ou encore que $T_{\ell}(\psi_{\xi})$ dans (1.0.6) est injectif (ou encore, a un conoyau fini), ou enfin que la forme φ_{ξ} de (1.0.7) est <u>séparante</u>.

1.1. Rappelons qu'il existe sur S un schéma lisse A, appelé modèle de Néron de A_K , qui représente le foncteur

$$(1.1.1) \qquad S' \longmapsto \mathrm{Hom}\,(S'_\eta, A_K)$$

sur la catégorie des S-schémas lisses. On a donc par définition un isomorphisme de foncteurs en S', schéma relatif lisse sur S :

$$(1.1.2) \qquad \mathrm{Hom}_S(S', A) \simeq \mathrm{Hom}_K(S'_\eta, A_K) \quad .$$

La construction de A est donnée par NERON [19] lorsque le corps résiduel k de S est parfait, et a été étendue par RAYNAUD au cas général au cours d'un séminaire non rédigé qu'il a donné à l'IHES en 1966/67 (cf.[21] pour l'énoncé des résultats principaux obtenus par RAYNAUD, complétant les résultats de NERON de loc. cit.). Nous admettrons ici ce résultat d'existence, ainsi que le fait que A est un schéma quasi-projectif sur S. Appliquant (1.1.2) pour S' lisse sur η, on constate de plus que le morphisme canonique suivant est un isomorphisme

$$(1.1.3) \qquad A \times_S \mathrm{Spec}(K) \xrightarrow{\sim} A_K \quad ,$$

ce qui justifie le couple de notations A, A_K . On écrira aussi, le cas échéant, A_η au lieu de A_K . Utilisant (1.1.3) comme isomorphisme d'identification, la bijection canonique (1.1.2) n'est autre que l'application de restriction aux fibres génériques.

Comme le foncteur (1.1.1) a évidemment une structure de Groupe commutatif, il s'ensuit que le modèle de Néron A qui le représente a lui-même une structure de schéma en groupes commutatif lisse sur S. La suite de cet exposé est consacré à l'étude de ce schéma en groupes.

Un invariant important, déduit de la considération du modèle de Néron, est évidemment le schéma en groupes commutatifs, lisse et de type fini sur k:

(1.1.4) $A_o = A \times_S s = A_k$.

Suivant les notations générales, on désigne par A_o^o sa composante neutre, et on considère également le schéma en groupes

(1.1.5) $\Phi_o = A_o / A_o^o$

des composantes connexes de A_o, qui est un schéma en groupes fini et étale sur k. En termes de la clôture séparable $\overline{k}$ de k, il est donc déterminé par le groupe fini ordinaire

(1.1.6) $\Phi_o(\overline{k})$,

avec les opérations naturelles de

$$\pi_o = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$$

sur ce groupe.

En même temps que le modèle de Néron A de A_K , nous étudierons

(1.1.7) $A' =$ modèle de Néron de A'_K ,

qui est également un schéma en groupes commutatifs, lisse et de type fini sur S. On désignera par

(1.1.8) $\Phi'_o = A'_o / A'^o_o$

le groupe des composantes connexes de sa fibre spéciale A_o .

1.2. Appliquons VIII 7.1 b) au couple (A,A') et à la biextension W_K de (1.0.1) (A_K,A'_K) par G_{mK}. On trouve donc un <u>accouplement canonique</u>

$$\Phi_o \times \Phi'_o \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k \qquad (1.2.1)$$

i.e. un accouplement de π_o-modules

$$\Phi_o(\overline{k}) \times \Phi'_o(\overline{k}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \qquad (1.2.2)$$

Cet accouplement apparaît ici comme obstruction au prolongement de W_K en une biextension W de (A,A') par $\mathbb{G}_{mS}$, et la signification de ce point de vue est explicitée dans VIII 7.3.2. Signalons tout de suite à propos de cet accouplement la

<u>Conjecture</u> 1.3. <u>L'accouplement</u> (1.2.1) <u>est une dualité parfaite</u>, <u>i.e.</u> <u>identifie chacun des groupes de composantes connexes</u> Φ_o <u>et</u> Φ'_o <u>au dual à valeurs dans</u> $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_k$ <u>de l'autre</u>.

1.3.1. Signalons qu'il résulte de la commutation de la formation de (1.2.1) aux changements de base formellements nets (VIII 7.3.5.3), et de la propriété analogue pour la formation des modèles de Néron, qu'il suffirait de prouver 1.3 dans le cas où S est complet à corps résiduel séparablement clos. La conjecture a été prouvée par ARTIN et MAZUR dans le cas où A_K est la jacobienne d'une courbe propre et lisse sur K, en utilisant leur théorie générale (non publiée) de l'autodualité de la jacobienne relative (au sens des catégories dérivées) d'un schéma en courbes propre sur S ; ils ont prouvé la même conjecture 1.3 dans le cas où le corps résiduel est <u>fini</u>, en utilisant la théorie de dualité de TATE [32]. Nous verrons également dans 11.4 et 11.5(modulo des vérifications de compatibilité) que 1.3 est vrai pour les composantes ℓ-primaires pour $\ell \neq p$, et que 1.3 est vrai dans le cas de la "réduction semi-stable". Ces résultats rendent 1.3 extrêmement plausible. D'ailleurs 1.3 peut également être considéré comme un sous-produit d'une théorie de dualité générale pour les schémas en groupes sur les corps de fractions d'anneaux de valuation discrète complets, formellement analogue à celle de SGA 5 I, qui reste heuristique à l'heure actuelle, et qui contiendrait également la théorie du corps de classe local sous la forme que lui a donné SERRE [27].

1.3.2. La validité de 1.3 pour un schéma abélien donné A_K revient à dire que l'accouplement (1.2.1) est <u>séparant</u> à gauche et à droite. D'ailleurs le fait qu'il soit séparant à gauche signifie, en vertu de VIII 7.3.2, que le seul sous-schéma en groupes ouvert V de A tel que W_K puisse se prolonger en une biextension de (V,A') par G_{mS} est la composante neutre A^o de A. On a une interprétation symétrique pour la condition que (1.2.1) soit séparant à droite.

1.4. De façon générale si

(1.4.1) $$U \subset A \text{ et } U' \subset A'$$

sont des sous-schémas en groupes ouverts tels que W_K se prolonge en une biextension de (U,U') par $\mathbb{G}_{mS}$ (ce qui, en vertu de VIII 7.3.2, s'explicite par la condition que les sous-groupes

(1.4.2) $$\Phi'_o = U_o/U_o{}^o \subset \Phi_o \ , \quad \Psi'_o = U'_o/U'^o_o \subset \Psi_o$$

de Φ_o et de Ψ_o définis par U et U'sont orthogonaux l'un à l'autre pour l'accouplement (1.2.1)), on désigne par W ce prolongement (unique à isomorphe unique près) de W_K . Il est déterminé à isomorphisme unique près par sa classe

$$(1.4.3) \qquad w \in \mathrm{Biext}^1(U,U' \,;\, \mathbb{G}_{mS}) \quad ,$$

elle-même caractérisée par la condition que son image dans $\mathrm{Biext}^1(A_K,A'_K;\mathbb{G}_{m\,K})$ soit w_K de (1.0.1).

On peut prendre par exemple pour U et U' les composantes neutres A^o et A'^o de A et A'. On trouve ainsi une <u>biextension canonique</u> W^o <u>ou</u> W <u>de</u> (A^o,A'^o) <u>par</u> $\mathbb{G}_{mS}$, donnant lieu à une classe

$$(1.4.4) \qquad w = w^o \in \mathrm{Biext}^1(A^o,A'^o;\mathbb{G}_{mS}) \quad ,$$

avec laquelle nous travaillerons principalement. Evidemment les classes w (1.4.3) relatives à divers couples (U,U') ont toutes w^o (1.4.4) pour restriction à (A^o,A'^o).

<u>Proposition</u> 1.5. <u>Considérons la fibre spéciale</u> W_s <u>de la biextension canonique</u> (1.4.4) W <u>de</u> (A^o,A'^o) <u>par</u> $\mathbb{G}_{mS}$, <u>de sorte que</u> W_s <u>est une biextension de</u> $(A_o^{\ o},A'^{o}_o)$ <u>par</u> $\mathbb{G}_{mk}$. <u>Cette dernière est séparante</u> (VIII 4.11).

Choisissons en effet un Module inversible ample $\mathbb{L}$ sur A^o. Alors $\mathbb{L}_\eta$ définit un homomorphisme (cf. 1.0.5)

$$A_K \longrightarrow A'_K \quad ,$$

qui se prolonge en un homomorphisme $A \longrightarrow A'$, d'où

$$\psi : A^o \longrightarrow A'^o \quad ,$$

et on peut considérer la biextension $W_{\mathbb{L}}$ de (A^o,A^o) par $\mathbb{G}_{mS}$, image inverse de W par (id_{A^o}, ψ). La restriction de $W_{\mathbb{L}}$ aux fibres génériques n'est alors autre que la biextension $\delta(\mathbb{L}_\eta)$ de (VIII 4.12), donc en vertu de VIII 7.4, $W_{\mathbb{L}}$ est associé au Module birigidifié $\delta(\mathbb{L})$, et par suite $(W_{\mathbb{L}})_s$ est défini par $\delta(\mathbb{L}_s)$. D'autre part, il peut également être décrit comme l'image inverse de la biextension W_s par les morphismes

$$id_{A_o^o} : A_o^o \longrightarrow A_o^o \quad , \quad \psi_o : A_o^o \longrightarrow A_o'^o \quad .$$

Comme $\mathbb{L}$ donc $\mathbb{L}_s$ est ample, il résulte de VIII 4.13 que $W_{\mathbb{L}_s}$ est séparant, et en particulier séparant à gauche, et à fortiori W_s est donc séparant à gauche. Par symétrie, W_s est également séparant à droite, ce qui prouve 1.5.

Notons que nous préciserons considérablement 1.5 dans le cas où A_o^o est de rang unipotent nul (5.4).

2. Partie fixe et partie torique de $T_\ell(A_K)$. Critères de bonne réduction. Théorème d'orthogonalité pour $\ell \neq p$

2.1. Comme tout groupe algébrique commutatif sur k, A_o admet un plus grand sous-tore, dont la formation commute à toute extension du corps de base [SGA 3 XVII 7.2.1, XII 1.12] :

(2.1.1) $$T_o \subset A_o \quad .$$

Lorsque k est parfait, T_o est caractérisé par la condition que A_o^o/T_o soit extension d'un schéma abélien B_o sur k par un groupe unipotent (lisse et connexe) [25], qui admet nécessairement une suite de composition à quotients tous isomorphes à G_{ak} (SGA 3 XVII 4.1.3)

(2.1.2) $$0 \longrightarrow U_o \longrightarrow A_o{}^o/T_o \longrightarrow B_o \longrightarrow 0 \quad .$$

En tous cas, k parfait ou non, si $A_o{}^o$ est extension d'un schéma abélien B_o par un schéma affine lisse et connexe L_o :

(2.1.3) $$0 \longrightarrow L_o \longrightarrow A_o{}^o \longrightarrow B_o \longrightarrow 0 \quad ,$$

on sait que cette structure d'extension est unique [25], et que T_o est alors $\subset L_o$, donc T_o est le plus grand sous-tore de L_o, de sorte qu'on a une suite exacte (2.1.2), avec

(2.1.4) $$U_o = L_o/T_o \quad .$$

2.1.5. Signalons que $A_o{}^o$ est de rang unipotent nul (i.e. que, sur une clôture algébrique de k, il n'admet aucun sous-groupe isomorphe à G_a) si et seulement si $A_o{}^o/T_o$ est un schéma abélien B_o, de sorte qu'on sera alors sous les conditions précédentes, avec $U_o = 0$.

Si ℓ est un nombre premier distinct de la caractéristique de k, de sorte que $A_o{}^o$ est ℓ-divisible, l'inclusion (2.1.1) donne lieu à une suite exacte de pro-schémas en groupes :

(2.1.6) $$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow T_\ell(T_o) & \longrightarrow & T_\ell(A_o{}^o) & \longrightarrow & T_\ell(A_o{}^o/T_o) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\ & & T_\ell(A_o) & & T_\ell(A_o/T_o) & & , \end{array}$$

dont les termes peuvent aussi s'interpréter comme des faisceaux ℓ-adiques libres constants tordus ; lorsque l'on dispose d'une suite exacte (2.1.2), par exemple k parfait ou $A_o{}^o$ de rang unipotent nul, on aura

(2.1.7) $$T_\ell(A_o{}^o/T_o) \xrightarrow{\sim} T_\ell(B_o) \quad ,$$

de sorte que la suite exacte (2.1.5) s'écrit alors

(2.1.8) $$0 \longrightarrow T_\ell(T_o) \longrightarrow T_\ell(A_o^{\,o}) \longrightarrow T_\ell(B_o) \longrightarrow 0 \quad .$$

Posons

(2.1.9) $$n = \dim A_K = \dim A_o \ , \ \mu = \dim T_o \ , \ \lambda = \dim U_o \ , \ \alpha = \dim B_o \ ,$$

de sorte qu'on a

(2.1.10) $$n = \mu + \lambda + \alpha \quad ,$$

(2.1.11) $$\begin{cases} \text{rang } T_\ell(T_o) = \mu \ , \ \text{rang } T_\ell(A_o^{\,o}/T_o) = \text{rang } T_\ell(B_o) = 2\alpha \quad , \\ \qquad \text{rang } T_\ell(A_o^{\,o}) = \mu + 2\alpha \quad , \end{cases}$$

La deuxième relation étant un théorème bien connu de Weil [5] [15].

2.1.12. Les entiers n, μ, λ, α sont définis manifestement sans même supposer qu'on dispose d'une suite exacte (2.1.2), en passant à une clôture algébrique de k ; ils sont connus respectivement sous le nom de dimension de A_o, rang réductif de A_o = dimension de T_o , rang unipotent de A_o, rang abélien de A_o . Il sont encore reliés par les relations (2.1.10) et (2.1.11) (en omettant dans ces dernières le terme rang $T_\ell(B_o)$...).

2.1.13. Lorsque k est de caractéristique $p > 0$, et que $A_o^{\,o}$ est p-divisible, ou ce qui revient au même, de rang unipotent nul (cf. 2.1.5), alors il y a lieu également de considérer le pro-groupe $T_p(A_o^{\,o})$, qui sera un groupe de Barsotti-Tate (ou groupe p-divisible dans la terminologie de [33]). Alors la suite exacte (2.1.8) reste valable pour ℓ=p et c'est une suite exacte de groupes de Barsotti-Tate. Ici on aura $\lambda = 0$, donc

(2.1.13.1) $$n = \mu + \alpha \quad ,$$

et les formules (2.1.11) restent valables, en y interprétant le rang comme le rang (ou "hauteur") des groupes-de Barsotti-Tate envisagés.

2.1.14. On introduit également pour $A_o'^o$ des invariants

$$T_o' \subset A_o'^o \quad , \quad U_o' \quad , \quad B_o' \quad ,$$

où T_o' est la partie torique de $A_o'^o$, B_o' sa partie abélienne (définie notamment si k est parfait ou si $A_o'^o$ est de rang unipotent nul), U_o' sa partie unipotente (définie par exemple si k est parfait, ou, trivialement si $A_o'^o$ est de rang unipotent nul). On trouve une suite exacte correspondant à (2.1.6) ou (2.1.8), que nous ne réécrirons pas. On pourrait introduire pour $A_o'^o$ des entiers μ', λ', α' comme dans (2.1.9), mais on verra plus bas (2.2.7) que ce sont les mêmes que pour $A_o{}^o$, ce qui nous dispense d'introduire une nouvelle notation pour eux.

er

2.2. Nous nous proposons de préciser les relations entre $T_\ell(A_K)$ et $T_\ell(A_o) = T_\ell(A_o{}^o)$, en faisant intervenir $T_\ell(A^o)$. Rappelons d'abord :

<u>Lemme</u> 2.2.1. <u>Soit</u> $m > 0$ <u>un entier</u>. <u>Alors les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $m\, id_{A^o}$ <u>est plat</u>.

(ii) $m\, id_{A^o}$ <u>est surjectif</u>.

(iii) $m\, id_{A^o}$ <u>est quasi-fini</u>.

(iv) m <u>est premier à la caractéristique de</u> k, ou $A_o{}^o$ <u>est de rang unipotent nul</u> (cf. 1.5.5).

<u>De plus, si les conditions envisagées sont vérifiées pour</u> m, <u>elles le sont pour</u> m^ν <u>pour tout</u> $\nu > 0$, <u>les groupes</u>

$$ {}_{m^\nu}A^o \overset{\mathrm{dfn}}{=} \mathrm{Ker}\,(m^\nu \, \mathrm{id}_{A^o}) $$

sont quasi-finis, séparés et plats sur S, et ils forment pour ν variable un système projectif de schémas en groupes, à --- morphismes de transition fidèlement plats $x \longmapsto m^{\nu'-\nu}x : {}_{m^{\nu'}}A^o \longrightarrow {}_{m^\nu}A^o$.

En effet, le critère de platitude par fibres (EGA IV 11.3.5) nous montre que (i) tout comme (ii), (iii) sont des conditions sur les fibres, et elles sont équivalentes par (SGA 3 VI_A 5.6), parce que les fibres envisagées sont lisses et connexes. D'ailleurs on voit sur la forme (ii) et par un théorème classique de Weil [5] [15] qu'elles sont vérifiées sur la fibre générique, qui est un schéma abélien, il suffit donc de l'exprimer sur la fibre spéciale. L'équivalence avec (iv) est alors également bien connue, grâce à la théorie de structure. Sous n'importe quelle forme, la stabilité de la condition envisagée par $m \longmapsto m^\nu$ est triviale, d'où le fait que ces conditions impliquent que les ${}_{m^\nu}A^o$ sont des schémas en groupes plats quasi-finis sur S, évidemment séparés sur S puisque A^o l'est. La dernière assertion sur la fidèle platitude des morphismes de transition envisagés, qui revient à dire que ce sont des épimorphismes pour la topologie fppf, résulte formellement du fait que $m \, \mathrm{id}_{A^o}$ est fidèlement plat, donc un épimorphisme pour la topologie envisagée.

2.2.2. Par suite, nous prendrons pour m un nombre premier ℓ satisfaisant les conditions de 2.2.1. On désigne alors par

(2.2.2.1) $$ T_\ell(A^o) = ({}_{\ell^\nu}A^o)_{\nu > 0} $$

le système projectif décrit dans 2.2.1. On notera que par les deux changements de base $\eta \longrightarrow S$ et $s \longrightarrow S$, il redonne les systèmes projectifs $T_\ell(A_K)$ et $T_\ell(A_o{}^o) = T_\ell(A_o)$ envisagés dans 1.0 et 2.1 respectivement.

2.2.3. Supposons maintenant S hensélien. On sait alors que tout schéma quasi-fini et séparé X sur S se décompose canoniquement en une somme

$$X = X^f \amalg X' \quad , \tag{2.2.3.1}$$

où X^f est fini sur S, et où $X'_o = \emptyset$ i.e. X' est réduit à sa fibre générique X'_η ; donc X^f a même fibre spéciale que X. Cette décomposition est évidemment fonctorielle en X. On en conclut en particulier que si X est un schéma en groupes sur S, alors X^f en est un sous-schéma en groupes. Si X est plat resp. étale sur S, il en est évidemment de même de X^f.

Nous appliquerons ceci aux composants ${}_{\ell^\nu}A^o$ de $T_\ell(A^o)$, d'où un sous-système projectif de groupes

$$(({}_{\ell^\nu}A^o)^f)_{\nu > 0} \overset{\mathrm{dfn}}{=} T_\ell(A^o)^f \subset T_\ell(A^o) \quad , \tag{2.2.3.2}$$

qu'on appelera la partie fixe du module de Tate $T_\ell(A^o)$. On a évidemment, par construction, des isomorphismes canoniques, fonctoriels en A :

$$T_\ell(A^o)^f \times_S s \simeq T_\ell(A^o) \times_S s \simeq T_\ell(A_o{}^o) \quad . \tag{2.2.3.3}$$

D'autre part, la fibre générique de $T_\ell(A^o)^f$ définit un sous-pro-groupe canonique de $T_\ell(A_K)$, appelée encore "partie fixe" de ce module de Tate, soit

$$T_\ell(A_K)^f \subset T_\ell(A_K) \quad . \tag{2.2.3.4}$$

2.2.4. Lorsque $\ell \neq p = \mathrm{car}.k$, alors $T_\ell(A^o)^f$ s'interprète comme un faisceau ℓ-adique constant tordu sur S (les ${}_{\ell^\nu}A^o$ étant finis étales sur S). Comme le foncteur

$$X \longmapsto X_o = X \times_S s$$

de la catégorie des schémas finis étales sur S dans celle des schémas finis étales sur k est une équivalence de catégories, S étant hensélien, et qu'on a donc une équivalence analogue pour les catégories de faisceaux ℓ-adiques constants tordus sur S resp. sur k, la relation (2.2.3.3) donnant la fibre spéciale de $T_\ell(A^o)^f$ caractérise donc cette partie fixe à isomorphisme unique près. D'autre part, en tant que sous-faisceau ℓ-adique de $T_\ell(A^o)$, elle est évidemment caractérisée par sa fibre générique (2.2.3.4), ou ce qui revient au même, par le sous $\mathbb{Z}_\ell$-module correspondant, stable par $\pi = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$:

(2.2.4.1) $$T_\ell(A_K)^f(\overline{K}) \overset{\mathrm{dfn}}{=} T_\ell(A(\overline{K}))^f \subset T_\ell(A(\overline{K})) \quad .$$

En fait, on a le résultat suivant :

__Proposition__ 2.2.5. __Supposons comme ci-dessus__ $\ell \neq p$, __et__ S __hensélien. Alors le sous-module__ (2.2.4.1) __de__ $T_\ell(A(\overline{K})) = T_\ell(A_K)(\overline{K})$ __correspondant à la partie fixe__ $T_\ell(A_K)^f$ (2.2.3.4) __de__ $T_\ell(A_K)$ __est le sous-module__ $T_\ell(A(\overline{K}))^I$ __des invariants sous le groupe d'inertie__ $I \subset \pi$.

Ceci résultera, par passage à la limite projective, de la relation analogue, valable pour tout entier $m > 0$ premier à $p = \mathrm{car}.k$:

(2.2.5.1) $$({}_mA)^f(\overline{K}) = ({}_mA(\overline{K}))^I \quad .$$

Pour prouver cette relation, introduisons le localisé strict $\widetilde{S}$ de S, de corps des fractions $\widetilde{K}$ la sous-extension non ramifiée maximale de $\overline{K}$ sur K. Comme $({}_mA)^f$ est fini étale sur S, ses points à valeurs dans $\overline{K}$ sont déjà à valeurs dans $\widetilde{K}$, donc le premier membre de (2.2.5.1) n'est autre que $\mathrm{Hom}_S(\widetilde{S}\ ,\ ({}_mA)^f)$, tandis que le deuxième est, par définition de $\widetilde{K}$, égal à ${}_mA(\widetilde{K})$. Or le premier membre, par définition de $({}_mA)^f$, compte tenu que $\widetilde{S}$ est une limite projective de schémas S_i étales finis sur S, est aussi égal à $\mathrm{Hom}_S(\widetilde{S}\ ,\ {}_mA) = {}_m\mathrm{Hom}_S(\widetilde{S},A)$, et par définition du modèle de Néron on a $\mathrm{Hom}_S(\widetilde{S},A) = A(\widetilde{K})$, ce qui donne bien l'égalité annoncée (6.2.5.1).

Pour en déduire 2.2.5, on note qu'on déduit de (2.2.5.1) que

$$(*) \qquad T_\ell(A(\overline{K}))^I = \varprojlim_\nu ({}_{\ell^\nu}A)^f(\overline{K}) \supset \lim\ ({}_{\ell^\nu}A^o)^f(\overline{K}) \qquad ;$$

mais si (x_ν) est un élément du deuxième membre, alors pour tout entier $\nu \geq 0$, x_ν est une section de A qui est infiniment divisible par ℓ, donc sa valeur en s est un élément de $A_o(k)$ infiniment divisible par ℓ, donc il est dans $A_o{}^o(k)$, ce qui prouve l'égalité des deux derniers membres de (*) et achève de prouver 2.2.5.

<u>Proposition</u> 2.2.6. <u>Soient</u> C_K <u>un deuxième schéma abélien sur</u> K, <u>de modèle de Néron</u> C, <u>et considérons un homomorphisme</u> $u_K : C_K \longrightarrow A_K$, <u>se prolongeant donc en un homomorphisme</u> $u : C \longrightarrow A$. <u>Supposons que</u> u_K <u>soit une</u> isogénie. <u>Alors pour tout nombre premier</u> ℓ, $T_\ell(u_K) : T_\ell(C_K) \longrightarrow T_\ell(A_K)$ <u>induit une isogénie des parties fixes</u>

$$(2.2.6.1) \qquad T_\ell(C_K)^f \longrightarrow T_\ell(A_K)^f \quad ,$$

et de même le morphisme induit par $u_o : C_o \longrightarrow A_o$

$$(2.2.6.2) \qquad T_\ell(u_o{}^o) : T_\ell(C_o{}^o) \longrightarrow T_\ell(A_o{}^o)$$

est une isogénie. Enfin, $u_o : C_o \longrightarrow A_o$ induit une isogénie du plus grand sous-tore de C_o dans le plus grand sous-tore T_o de A_o, et au-dessus d'une extension k' de k sur laquelle les "parties abéliennes" de C_o et de A_o sont définies (par exemple sur la clôture parfaite de k), u_o induit une isogénie entre les parties abéliennes de $C_{ok'}$ et de $A_{ok'}$.

Cet énoncé est conséquence formelle du fait que $T_\ell(A_K)^f$, $T_\ell(A_o{}^o)$, le plus grand sous-tore de A_o, enfin la "partie abélienne" de $A_{ok'}$, sont pour A_K variable des foncteurs additifs en A_K, et que le fait que u_K soit une isogénie s'exprime par la condition qu'il existe un morphisme $v_K : A_K \longrightarrow C_K$ tel que l'on ait $u_K v_K = n.\mathrm{id}$, $v_K u_K = n.\mathrm{id}$, avec n un entier > 0.

Notons en particulier :

Corollaire 2.2.7. Si A_K et C_K sont des schémas abéliens isogénes sur K, alors les invariants correspondants μ, λ, α (2.1.11) sont les mêmes pour A_K et pour C_K. En particulier, ils sont les mêmes pour A_K et son dual A'_K.

Remarques 2.2.8. Dans les deux énoncés précédents 2.2.6 et 2.2.7, on a supposé S hensélien. Il est d'autre part immédiat que 2.2.7, ainsi que les assertions de 2.2.6 concernant les propriétés de l'homomorphisme induit $u_o : C_o \longrightarrow A_o$, sont valables sans cette hypothèse. On se ramène en effet au cas traité par le changement de base $S^h \longrightarrow S$, où S^h est le hensélisé de S, compte tenu du fait (immédiat en vertu des définitions) que la formation des modèles de Néron commute à ce changement de base.

Corollaire 2.2.9. (Cas de bonne réduction.) Soient S un trait, A_K un schéma abélien sur le corps des fractions K de S, A le modèle de Néron de A_K, ℓ un nombre premier $\neq$ car.k . Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe un schéma abélien sur S dont la fibre générique est isomorphe à A_K .

(ii) A est un schéma abélien.

(ii^o) A^o est un schéma abélien.

(iii) A_o est un schéma abélien.

(iii^o) $A_o^{\ o}$ est un schéma abélien, i.e. (avec les notations de (2.1.11) on a $\lambda = \mu = 0$.

(iv) A est propre sur S.

(iv^o) A^o est propre sur S.

(v) $T_\ell(A_K)$ est "non ramifié sur S" i.e. se prolonge en un faisceau ℓ-adique constant tordu sur S, i.e. le groupe d'inertie I opère trivialement sur $T_\ell(A_K(\overline{K}))$.

(v bis) Pour tout entier $\nu \geq 0$, ${}_{\ell^\nu}A_K$ est "non ramifié sur S" i.e. se prolonge en un revêtement étale sur S, i.e. le groupe d'inertie I opère trivialement sur ${}_{\ell^\nu}A_K(\overline{K})$.

Enfin, un schéma abélien sur S comme dans (i) est un modèle de Néron de A_K , et en particulier est déterminé à isomorphisme unique près.

2.2.9.1. On dit que A_K a bonne réduction sur S s'il satisfait la condition (i) ci-dessus. Le critère (v) ou (v bis) est connu sous le nom de critère de NERON-OGG-CHAFAREVITCH de bonne réduction.

Prouvons 2.2.9. Le fait qu'un schéma abélien sur S satisfait à la propriété universelle d'un modèle de Néron, qui se réduit au fait qu'une section rationnelle d'un schéma abélien sur une base régulière est partout définie, est bien connu (cf. p.ex. [5]). Cela prouve l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (ii^{o}), ainsi que la dernière assertion de 2.2.9. Les conditions envisagées impliquent évidemment (iii), (iv) (iv^{o}), qui impliquent chacune (iii^{o}), prouvons que (iii^{o}) $\Longrightarrow$ (ii^{o}) (ce qui prouvera l'équivalence des conditions (i) à (iv^{o})). Or cela résulte du fait qu'un schéma en groupes lisse sur un schéma S, à fibres des schémas abéliens, est propre sur S (donc est un schéma abélien) en vertu de (EGA IV 15.7.10). D'autre part, compte tenu de 2.2.5 et du fait que $T_{\ell}(A_K(\overline{K}))/T_{\ell}(A_K(\overline{K}))^I$ est manifestement un $\mathbb{Z}_{\ell}$-module sans torsion, la condition (v) s'exprime par l'égalité des rangs de $T_{\ell}(A_K(\overline{K}))$ et de sa "partie fixe", i.e. (par (2.1.11) et (2.2.3.3)) par la condition

$$\mu + 2\alpha = 2(\lambda + \mu + \alpha) \qquad ,$$

i.e. $2\lambda + \mu = 0$, i.e. $\lambda = \mu = 0$, qui n'est autre que (iii^{o}). Enfin l'équivalence de (v) et (v bis) est claire par définition. Cela achève la démonstration de 2.2.9.

2.3. Nous supposons à nouveau S hensélien, et $\ell \neq p = \text{car. } k$. Utilisons maintenant l'inclusion

(2.3.1) $$T_{\ell}(T_o) \hookrightarrow T_{\ell}(A_o{}^{o})$$

de (2.1.6), et l'équivalence de catégories rappelée dans 2.2.4. On trouve un sous-faisceau ℓ-adique constant tordu canonique de $T_{\ell}(A^{o})^{f}$, appelée la <u>partie torique de</u> $T_\ell(A^{o})$,

(2.3.2) $$T_\ell(A^o)^t \hookrightarrow T_\ell(A^o)^f \hookrightarrow T_\ell(A^o) \quad ,$$

caractérisé par la condition que sa fibre spéciale soit donnée par l'inclusion (2.3.1) :

(2.3.3) $$T_\ell(A^o)^t \times_S s = T_\ell(T_o) \hookrightarrow T_\ell(A_o{}^o) \quad .$$

Nous donnerons d'ailleurs plus loin une interprétation de la partie torique de $T_\ell(A^o)$ comme le module de Tate $T_\ell(T)$ d'un tore T sur S qui relève le tore T_o sur k, interprétation qui permettra d'étendre la définition de la partie torique au cas $\ell = p$. Pour l'instant, et pour fixer les idées, nous nous bornons à examiner le cas $\ell \neq p$, auquel cas la partie torique de $T_\ell(A^o)$ peut donc se décrire par le sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module correspondant de $T_\ell(A(\overline{K}))$:

(2.3.4) $$T_\ell(A(\overline{K}))^t \hookrightarrow T_\ell(A(\overline{K}))^f \hookrightarrow T_\ell(A(\overline{K})) \quad ,$$

stable par l'action de π, où le premier terme est défini comme $T_\ell(A^o)^t(\overline{K})$, et est appelé encore comme de juste le <u>sous-module torique</u> du module de Tate $T_\ell(A(\overline{K}))$. Ce dernier apparaît donc comme muni d'une filtration canonique à trois crans (2.3.4). Appliquant ces réflexions au schéma abélien dual A'_K , on trouve de même une filtration à trois crans

(2.3.5) $$T_\ell(A'(\overline{K}))^t \hookrightarrow T_\ell(A'(\overline{K}))^f \hookrightarrow T_\ell(A'(\overline{K})) \quad .$$

Les termes médians dans (2.3.4) et (2.3.5) ("parties fixes")étant décrits en termes des structures de π-modules des modules de Tate de $A(\overline{K})$, $(A'(\overline{K})$ comme les modules d'invariants sous le groupe d'inertie I (1.6.5), les parties toriques sont complètement décrites en termes des parties fixes et de l'accouplement φ de (1.0.2), grace au théorème suivant (dont un cas particulier se trouve déjà dans [11]).

Thoérème 2.4. (Théorème d'orthogonalité). Soient S un trait hensélien, A_K un schéma abélien sur son corps des fractions K, A'_K le schéma abélien dual, ℓ un nombre premier distinct de la caractéristique résiduelle de S, d'où sur les modules de Tate $T_\ell(A(\overline{K}))$ et $T_\ell(A'(\overline{K}))$ la filtration canonique (2.3.4) resp. (2.3.5) par la "partie fixe" et par la "partie torique". Alors la partie torique $T_\ell(A(\overline{K}))^t$ est l'intersection de la partie fixe $T_\ell(A(\overline{K}))^f$ avec l'orthogonal de la partie fixe $T_\ell(A'(\overline{K}))^f = T_\ell(A'(\overline{K}))^I$ pour l'accouplement canonique φ (1.0.3), donc symétriquement, la partie torique $T_\ell(A'(\overline{K}))^t$ est l'intersection de $T_\ell(A'(\overline{K}))^f$ avec l'orthogonal de la partie fixe $T_\ell(A(\overline{K}))^f = T_\ell(A(\overline{K}))^I$. (NB l'exposant I dénote le sous-module des invariants sous l'action du groupe d'inertie I.)

Démonstration a) Prouvons que $T_\ell(A(\overline{K}))^t$ est orthogonal à $T_\ell(A'(\overline{K}))^f$. Pour ceci, nous allons interpréter la restriction de la forme φ aux parties fixes des modules de Tate, à l'aide de la biextension canonique $W^o = W$ de (1.4.4), prolongement canonique de la biextension W_K de (A_K, A'_K) par $\mathbb{G}_{mK}$ en une biextension de (A^o, A'^o) par $\mathbb{G}_{mS}$. En vertu de VIII 2.2, à W est associé un accouplement

$$\varphi_W : T_\ell(A^o) \times T_\ell(A'^o) \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mS}) \quad , \tag{2.4.1}$$

dont l'accouplement φ de (1.0.3) est déduit en passant aux points à valeurs dans $\overline{K}$. Il en résulte que la restriction de φ aux parties fixes envisagées dans 2.4 s'obtient à partir de l'accouplement

$$T_\ell(A^o)^f \times T_\ell(A'^o)^f \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mS}) \tag{2.4.2}$$

restriction de (2.4.1), en passant aux points à valeurs dans $\overline{K}$. Comme les deux termes qui interviennent dans le premier membre de (2.4.2) sont maintenant des faisceaux ℓ-adiques constants tordus, pour étudier ce dernier accouplement, on peut se borner à étudier l'accouplement induit sur les fibres spéciales. Or les fibres des deux termes envisagés ne sont autres que les modules de Tate $T_\ell(A_o^{\,o}), T_\ell(A'^{\,o}_o)$ (2.2.3.3), et l'accouplement déduit de (2.4.2) par passage aux fibres spéciales n'est autre que l'accouplement

(2.4.3) $$T_\ell(A_o^{\,o}) \times T_\ell(A'^{\,o}_o) \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mk})$$

déduit de la biextension W_o de $(A_o^{\,o}, A'^{\,o}_o)$ par $\mathbb{G}_{mk}$, restriction de W aux fibres spéciales.

Rappelons maintenant (2.3) que la partie torique de $T_\ell(A(\overline{K}))$ s'obtient en passant aux points à valeurs dans $\overline{K}$ dans le sous-faisceau ℓ-adique constant tordu $T_\ell(A^o)^t$ de $T_\ell(A^o)^f$, donc la relation d'orthogonalité à prouver s'exprime en disant que l'accouplement induit par (2.4.2)

(2.4.4) $$T_\ell(A^o)^t \times T_\ell(A'^o)^f \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mS})$$

est identiquement nul. Or il suffit de le voir pour l'accouplement correspondant sur les fibres spéciales, qui par la définition de la partie torique n'est autre que l'accouplement

(2.4.5) $$T_\ell(T_o) \times T_\ell(A_o^{\,o}) \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mk})$$

induit par (2.4.3). Or en vertu de VIII 4.10 cet accouplement est nécessairement nul, ce qui prouve l'orthogonalité annoncée.

b) Prouvons que l'inclusion

$$T_\ell(A(\overline{K}))^t \subset T_\ell(A(\overline{K}))^f \cap (T_\ell(A'(\overline{K}))^f)^\perp \tag{2.4.6}$$

est une égalité, où le signe $\perp$ désigne l'orthogonal. Il revient au même de dire que dans l'accouplement (2.4.2), l'annulateur du deuxième facteur, qui contient la partie torique $T_\ell(A^o)^t$ comme on vient de voir, est <u>égale</u> à cette dernière. Comme il s'agit encore de relations entre faisceaux ℓ-adiques constants tordus, il suffit de vérifier cette assertion sur les fibres spéciales, i.e. que l'inclusion déjà obtenue (1.10)

$$T_\ell(T_o) \subset T_\ell(A'^o_o)^\perp \tag{2.4.7}$$

est une égalité ; en d'autres termes, il faut vérifier que la biextension W_o de (A_o^o, A'^o_o) est <u>non dégénérée à gauche</u> (VIII 4.11). Or c'est ce que nous avons déjà noté dans 1.5, comme conséquence d'un résultat de la thèse de RAYNAUD.

2.5. On peut donner une forme équivalente au théorème d'orthogonalité, en utilisant une polarisation ξ de A_K , et la forme bilinéaire alternée (1.0.8), compatible aux opérations de π ,

$$\varphi_\xi : T_\ell(A(\overline{K})) \times T_\ell(A(\overline{K})) \longrightarrow T_\ell(\overline{K}^*) \quad , \tag{2.5.1}$$

déduite de la forme φ (1.0.3) par transport de structure sur le deuxième argument à l'aide de l'isogénie de $\mathbb{Z}_\ell$-modules

$$T_\ell(A(\overline{K})) \longrightarrow T_\ell(A'(\overline{K}))$$

induite par l'isogénie $\psi_\xi : A_K \longrightarrow A'_K$ définie par ξ . L'égalité dans (2.4.6) prend alors la forme simple

(2.5.2) $$W = V \cap V^{\perp} ,$$

où on a posé

(2.5.3) $$\begin{cases} U = T_{\ell}(A(\overline{K})) \quad , \quad V = U^{I} = \text{"partie fixe" de } T_{\ell}(A(\overline{K})) \\ W = \text{partie torique de } T_{\ell}(A(\overline{K})) \quad , \end{cases}$$

et où $\perp$ désigne l'orthogonal par rapport à la forme de polarisation (2.5.1). Les modules précédents donnent alors lieu au diagramme d'inclusions

(2.5.4) $$\begin{tikzcd} & & V \arrow[dl, hook, "2\lambda"'] & & \\ U & W^{\perp} = V + V^{\perp} \arrow[l, hook, "\mu"'] & & W=V\cap V^{\perp} \arrow[ul, hook, "2\alpha"'] \arrow[dl, hook, "2\lambda"] & 0 \arrow[l, hook, "\mu"'] \\ & & V^{\perp} \arrow[ul, hook, "2\alpha"] & & \end{tikzcd} ,$$

où les entiers 2α, 2λ, μ désignent les rangs du quotients de deux modules consécutifs dans le diagramme, les notations étant celles de (2.1.9). (Le fait que W soit de rang μ est la définition de μ, que V/W soit de rang 2α est la deuxième relation (2.1.11) jointe à la suite exacte (2.1.6), d'où par orthogonalité rang $U/W^{\perp} = \mu$ et rang $W^{\perp}/V^{\perp} = 2\alpha$; enfin les formules

(2.5.5) $$\text{rang } V/V \cap V^{\perp} = \text{rang } V/W = 2\lambda \quad ,$$

et la formule duale, résultent des précédentes, compte tenu de (2.1.10) et de rang $U = n$.)

<u>Remarques</u> 2.6. a) Nous avons obtenu ici le théorème d'orthogonalité 2.4 comme conséquence facile de la théorie des biextensions développée dans les numéros précédents. On peut démontrer l'<u>inclusion</u> (2.4.6) sans utiliser la théorie des biextensions, par un argument arithmétique dans

le style de la démonstration du "théorème de monodromie" donnée dans I, en se ramenant à une situation où S est de corps résiduel fini, et où le résultat d'orthogonalité résulte d'une simple considération de poids pour l'opération de frobenius (utilisant le résultat de A. WEIL sur les valeurs propres dudit frobenius). (Il est inutile d'invoquer ici la résolution des singularités, en énonçant le résultat voulu pour des schémas en groupes A sur des schémas S, sous des conditions suffisamment générales.) Il ne semble pas malheureusement qu'on puisse obtenir par cette méthode l'égalité dans l'inclusion précédente, qui sera utilisée, de façon essentielle semble-t-il, dans la démonstration du "théorème de réduction semi-stable" au n° suivant.

b) Le théorème d'orthogonalité 2.4 permet d'expliciter les propriétés les plus importantes du modèle de Néron d'une variété abélienne A_K en termes de la représentation du groupe d'inertie I sur le module de Tate $T_\ell(A(\overline{K}))$, ℓ étant un nombre premier fixé distinct de la caractéristique résiduelle. (Le cas $\ell = p$ sera examiné à part plus loin (n° 5)). Comme premier énoncé de ce type, mais n'utilisant pas le théorème d'orthogonalité, rappelons le critère de bonne réduction 2.2.9. Nous allons donner de nombreux autres exemples par la suite, en commençant au n° suivant (3.5).

3. Cas de la réduction semi-stable. Le théorème de réduction semi-stable.

Donnons d'abord un résultat auxiliaire dans le style de SGA 3 :

Proposition 3.1. Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes commutatifs, plat, séparé, de présentation finie sur S, H un schéma en groupes quasi-séparé et localement de type fini sur S, $u: G \longrightarrow H$ un homomorphisme de S-schémas en groupes, $K = \operatorname{Ker} u$. Pour tout $s \in S$, désignant par $\bar{s}$ le spectre d'une clôture algébrique de $k(s)$, on note $\mu(s)$ (resp. $\alpha(s)$) le rang réductif (resp. le rang abélien) de $K_{\bar{s}}$, i.e. la dimension du plus grand sous-tore (resp. de la plus grande variété abélienne quotient) de $(K_{\bar{s}})^{o}_{red}$. Soient $s \in S$, $t \in S$ une générisation de S, p l'exposant caractéristique de $k(s)$.

a) Pour tout entier $n > 0$ premier à p, ${}_nK$ est étale de type fini et séparé sur S au voisinage de s, et on a la divisibilité :

$$(3.1.1) \qquad \operatorname{rang}({}_nK_s) \mid \operatorname{rang}({}_nK_t) \quad .$$

b) On a

$$(3.1.2) \qquad \mu(s) + 2\alpha(s) \leq \mu(t) + 2\alpha(t) \quad .$$

c) Si $(K_{\bar{t}})^{o}_{red}$ est unipotent, il en est de même de $(K_{\bar{s}})^{o}_{red}$.

d) Supposons G_s de rang unipotent nul, H lisse sur S, et u_t une isogénie. Alors u est plat et quasi-fini au-dessus d'un voisinage ouvert U de s, a fortiori $K|U$ est plat et quasi-fini.

e) Sous les conditions de d), si u_t est de plus un monomorphisme (donc un isomorphisme de G_t sur un sous-groupe ouvert de H_t), alors u_s est un isomorphisme de G_s sur un sous-groupe ouvert de H_s, et si de plus S est irréductible de point générique t, alors il existe un voisinage ouvert U de s tel que u induise un isomorphisme de $G|U$ sur un sous-groupe ouvert de $H|U$.

Démonstration.

a) On peut supposer que n est inversible sur S, et alors $n.\mathrm{id}_G$ est étale fibre par fibre (SGA 3 XV 1.3), donc, G étant plat de présentation finie sur S, il résulte du critère d'étalité par fibres EGA IV 17.8.2 que $n.\mathrm{id}_G$ est étale, donc son noyau ${}_nG$ est étale ; il est clair d'ailleurs qu'il est séparé et de présentation finie sur S, puisque G l'est. On voit de même que ${}_nH$ est localement de type fini, quasi-séparé et formellement net sur S (*) donc sa section unité est une immersion ouverte (EGA IV 17.4.2 b')), donc le noyau de ${}_nu : {}_nG \longrightarrow {}_nH$ est un sous-schéma ouvert de ${}_nG$, donc étale sur S, qui est retrocompact dans ${}_nG$ donc de présentation finie sur S, et séparé sur S puisque G l'est. Or ce noyau n'est évidemment autre que ${}_nK$. La formule (3.1.1) résulte des propriétés précédentes de ${}_nK$, comme on voit en se ramenant par changement de base au cas où S est local hensélien de point fermé s, et en utilisant alors la décomposition de ${}_nK$ en ${}_nK^f$ et un schéma à fibre spéciale vide (cf. 2.2.3). En fait, cet argument montre, plus précisément, qu'il existe un monomorphisme pour les fibres géométriques

$$ {}_nK(\bar{s}) \hookrightarrow {}_nK(\bar{t}) \quad . $$

(*) Du moins si H est commutatif ; dans le cas général, il restera vrai que ${}_nH$ est net sur S le long de sa section unité, ce qui suffit pour notre propos.

b) Soit $n > 0$ premier à l'exposant caractéristique de $k(s)$ et aux rangs des quotients des fibres géométriques de K en s et t par leurs composantes neutres réduites, alors les deux membres de (3.1.1) s'obtiennent en élévant n respectivement à la puissance d'exposant l'un et l'autre membre de (3.1.2), comme il résulte de la structure connue des groupes algébriques commutatifs. Donc b) résulte de a).

c) Comme l'hypothèse $(K_{\bar{t}})^{o}_{s}$ unipotent équivaut aux relations $\mu(t) = \alpha(t) = 0$, et de même pour K_s, l'assertion c) résulte formellement de b).

d) L'hypothèse que u_t soit une isogénie implique que K_t est fini, donc on est sous les conditions de c), et par suite $(K_{\bar{s}})^{o}_{red}$ est unipotent. Comme G_s est de rang unipotent nul, on en déduit que K_s est fini. D'ailleurs le fait que u_t est une isogénie implique $\dim G_t = \dim H_t$, et le fait que G et H sont plats localement de présentation finie implique $\dim G_s = \dim G_t$, $\dim H_s = \dim H_t$ (SGA 3 VI_B 4.3), d'où $\dim G_s = \dim H_s$. Comme $\dim \operatorname{Ker} u_s = 0$, on en conclut que $\dim H_s = \dim u_s(G_s)$ (SGA 3 VI_B 1.2.), ce qui équivaut à u_s plat grâce à l'hypothèse H_s lisse (SGA 3 VI_A 5.6). On en conclut qu'il existe un voisinage ouvert U de s tel que u soit plat et quasi-fini en les points de la section unité sur U (SGA 3 VI_B 2.2 (i) et 2.5 (ii)). Il en résulte, comme pour u_s, que $u_{s'}$ est plat pour tout $s' \in U$, donc $u|G_U$ est plat et quasi-fini, l'étant sur chaque fibre.

e) Pour la premier assertion, on se ramène aussitôt par changement de base au cas où S est intègre de point générique t, donc à prouver la deuxième assertion de e). Celle-ci résulte aussitôt de d) et du

<u>Lemme</u> 3.1.3. <u>Soient</u> S <u>un schéma</u>, K <u>un</u> S-<u>schéma quasi-fini</u>, <u>de présentation finie</u>, <u>séparé et plat sur</u> S, $s \in S$, $t \in T$ <u>une générisation de</u> s. <u>Alors on a</u>

$$\operatorname{rang} K_s \leq \operatorname{rang} K_t \quad .$$

<u>Si rang</u> $K_\eta \leq 1$ <u>pour tout point maximal de</u> S, <u>alors</u> $K \longrightarrow S$ <u>est une immersion ouverte</u> (<u>donc un isomorphisme s'il admet une section</u>).

Pour la première assertion, on se ramène par localisation stricte au cas où S est strictement local. Décomposant alors K en somme d'un schéma fini K^f et d'un schéma à fibre spéciale vide, on aura

$$\operatorname{rang} K_s = \operatorname{rang} K_s^f = \operatorname{rang} K_t^f \leq \operatorname{rang} K_t \quad ,$$

la deuxième égalité provenant du fait que K^f est plat, fini et de présentation finie sur S, donc localement libre sur S.

Pour la deuxième assertion, ce qui précède montre déjà que pour tout $s \in S$ on a $\operatorname{rang} K_s \leq 1$, donc K_s est vide ou isomorphe à $\operatorname{Spec} k(s)$. Par suite $K \longrightarrow S$ est un monomorphisme (SGA 3 VI_B 2.11), et étant plat et de présentation finie c'est une immersion ouverte (EGA IV 17.9.1), ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u> 3.1.4. Dans 3.1 a) et la suite de la proposition 3.1, on ne donne aucun renseignement sur ${}_nK_s$ lorsque n est une puissance de p (lorsque $p > 1$). Lorsque G est lisse (et S localement noethérien ou H de présentation finie sur S) tout au moins, on peut donner un tel renseignement, par essentiellement la même méthode que dans la

démonstration de a) (en se ramenant au cas S local noethérien complet, et utilisant SGA 3 XV 1.6 c), X 3.2, IX 3.6, IX 5.2), savoir :

(3.1.4.1) $$\text{rang mult}\,({}_nK_s) \mid \text{rang mult}({}_nK_t) \quad ,$$

où rang mult désigne le rang du plus grand sous-groupe de type multiplicatif du groupe algébrique commutatif envisagé (SGA 3 XVII 7.2.1) ; on notera qu'un groupe algébrique de type multiplicatif de torsion est fini. La formule (3.1.4.1) est valable pour tout entier $n \geq 1$. On conclut, grâce à SGA XVII 4.6.1 (vi), que dans c), si K_t est unipotent (SGA 3 VII 1.1, il en est de même de K_s.

Proposition 3.2. *Soient* S *un schéma localement noethérien régulier intègre de dimension* 1, K *son corps des fonctions rationnelles*, A_K *un schéma abélien sur* K, A *son modèle de Néron sur* S, *qui est un schéma en groupes lisse et séparé sur* S *(et quasi-projectif sur* S *si* S *est noethérien* [23 , VIII 2, 3°]). *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Pour tout* $s \in S$, A_s^o *est de rang unipotent nul*, *i.e.* (2.1.5) *est une extension d'un schéma abélien par un tore*.

(ii) *Il existe un schéma en groupes* G *lisse, séparé de type fini sur* S, *prolongeant* A_K, *et dont les fibres sont de rang unipotent nul*.

De plus, si G *est comme dans* (ii), *alors l'unique morphisme* $G \longrightarrow A$ *induisant l'isomorphisme donné sur les fibres génériques est un isomorphisme de* G *sur un sous-groupe ouvert de* A, *donc induit un isomorphisme des composantes neutres* $G^o \xrightarrow{\sim} A^o$.

3.2.1. Notons tout de suite que la définition du modèle de Néron A de A_K est la même que dans le cas local, rappelée dans 1.1. L'existence de ce modèle de Néron, et le fait qu'il est séparé de type fini sur S, est bien connue, et se ramène en fait immédiatement au cas local. Bien entendu, pour tout point fermé $s \in S$, $S' = \mathrm{Spec}(\underline{O}_{S,s})$ est un trait, et $A\times_S S'$ n'est autre que le modèle de Néron de A_K sur S', dans le sens envisagé dans 1.1.

Démontrons 3.2. Il est trivial que i) implique ii), car il suffit de prendre $G = A$. Il reste donc à prouver que si G est comme dans (ii), alors $G \longrightarrow A$ est une immersion ouverte. Or c'est en effet un cas particulier de 3.1 e).

Corollaire 3.3. Avec les notations de 3.2, supposons les composantes neutres des fibres du modèle de Néron de rang unipotent nul. Soit S' un schéma satisfaisant aux mêmes hypothèses que S, K' son corps des fonctions rationnelles, $f: S' \longrightarrow S$ un morphisme dominant, $A_{K'} \simeq A_K\otimes_K K' \simeq$ fibre générique de $A\times_S S'$, A' le modèle de Néron de $A_{K'}$, et considérons le morphisme unique

$$u : A\times_S S' \longrightarrow A'$$

induisant l'identité sur les fibres génériques. Alors u est une immersion ouverte, et induit donc un isomorphisme sur les composantes neutres

$$A^o\times_S S' \xrightarrow{\sim} A'^o \quad . \tag{3.3.1}$$

Il suffit en effet d'appliquer 3.2 dans le cas de S', en prenant $G \simeq A\times_S S'$.

3.3.2. On voit donc que les propriétés équivalentes de 3.2 impliquent une propriété de "stabilité" partielle pour les modèles de Néron ; on fera attention que lorsque A_K n'a pas bonne réduction i.e. que A n'est pas un schéma abélien, il n'est pas vrai que pour tout S' comme dans 3.3 (et même pour S' fini sur S, et K'/K séparable ...), le morphisme $A\times_S S' \longrightarrow A'$ lui-même soit un isomorphisme, i.e. induise des isomorphismes sur les groupes de composantes connexes des fibres (cf. 11.10 plus bas pour le comportement de ces groupes de composantes connexes par extension de la base). Ces observations, renforcées par 3.9 plus bas, justifient la terminologie suivante, introduite par MUMFORD (et qui s'harmonise aussi, paraît-il, avec les notions de même nom étudiées dans son livre [17]):

Définition 3.4. Les notations étant celles de 3.2, on dit que le schéma abélien A_K sur K a réduction semi-stable sur S si les conditions équivalentes (i) et (ii) de 3.2 sont vérifiées.

3.4.0. On notera que sous la forme (ii), cette condition ne fait pas appel à la notion de modèle de Néron. D'autre part, elle se ramène immédiatement par localisation au cas où S est un trait, comme il résulte par exemple de 3.2.1. D'ailleurs, comme la formation du modèle de Néron commute au changement de base de S vers son hensélisé, ou son hensélisé strict, la notion se ramène même au cas S où S est un trait strictement local.

Proposition 3.5. (*critère galoisien de réduction semi-stable*). *On suppose* S *un trait. Les conditions suivantes sur le schéma abélien* A_K *sont équivalentes* (*les notations étant celles de* (2.5.3), *appliquées à la situation déduite de* (A_K, S) *par passage au hensélisé de* S) :

(i) A_K *a réduction semi-stable sur* S (3.4).

(ii) *On a, avec les notations* (2.5.3), (2.5.4) :

$$V \subset V^{\perp} \quad .$$

(iii) *On a pour la partie torique* W *du module de Tate* :

$$W = V^{\perp} \quad .$$

(iv) *L'action du groupe d'inertie* I *sur* $U = T_{\ell}(A(\overline{K}))$ *est unipotente d'échelon* 2 (*i.e. il existe un sous-module* U' *de* U *stable par* I *tel que* I *opère trivialement sur* U' *et sur* U/U').

On peut supposer S hensélien (3.4.0). Avec les notations de 2.1.9, (i) signifie que l'on a

$$\lambda = 0 \quad ,$$

ce qui en vertu de (2.5.5) équivaut à $V = V \cap V^{\perp}$ i.e. à (ii). Comme $W = V \cap V^{\perp}$ par le théorème d'orthogonalité 2.4, on a (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). D'ailleurs (iv) signifie aussi que I opère trivialement sur $U^I = V$, ce qui par dualité signifie qu'il opère trivialement sur $V^{\perp}$ i.e. que $V^{\perp} \subset U^I = V$, ce qui est (ii). Cela achève la démonstration.

Remarques 3.5.1. Les conditions (ii) et (iv) ne dépendent visiblement que de l'action de I sur le $\mathbb{Q}_{\ell}$-vectoriel $U \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathbb{Q}_{\ell}$, et auraient pu être formulées en termes de cette action. Signalons aussi que ces conditions sont manifestement stables par tout changement de base par un morphisme de traits $S' \longrightarrow S$. Enfin, si (iv) est satisfaite pour A_K, elle l'est aussi manifestement pour tout sous-schéma abélien et tout schéma abélien quotient de A_K , et en particulier pour tout schéma abélien isogène à A (par exemple pour A'_K).

Corollaire 3.5.2. Soit g un générateur topologique de $\mathbb{Z}_\ell(1) = T_\ell(\overline{k}^*)$. Les conditions équivalentes de 3.5 équivalent aussi à la condition suivante :

(v) L'action du groupe d'inertie I sur $U = T_\ell(A(\overline{K}))$ se fait à travers le plus grand quotient pro-ℓ-fini $I(\ell)$ de I, qui est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell(1)$ (I), et l'opération g_U du générateur g sur U satisfait la condition

$$(1 - g_U)^2 = 0 \quad . \tag{3.5.3}$$

En effet, pour toute action unipotente continue d'un groupe profini I sur un espace vectoriel ℓ-adique, on voit aussitôt que l'image de I est un pro-ℓ-groupe. Il s'ensuit que (v) équivaut à (iv).

Nous pouvons maintenant prouver le résultat central du présent exposé :

Théorème 3.6. (théorème de réduction semi-stable). Soient S un schéma noethérien régulier connexe de dimension 1, K le corps des fonctions rationnelles de S, A_K un schéma abélien sur K. Alors il existe une extension finie galoisienne K' de K, telle que le schéma abélien $A_{K'} = A_K \otimes_K K'$ ait réduction semi-stable (3.4) sur le normalisé S' de S dans K'.

On observera que S' est noethérien régulier connexe de dimension 1, ce qui donne un sens à la conclusion énoncée. Pour prouver 3.6, choisissons une clôture séparable $\overline{K}$ de K, et écrivons l'extension $\overline{K}$ comme limite inductive de ses sous-extensions galoisiennes finies K_i. Soit S_i le normalisé de S dans K_i, et soit U le plus grand ouvert de S sur lequel A_K ait bonne réduction. Comme S est noethérien connexe de dimension 1, et $U \neq \emptyset$, on voit que $T = S-U$ est un ensemble fini de point fermés de S, et que pour tout $t \in T$, $\underline{O}_{S,t}$ est un anneau de valuation discrète. Il suffit de trouver, pour tout $t \in T$, un indice $i = i(t)$ tel que A_{K_i} ait réduction semi-stable en les points de S_i au-dessus de t ; en effet, il suffira de prendre alors pour K' le composé des extensions $K_{i(t)}$ pour $t \in T$. Cela nous ramène donc au cas où S est un trait. D'autre part, comme de groupe Gal(K'/K) permute entre eux les points de S_i au-dessus du point fermé s de S, il suffit de trouver K' de telle façon que $A_{K'}$ ait réduction semi-stable en <u>un</u> point du normalisé S' ; d'ailleurs il est inutile ici que K' soit galoisien sur K, il suffit de trouver K' extension finie étale de K satisfaisant la condition précédente, car la clôture galoisienne de cette extension satisfera à la même condition. Utilisant le critère 3.5 (iv) on voit donc que 3.6 revient à l'assertion suivante :

<u>Corollaire</u> 3.7. <u>On suppose à nouveau</u> S <u>un trait</u>. <u>Alors il existe un sous-groupe ouvert</u> π' <u>de</u> π <u>tel que l'action</u> $I' = I \cap \pi'$ <u>sur</u> $U = T_\ell(A(\overline{K}))$ <u>soit unipotente d'échelon</u> 2, <u>ou encore</u> : <u>il existe un sous-groupe ouvert</u> I' <u>de</u> I <u>dont l'action sur</u> U <u>soit unipotente d'échelon</u> 2.

On a un isomorphisme canonique (compatible aux opérations de π) :

$$(*) \qquad H^1(A_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathrm{Hom}(T_\ell(A(\overline{K})), \mathbb{Z}_\ell) \quad ,$$

qui montre que l'assertion 3.7 équivaut à la même assertion pour les opérations de I sur le premier membre de (*). Or cette assertion a été prouvée dans III (en utilisant la résolution des singularités des schémas excellents de dimension 2).

Corollaire 3.8. *Les conditions équivalentes* (i) *à* (iv) *de* 3.5 *équivalent aussi à la condition suivante* :

(vi) *L'action de* I *sur* $U = T_\ell(A(\overline{K}))$ *est unipotente*.

En effet, pour prouver que (v) implique (vi), on note que si un groupe I opérant de façon unipotente sur un vectoriel E de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle (en l'occurrence $\mathbb{Q}_\ell$) admet un sous-groupe d'indice fini I' opérant avec l'échelon m (en l'occurrence m=2), alors I lui-même opère avec l'échelon m. En effet, I' étant d'indice fini dans I, le groupe algébrique $G' \subset \underline{Gl}(E)$ qu'il définit est d'indice fini dans celui, G, défini par I, or G étant unipotent est connexe (caractéristique nulle !), donc G=G', donc I et I' ont même "échelon d'unipotence".

On obtient également une réciproque à 3.3 :

Corollaire 3.9. *Les notations sont celles de* 3.2. *Les conditions* (i) *et* (ii) *de* 3.2 *équivalent aussi à la condition suivante* :

(iii) *Pour toute extension étale* K' *de* K, *désignant par* S' *le normalisé de* S *dans* K', *par* A' *le modèle de Néron de* $A_{K'} = A\otimes_S K' = A_K \otimes_K K'$, *le morphisme canonique*

$$A \times_S S' \longrightarrow A'$$

induit un isomorphisme sur les composantes neutres.

La nécessité de la condition a été vue en effet, sous une forme plus forte, dans 3.3. Pour voir la suffisance, on choisit K' comme dans 3.6. Comme les fibres de A'° sont de rang unipotent nul, il en est de même de celles de $(A \times_S S')^{\circ} = A^{\circ} \times_S S'$, donc aussi de celles de A° dont les précédentes se déduisent par extension du corps de base.

4. Application à une conjecture de SERRE-TATE et au conducteur

4.1. Nous supposons S hensélien, et gardons les notations de (2.5.3), avec $\ell \neq p$ (*). Pour étudier l'action de $\pi = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et de son sous-groupe d'inertie I sur $U = T_{\ell}(A(\overline{K}))$, nous allons utiliser le fait qu'il existe un sous-groupe ouvert I' de I, que nous prendrons même invariant dans π, tel que l'action de I' sur U soit unipotente d'échelon 2, i.e. tel que l'on ait

$$U^{I'} \supset (U^{I'})^{\perp} \quad .$$

Il est clair que $U^{I'}$ ne dépend pas alors du choix particulier de I', on pourrait l'appeler le sous-module essentiellement fixe de U, et nous le noterons U^{ef}, son orthogonal prenant alors le nom de sous-module essentiellement torique de U, qui sera noté U^{et}. On a donc une filtration en trois crans

$$U \supset U^{ef} \supset U^{et} \supset 0 \quad , \tag{4.1.1}$$

évidemment invariante sous l'action de π . Notons par la même occasion

---

(*) Le cas $\ell \neq p$ sera étudié dans les §§ 5 et 6 ci-dessous.

qu'il existe un plus grand sous-groupe de I qui opère de façon unipotente (ou ce qui revient au même, unipotente d'échelon deux) sur U : c'est le sous-groupe I' des éléments qui opèrent de façon unipotente, qui est aussi noyau de la représentation de I dans le gradué associé à la filtration (4.1.1) de U, ou ce qui revient ici au même, le noyau de la représentation induite de I sur U^{ef}. En vertu du critère galoisien de réduction semi-stable (3.5), ce sous-groupe de I' correspond à la plus petite extension galoisienne $\widetilde{K}'$ de $\widetilde{K}$ (l'extension non ramifiée maximale de K) telle que $A_{\widetilde{K}'}$ ait une réduction semi-stable. Cette description montre en même temps que ce sous-groupe I' de I ne dépend pas du choix du nombre premier $\ell \neq p$.

Notons que la représentation de π sur U/U^{ef} est connue à isogénie près quand on connaît la représentation sur U^{ef}, donc sur U^{et}, grâce à l'isogénie induite par l'accouplement de polarisation (2.5.1) :

(4.1.2) $$U/U^{ef} \longrightarrow (U^{et})^{\vee}(1) \quad \text{une isogénie,}$$

où le (1) désigne le twist de Tate par $\mathbb{Z}_\ell(1) = T_\ell(\overline{K}^*)$; l'homomorphisme précédent est en effet, évidemment, compatible avec les opérations de π. (NB. On a un isomorphisme canonique $U/U^{ef} \simeq (U'^{et})^{\vee}(1)$, où $U' = T_\ell(A'(\overline{K}))$). Il s'impose donc d'étudier de plus près l'action de π sur U^{ef}.

Or par construction, celle-ci est triviale sur le sous-groupe invariant I' de I, elle se factorise donc en une représentation du groupe quotient

(4.1.3) $$\pi' = \pi/I' \quad ,$$

action dont nous allons donner maintenant une description "indépendante de ℓ ".

4.2. Soit donc K' une extension galoisienne de K, correspondant à un sous-groupe invariant ouvert V de π tel que $V \cap I = I'$, le groupe de Galois G de K'/K apparaissant donc comme une extension

(4.2.1) $$1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow G_o \longrightarrow 1 \quad ,$$

où

(4.2.2) $$\Gamma = I/I'$$

est le sous-groupe d'inertie, et G_o le groupe de Galois de la plus grande sous-extension non ramifiée K" de K'/K . La suite exacte (4.2.1) est donc image de la suite exacte analogue

(4.2.3) $$1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \pi' \longrightarrow \pi_o \longrightarrow 1 \quad ,$$

où π' est le groupe (4.1.3) opérant sur U^{ef}. On a donc un diagramme d'inclusions de **corps**

(4.2.4)
$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "G_o"] \arrow[dr, dash, "G"'] \arrow[rrr, bend left, dash, "\pi_o"] & K''=\widetilde{K}\cap K' \arrow[rr] \arrow[d, "\Gamma"] & & \widetilde{K} \arrow[d, "\Gamma"] \arrow[dd, bend left=60, dash, "I"] \\
& K' \arrow[rr] & & \widetilde{K}' \arrow[d, "I'"] \\
& & & \overline{K}
\end{tikzcd}$$

Soient S' le normalisé de S dans K', A* le modèle de Néron de $A_{K'}$. Alors par le critère galoisien de réduction semi-stable (4.5), $A_{K'}$ *a réduction semi-stable sur* S' *i.e.* A^{*o}_o *est extension d'un schéma* abélien par un tore ; d'autre part, par transport de structure, G opère sur A* donc sur A^{*o} par automorphisme de façon compatible avec l'action donnée de G sur le schéma de base S' de A*. Il est clair alors que l'action de π' sur $U^{ef} = T_{\ell}(A^{*o})^{f}(\overline{K})$ est déduit par transport de structure de l'action de π' sur $(A^{*o}/K', \widetilde{K}')$, π' équivaut sur A* via G. Tenant compte de l'isomorphisme canonique

$$U^{ef} \simeq T_{\ell}(A^{*o})^{f}(\overline{K}) \simeq T_{\ell}(A^{*o}_{o})(\overline{k}) \tag{4.2.6}$$

(valable pour tout faisceau ℓ-adique constant tordu sur S', cf. I), on trouve alors la description suivante de l'action de π' sur U^{ef} :

On considère le schéma en groupes lisse connexe A^{*o}_{o} sur le corps résiduel $k' \hookrightarrow \overline{k}$ de S', qui est une extension quasi-galoisienne de k de groupe de Galois G_o. Le groupe quotient G de π' opère sur A^{*o}_{o} de façon compatible avec son opération sur k' via G_o. D'ailleurs π' opère sur $\overline{k}$ via son quotient π_o, donc il opère sur la situation $(A^{*o}_{o}/k', \overline{k})$. Donc par transport de structure π' opère sur

$$U^{ef} = T_{\ell}(A^{*o}_{o})(\overline{k}) \quad ,$$

et c'est l'opération cherchée de π'. En particulier, le sous-groupe Γ de G qui opère trivialement sur k' opère sur A^{*o}_{o} par k'-automorphismes, et la représentation correspondante de $\Gamma = I/I'$ sur $T_{\ell}(A^{*o}_{o})(\overline{k})$ est la représentation déduite de la représentation naturelle du groupe d'inertie I sur U^{ef}.

D'autre part, la partie essentiellement torique U^{et} de U correspond simplement au sous-module

$$U^{et} \simeq T_{\ell}(T^{*}_{o})(\overline{k}) \subset U^{ef} \simeq T_{\ell}(A^{*o}_{o})(\overline{k}) \quad , \tag{4.2.7}$$

où T_o^* est le plus grand sous-tore de A_o^{*o}. Posant de même

$$B_o^* = A_o^{*o}/T_o^* \tag{4.2.8}$$

pour la partie abélienne de A_o^{*o}, l'opération de G sur A_o^{*o} induit séparément des opérations de G sur T_o^* et sur B_o^*, et l'opération de π' sur U^{et} et sur U^{ef}/U^{et} se déduit des opérations précédentes à l'aide de l'isomorphisme (4.2.7) et de l'isomorphisme correspondant

$$U^{ef}/U^{et} \simeq T_\ell(B_o^*)(\overline{k}) \quad . \tag{4.2.9}$$

De ceci, et de l'isogénie (4.1.2), on déduit, pour le caractère $g \longmapsto \operatorname{Tr} g_U$ de l'action de π' (ou de π) sur U, la formule

$$\operatorname{Tr} g_{U_\ell} = \operatorname{Tr} g_{B_o^*,\ell} + \operatorname{Tr} g_{T_o^*,\ell} + \chi_\ell(g) \operatorname{Tr} g_{T_o^*,\ell}^{-1} \quad , \tag{4.2.10}$$

où au premier membre on a écrit U_ℓ pour U, pour rappeler le nombre premier choisi $\ell \neq p$, où $g_{B_o^*,\ell}$ resp. $g_{T_o^*,\ell}$ désigne l'action de g sur le module de Tate $T_\ell(B_o^*)(\overline{k})$ resp. $T_\ell(T_o^*)(\overline{k})$, déduit de son action sur B_o^* resp. T_o^* qu'on vient d'expliciter, et où

$$\chi_\ell : \pi' \longrightarrow \pi_o \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^* \tag{4.2.11}$$

est le caractère de π' (ou de π_o) déduit de l'action sur $\mathbb{Z}_\ell(1) = T_\ell(\overline{k}^*)$, - caractère qui est trivial sur Γ^o .

Nous sommes maintenant en mesure de prouver un cas particulier d'une conjecture de SERRE-TATE [29, Appendice] (*).

(*) C'est essentiellement le cas i=1 desdites conjectures pour les H^i .

Théorème 4.3. *Soient* S *un trait hensélien de corps résiduel* k, *corps des fonctions* K, A_K *un schéma abélien sur* K, *considérons la représentation de* $\pi = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ *sur le module de Tate* $U_\ell = T_\ell(A(\overline{K}))$, *où* ℓ *est un nombre premier distinct de la caractéristique résiduelle*.

a) *Il existe un sous-groupe ouvert* I' *du groupe d'inertie qui opère de façon unipotente sur* U_ℓ, *de sorte que le caractère de la représentation de* π *sur* U_ℓ *est en fait une fonction sur* π/I' . *De plus, sur* $\Gamma = I/I'$ *cette fonction est à valeurs entières, et est indépendante de* ℓ . *Plus généralement, pour tout* $g \in I$, *les coefficients du polynôme caractéristique de* g_{U_ℓ} *sont des entiers rationnels indépendants de* ℓ .

b) *Supposons que* k *soit un corps fini à* q *éléments, de sorte que* $\pi_o = \pi/I \simeq \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ *s'identifie au complété* $\hat{\mathbb{Z}}$ *de* $\mathbb{Z}$, *au générateur* 1 *de* $\mathbb{Z}$ *correspondant l'automorphisme de frobenius* $f_q : x \longmapsto x^q$ *de* $\overline{k}/k$. *Alors pour tout* $g \in \pi$ *dont l'image dans* π_o *est dans* $\mathbb{Z}$, *la trace (et plus généralement tout coefficients du polynôme caractéristique) de* g_{U_ℓ} *est un nombre rationnel indépendant de* ℓ, *qui est même un entier si l'image de* g *dans* π_o *est de la forme* $f_q^{\,n}$, *avec* $n \geq 0$.

Prouvons par exemple les assertions sur les traces. Les assertions sur les coefficients du polynôme caractéristique se prouveraient de la même façon, mais on peut noter aussi qu'elles résultent formellement des assertions faites sur les traces, grâce au calcul de ces coefficients en termes des traces des itérés (formules introduisant cependant des dénominateurs, donc ne donnant pas l'intégralité annoncée), et à un lemme de DWORK-FATOU (dont une jolie démonstration est donnée par KLEIMAN dans [14 2.8]).

a) On utilise la formule (4.2.10), qui devient ici

$$\text{(4.3.0)} \qquad \operatorname{Tr} g_{U_\ell} = \operatorname{Tr} g_{B^*_o,\ell} + \operatorname{Tr} g_{T^*_o,\ell} + \operatorname{Tr} g^{-1}_{T^*_o,\ell} \quad ,$$

où maintenant $g_{B^*_o}$ et $g_{T^*_o}$ sont des k'-automorphismes de B^*_o resp. de T^*_o. Il suffit donc de montrer que les deux traces correspondantes sont des entiers rationnels indépendants de ℓ ce qui est un énoncé "géométrique" général sur les groupes algébriques. Pour $g_{B^*_o}$ c'est un résultat bien connu de WEIL sur la théorie des variétés abéliennes [5][15] ; pour $g_{T^*_o}$ c'est pratiquement trivial, en explicitant la représentation de Γ sur $T=T^*_o$ à l'aide de la représentation correspondante sur le groupe dual M', isomorphe à $\mathbb{Z}^\mu$: la trace cherchée est contragrédiente de celle de cette dernière représentation, grâce à l'isomorphisme canonique

$$T_\ell(T) \simeq \check{M}_\ell(1) \overset{\text{dfn}}{=} \check{M}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell(1)$$

b) Si l'image de g dans π_o est $f_q^{\,n}$, la formule (4.2.10) devient maintenant

$$\text{(4.3.1)} \qquad \operatorname{Tr} g_{U,\ell} = \operatorname{Tr} g_{B^*_o,\ell} + \operatorname{Tr} g_{T^*_o,\ell} + q^n \operatorname{Tr} g^{-1}_{T^*_o,\ell} \quad .$$

Nous sommes ainsi ramenés à prouver le lemme suivant (où on fera $k \mapsto \overline{k}'$, $A \longmapsto A^*_o \overset{o}{\otimes}_{k'} \overline{k}$) :

Lemme 4.3.2. Soient k la clôture algébrique d'un corps fini, A un schéma en groupes commutatif de type fini sur k, g un automorphisme de ce schéma en groupes, compatible avec l'automorphisme f de Spec(k) déduit par transport de structure d'un automorphisme de frobenius itéré $x \longmapsto x^q$ (où $q = p^r$ est une puissance de la caractéristique, avec $r \geq 0$),

-donc on a pour l'action de g sur des fonctions φ :

$$g^*(\lambda\varphi) = f^*(\lambda)g^*(\varphi) = \lambda^{q^{-1}} g^*(\varphi) = \lambda^{p^{-r}} g^*(\varphi) \qquad (\lambda \in k) \quad .$$

Considérons l'automorphisme g_ℓ induit par g sur $T_\ell(A(k))$ par "transport de structure", où ℓ est un nombre premier $\neq$ p. Alors la trace de g_ℓ (plus généralement, tout coefficient de son polynôme caractéristique) est un entier rationnel, indépendant de ℓ, et ses valeurs propres sont des entiers algébriques de valeur absolue égale à $q^{1/2}$ ou q. Si A est un schéma abélien, les valeurs absolues sont $q^{1/2}$; si A est affine, les valeurs propres sont de la forme $q\varepsilon_i$, où les ε_i sont des racines de l'unité.

En effet, considérons l'endomorphisme f_q^A "puissance q.ième" du schéma absolu sous-jacent à A, qui est défini comme l'identité sur les points et l'élévation à la puissance q.ième sur le faisceau structural. C'est un endomorphisme du schéma en groupes A compatible avec l'endomorphisme $f_q^{\mathrm{Spec}(k)} = f^{-1}$ sur la base Spec(k), donc le composé

$$F = f_q^A \, g \tag{4.3.3}$$

est un endomorphisme du schéma en groupes A, compatible avec l'identité sur Spec(k), i.e. c'est un k-endomorphisme du schéma en groupes A. Je dis que l'automorphisme Γ_g de A(k) défini par g par transport de structure, explicité par la formule

$$\Gamma_g(u) = g \circ u \circ f^{-1} \qquad \text{pour } u \in A(k) \quad , \tag{4.3.4}$$

peut aussi de décrire par

$$\Gamma_g(u) = F(u) \qquad \text{pour } u \in A(k) \quad . \tag{4.3.5}$$

Pour le vérifier, il suffit de voir que l'application ensembliste sous-jacente aux morphismes $\mathrm{Spec}(k) \longrightarrow A$ représentés par les deux membres sont les mêmes, ce qui nous réduit à prouver l'égalité déduite de (4.3.5) en y composant le premier membre à gauche avec f_q^A, et le deuxième membre à droite avec f^{-1} (puisque f_q^A et f^{-1} induisent l'identité sur les ensembles sous-jacents aux schémas source). Mais la formule en question est alors conséquence immédiate de (4.3.3) et de (4.3.4).

Appliquant (4.3.5) aux $u \in {}_{\ell^\nu}A(k)$, et passant à la limite sur ν, on trouve que g_ℓ peut aussi s'interpréter comme l'endomorphisme $T_\ell(F)$ de $T_\ell(A(k))$ associé à l'endomorphisme F de A. On sait d'autre part que $T_\ell(F)$ a un polynôme caractéristique qui est à coefficients entiers indépendants de ℓ, en se ramenant par dévissage au cas où A est, soit un schéma abélien, soit un tore, où le résultat en question était déjà utilisé dans la partie a) de notre démonstration. De plus, cette démonstration prouve également les assertions faites sur les valeurs propres, compte tenu, dans le cas d'un schéma abélien, des classiques résultats de WEIL [15].

Cela prouve 4.3.2 et achève la démonstration de 4.3, et prouve en même temps :

Corollaire 4.4. Plaçons nous sous les conditions de 4.3 b). Alors pour tout élément g dans π' dont l'image dans π_o est de la forme f_q^n avec $n \geq 0$, les valeurs propres des automorphismes induits de U^{et}, U^{ef}/U^{et}, U/U^{ef} sont des entiers algébriques dont les valeurs absolues sont respectivement q^n, $q^{n/2}$ et 1. En ce qui concerne les deux morceaux extrêmes, on peut dire, plus précisément, que les valeurs propres correspondantes sont respectivement $(q^n\varepsilon_i)_{1\leq i\leq\mu}$ et $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq\mu}$, où les $\varepsilon_i (1\leq i\leq\mu)$ sont des racines de l'unité.

En fait, la formule (4.1.2) donne pour le dernier morceau les valeurs propres $q^n/(q^n\varepsilon_i) = \varepsilon_i^{-1}$, mais comme ε_i est une racine de l'unité, on a $\varepsilon_i^{-1} = \overline{\varepsilon_i}$ (conjugué complexe), et comme la famille des ε_i est stable par conjugaison complexe (comme famille des solutions d'une équation à coefficients entiers), la famille des ε_i^{-1} est aussi celle des ε_i, ce qui prouve la derniere assertion de 4.4.

4.5. Nous allons donner une application de 4.3 a) à la théorie du conducteur local des schémas abéliens. Supposons k algébriquement clos (*). Rappelons (SGA 5 X 6.2 ou [20]) que pour tout schéma en ℓ-groupes commutatifs étale F_K sur K, $(\ell \neq p)$, on définit un entier

(4.5.1) $$\alpha_s(F_K) = \alpha_s(i_*(F_K))$$

$(i:\eta \longrightarrow S$ désignant l'inclusion), de la façon suivante : on choisit une extension galoisienne finie K' de K, de groupe Γ, qui déploie F_K, de sorte que F_K soit défini par un ℓ-groupe fini M sur lequel Γ opère. D'autre part, on associe à l'extension K' de K un certain $\mathbb{Z}_\ell[\Gamma]$-module projectif (défini à isomorphisme près)

(4.5.2) $$Sw = Sw(K'/K,\mathbb{Z}_\ell) \quad ,$$

et on pose

(4.5.3) $$\alpha_s(F_K) = \text{long}\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell(\Gamma)}(Sw,M) \quad .$$

On vérifie (loc. cit) que cette expression ne dépend pas du choix de l'extension K'/K. D'ailleurs, le fait que Sw soit un $\mathbb{Z}_\ell[\Gamma]$-module

---

(*) Il suffirait en fait que k soit parfait, mais par passage au hensélisé strict de S, on se ramène aussitôt au cas envisagé.

projectif implique que $a_s(F_K)$ se comporte additivement pour les suites exactes.

Nous allons appliquer cette définition au cas du faisceau ${}_{\ell}A_K$, où A_K est notre schéma abélien sur K. On a donc, dans ce cas, un entier

$$(4.5.4) \qquad a_s(A_K;\ell) = \text{long Hom}_{\mathbb{Z}_\ell(\Gamma)}(Sw, U_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{F}_\ell) \ , \quad U_\ell = T_\ell(A(\overline{K})) \ ,$$

Γ étant choisi comme il a été dit (choix dépendant à priori de ℓ). L'entier (4.5.4) s'appelle l'exposant conducteur immodéré (ou "sauvage") (*) du schéma abélien A_K par rapport à l'anneau de valuation discrète $V \subset K$; par passage au hensélisé, il est défini bien sûr sans supposer V hensélien, et il se ramène aussitôt au cas où S est strictement local. Nous nous proposons de montrer le

Corollaire 4.6. L'exposant conducteur immodéré (4.5.4) ne dépend pas du choix du nombre premier $\ell \neq p$.

Nous pouvons supposer S strictement local. Nous allons donner le calcul de (4.5.4), en remplaçant Sw par n'importe quel autre $\mathbb{Z}_\ell(\Gamma)$-module projectif L. Notons que la filtration (4.1.1) de U_ℓ se fait par des sous-$\mathbb{Z}_\ell$-modules qui sont manisfestement des facteurs directs, donc

(*) Il y a lieu de définir aussi l'exposant conducteur modéré de A_K par rapport à V comme l'entier différence des longueurs sur $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ des fibres géométriques générique et spéciale de ${}_{\ell}A^{\circ}$, qui est indépendant de ℓ et égal à $2\lambda + \mu$ avec les notations de (1.1.11) ; l'exposant conducteur (total) de A_K est défini comme la somme des deux entiers précédents; c'est le terme local qui intervient dans la formule d'Euler-Poincaré pour ${}_{\ell}A^{\circ}$ de SGA 5 X 6.2. [20].

cette filtration induit une filtration analogue de $U(\ell) = U_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{F}_\ell$, dont les facteurs successifs sont déduits des facteurs V_i $(i=1,2,3)$

$$U^{et} \ , \ U^{ef}/U^{et} \ , \ U/U^{ef}$$

intervenant dans la filtration (4.1.1) par tensorisation par $\mathbb{F}_\ell$. Bien entendu, cette filtration est stable sous Γ, et donne par additivité une décomposition de long $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell(\Gamma)}(L,U(\ell))$ en somme de trois termes, longueurs des groupes

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell(\Gamma)}(L,V_i \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{F}_\ell) \simeq (\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell(\Gamma)}(L,V_i)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{F}_\ell \quad ,$$

l'isomorphisme écrit dans (*) résultant encore de l'hypothèse de projectivité faite sur L ; on suppose seulement K' choisi assez grand pour que Γ opère sur les V_i. Or $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell(\Gamma)}(L,V_i)$ est évidemment un $\mathbb{Z}_\ell$-module sans torsion, donc son rang est égal au deuxième membre de (*). Si φ_i est le caractère de la représentation de Γ dans V_i, et ψ le caractère de la représentation de I dans $\check{L}$, on trouve donc

$$(4.6.1) \qquad \text{long}\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell(\Gamma)}(L,U(\ell)) = \sum_{1\leq i\leq 3} N^{-1} \sum_{g\in\Gamma} \psi(g)\varphi_i(g)$$

$$= N^{-1} \sum_{g\in\Gamma} \psi(g)\varphi(g), \text{ avec } N=\mathrm{card}\ \Gamma,$$

où $\varphi(g) = \Sigma\, \varphi_i(g)$ est aussi la fonction sur Γ déduite par passage au quotient de la fonction sur le groupe d'inertie I caractère de la représentation de monodromie de I sur U. Or en vertu de 4.3 a) ce caractère est une fonction à valeurs entières rationnelles indépendante de ℓ. Prenant L = Sw, il en est de même du caractère $\psi(g)$ de L, qui est égal à $a-N\delta+1$, où δ est la "fonction de Dirac" de Γ, et a le "conducteur d'Artin" de K'/K [26]. Cela prouve donc 4.6, en mettant en évidence en même temps l'expression suivante, indépendante de ℓ, de l'exposant conducteur immodéré :

(4.6.2) $$\alpha_s(A_K) = N^{-1} \sum_{g \in \Gamma} (a(g) - N\delta(g) + 1)\, \varphi(g) \quad ,$$

où Γ est le groupe de Galois d'une extension galoisienne finie K' de K qui splitte U^{ef} (par exemple la plus petite telle extension, cf. 4.1), $a(g)$ le conducteur d'Artin sur Γ, et $\varphi(g)$ la fonction trace sur Γ explicitée dans (4.3.0). Dans le cas de réduction semi-stable, on peut prendre K'=K, donc $\Gamma = e$, et on trouve

(4.6.3) $$\alpha_s(A_K) = 0 \quad \text{(cas de réduction semi-stable).}$$

Pour terminer, explicitons un critère de réduction semi-stable qui résulte des réflexions générales de 4.2 :

Proposition 4.7. (Critère de M. RAYNAUD de réduction semi-stable). Soient S un trait, A_K un schéma abélien défini sur son corps de fonctions K, n en entier > 1 premier à la caractéristique résiduelle p (*), et tel que ${}_nA_K$ soit non ramifié par rapport à S i.e. tel que le groupe d'inertie opère trivialement sur ${}_nA(\overline{K})$. Alors, ou bien A_K a une réduction semi-stable sur S, ou bien n = 2, et si S est strictement local, A_K acquiert une réduction semi-stable sur une extension finie galoisienne K' de K à groupe de Galois isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$.

(*) Comme il résulte d'un exemple qui m'a été communiqué par J. TATE, 4.7 ne reste pas valable quand n est égal à la caractéristique résiduelle p, même si K est de caractéristique nulle et si A_K est une courbe elliptique à multiplication complexe.

On peut évidemment supposer S strictement local. Avec les notations de 4.1 et de 4.2, prenons K' le plus petit possible, i.e. supposons que Γ opère <u>fidèlement</u> sur A_o^{*o}. Par hypothèse, Γ opère trivialement sur ${}_nA(\overline{K})$, et à fortiori sur ${}_nA(\overline{K})^{ef} \simeq {}_nA_o^*(k) \supset {}_nA_o^{*o}(k)$. On conclut alors par les deux lemmes suivants :

<u>Lemme</u> 4.7.1. (J.P. SERRE). <u>Soient</u> G <u>un schéma en groupes commutatif sur un corps</u> k, <u>extension d'un schéma abélien par un tore</u>, n <u>un nombre entier</u> ≥ 2. <u>Alors tout automorphisme d'ordre fini de</u> G <u>induisant l'identité sur</u> ${}_nG$ <u>est réduit à l'identité si</u> $n \neq 2$, <u>et est l'identité ou d'ordre deux si</u> $n = 2$.

<u>Lemme</u> 4.7.2. <u>Un groupe fini dont tout élément</u> $\neq 1$ <u>est d'ordre</u> 2 <u>est isomorphe à</u> $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$, <u>pour un</u> $r \geq 0$ <u>convenable</u>.

4.7.3. Rappelons la démonstration de 4.7.1, qui est bien connue. On note que grâce au fait que $n\,\mathrm{id}_G$ est un épimorphisme, l'hypothèse que u induise l'identité sur ${}_nG$ i.e. que $1 - u$ induise 0 sur ${}_nG$, s'exprime par la condition que l'on ait $1 - u = nv$ dans l'anneau des endomorphismes de G. Pour prouver la conclusion annoncée, on est ramené (en décomposant le groupe cyclique fini engendré par u en ses composantes p-primaires, pour les divers nombres premiers p divisant l'ordre de u) au cas où u est d'ordre p^N, puissance d'un nombre premier. Soit E le sous-anneau de End(G) engendré par v, qui est un quotient de $\mathbb{Z}[T]/(T^{p^N}-1)$, donc de type fini sur $\mathbb{Z}$, et qui de plus est sans torsion (ceci est conséquence formelle du fait que G est divisible). Il se plonge donc dans $E_{\mathbb{Q}} = E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, qui apparaît comme un quotient de $\mathbb{Q}[T]/(T^{p^N}-1)$, qui est un composé direct de corps extensions finies de $\mathbb{Q}$. Il en est donc de même de $E_{\mathbb{Q}}$. Considérant les images de E,u,v dans les corps composants K_i de $E_{\mathbb{Q}}$, on est donc ramené à voir que si $K = \mathbb{Q}(u)$ est un corps engendré par une racine primitive p^n-ème de l'unité u, et si n est un entier ≥ 2 tel que $u-1 \equiv 0$ mod n (dans l'anneau des entiers de K), alors on a $u=1$, ou $u=-1$ et $n=2$. Or ceci résulte aussitôt du fait bien connu que si $u\neq 1$ i.e. $m \geq 1$, l'idéal $(u-1)$ est premier et l'idéal (p) en est une puissance, dont l'exposant est > 1 sauf si $p=2, m=1$ i.e. si $u=-1$. Du fait que $(u-1)$ est premier et divise p résulte en effet que $n \geq 2$ ne peut diviser $u-1$ que si $n=p$, et p ne divise $u-1$ que si $(u-1) = (p)$ i.e. $u = -1$, donc $n = 2$.

4.7.4. Démontrons 4.7.2. Il suffit de prouver que Γ est commutatif. Or si $x, y \in \Gamma$, on aura $(xy)(xy) = 1$, ce qui peut s'écrire aussi, puisque $x^2 = 1$, $y^2 = 1$, $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$, cqfd.

Remarque 4.7.5. La démonstration donnée 4.7.3, jointe à 4.7.2, nous montrent que si G est un Groupe commutatif divisible d'un Topos, $n \geq 2$ un entier, et Γ un groupe fini, opèrant fidèlement sur G en induisant l'identité sur ${}_nG$, alors Γ est réduit à l'identité si $n \geq 3$, et est isomorphe à un groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ si $n=2$.

5. Le théorème d'orthogonalité dans le cas $\ell = p$ (cas semi-stable). Dualité des schémas abéliens B_o et B'_o. Caractérisation de la partie fixe. Critères de bonne réduction, de bonne réduction essentielle et semi-stable.

t

5.1. Plaçons nous dans le cas 2.2.3 où S est hensélien et A^o est ℓ-divisible, de sorte que la partie fixe

$$T_\ell(A^o)^f \hookrightarrow T_\ell(A)$$

est définie comme le pro-ℓ-groupe de Barsotti-Tate formé des $({}_{\ell^\nu}A^o)^f$. Nous allons maintenant donner une définition de la partie torique (2.3.2) de $T_\ell(A^o)$, indépendante de l'hypothèse $\ell \neq p$ faite dans 2.3, mais supposant en revanche S complet (*). Pour ceci, introduisons pour tout entier $n \geq 0$ le schéma artinien local

(5.1.1) $$S_n = \mathrm{Spec}(V/\underline{m}^{n+1}) \quad ,$$

n.ème voisinage infinitésimal de s dans S, et pour tout S-schéma X soit $X_n = X\times_S S_n$. Comme $(A^o)_n = (A_n)^o$ est lisse sur S_n, il est connu (SGA 3 IX 3.6 bis) que T_o est la fibre spéciale d'un unique sous-tore

(5.1.2) $$T_n \subset A_n^o \quad .$$

D'après l'unicité des T_n, ceux-ci se déduisent les uns des autres par les changements de base $S_{n'} \longrightarrow S_n$. En d'autres termes, il définissent un sous-tore formel $\hat{T}$ du groupe $\hat{A}^o$ (dans la catégorie des schémas formels sur S) complété formel de A^o le long de la fibre spéciale :

(5.1.3) $$\hat{T} \subset \hat{A}^o \quad .$$

(*) Cette hypothèse n'est d'ailleurs pas essentielle, comme on montre dans 6.1 ci-dessous.

Comme le foncteur $X \longmapsto \hat{X}$ (complétion formelle le long de la fibre spéciale) induit une équivalence entre la catégorie des schémas finis sur S, et celle des schémas formels finis sur S (EGA III 4.8), nous allons identifier simplement un schéma fini sur S avec le schéma formel correspondant. Avec cette identification, la définition des "parties fixes" nous donne aussitôt pour tout $\nu \geq 0$:

$$(5.1.4) \qquad ({}_{\ell^\nu}A^o)^f = {}_{\ell^\nu}(\hat{A}^o) \quad ,$$

ce qu'on peut écrire aussi comme une identité de systèmes projectifs

$$(5.1.5) \qquad T_\ell(A^o)^f = T_\ell(\hat{A}^o) \quad .$$

On obtient donc un sous-pro-groupe de Barsotti-Tate de la partie fixe de $T_\ell(A^o)$ en prenant $T_\ell(\hat{T}) \subset T_\ell(\hat{A}^o)$. On définira alors la <u>partie torique</u> de $T_\ell(A^o)$ comme

$$(5.1.6) \qquad T_\ell(A^o)^t \overset{\text{dfn}}{=} T_\ell(\hat{T}) \subset T_\ell(\hat{A}^o) = T_\ell(A^o)^f \quad .$$

Donc par définition, on aura

$$(5.1.7) \qquad T_\ell(A^o)^t = ({}_{\ell^\nu}\hat{T})_{\nu \geq 0} \quad ,$$

le S-groupe fini et plat ${}_{\ell^\nu}\hat{T}$ étant lui-même décrit comme la limite inductive des S_n-groupes finis et plats

$$(5.1.8) \qquad {}_{\ell^\nu}(T_n) \text{ , n variable} \quad ,$$

i.e. son algèbre affine est décrite comme la limite projective des algèbres affines des groupes (5.1.8). Bien entendu, on aura

$$(5.1.9) \qquad (T_\ell(A^o)^t)_n = T_\ell(T_n) \quad ,$$

ce qui, pour n=0, n'est autre que la formule (2.3.3) par laquelle on avait caractérisé la partie torique (comme groupe pro-fini-étale) dans le cas $\ell \neq p$. Ceci montre que la définition (5.1.6) est compatible avec celle donnée dans 2.3 lorsque $\ell \neq p$.

Passant aux fibres génériques, les parties fixe et torique de $T_\ell(A^o)$ nous définissent des parties fixes et toriques dans $T_\ell(A_K)$:

$$T_\ell(A_K)^t \subset T_\ell(A_K)^f \subset T_\ell(A_K) \quad . \tag{5.1.10}$$

Ce sont des inclusions de pro-ℓ-groupes de Barsotti-Tate. Considérons la filtration analogue, correspondante au schéma abélien dual A'_K :

$$T_\ell(A'_K)^t \subset T_\ell(A'_K)^f \subset T_\ell(A'_K) \quad . \tag{5.1.11}$$

On a alors le résultat suivant, qui généralise 2.4 (du moins dans le cas S complet, auquel on pourrait facilement se réduire dans 2.4) :

<u>Théorème</u> 5.2. <u>Supposons que</u> S <u>soit un trait</u> complet, <u>et soient</u> A_K <u>un schéma abélien sur</u> K, A'_K <u>le schéma abélien dual,</u> ℓ <u>un nombre premier tel que le modèle de Néron connexe</u> A^o <u>soit</u> ℓ<u>-divisible</u> (cf. 2.2.1), <u>de sorte qu'on dispose alors des filtrations</u> (5.1.10) <u>et</u> (5.1.11) <u>des pro-groupes</u> $T_\ell(A_K)$ <u>et</u> $T_\ell(A_{K'})$. <u>Ceci posé, les parties toriques se reconstituent en termes des parties fixes par la formule</u>

$$T_\ell(A_K)^t = T_\ell(A_K)^f \cap (T_\ell(A'_K)^f)^\perp \tag{5.2.1}$$

<u>et la formule analogue obtenu en échangeant les rôles de</u> A_K <u>et de</u> A'_K , <u>où le signe</u> $\perp$ <u>désigne l'orthogonal par rapport à l'accouplement canonique</u> (1.0.2).

Enfin, lorsque A_K est à réduction semi-stable sur S (ce qui résulte des autres hypothèses dans le cas $\ell = p$), alors on a même la formule

$$T_\ell(A_K)^t = (T_\ell(A'_K)^f)^\perp \tag{5.2.2}$$

5.2.3. La signification de la formule (5.2.1) étant bien claire si ℓ est premier à la caractéristique de K (où elle peut s'interpréter en passant aux $\mathbb{Z}_\ell$-modules ordinaires, à action de $\pi = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, formés des $\overline{K}$-points des pro-groupes en jeu, comme dans 2.4), explicitons-là dans le cas général, en utilisant la notion de dual

$$D(G) = \mathrm{Hom}(G, T_\ell(\mathbb{G}_m)) \tag{5.2.3.1}$$

d'un pro-ℓ-groupe de Barsotti-Tate $G = (G(\nu))$, qui par définition est le système projectif des duals de Cartier $D(G(\nu))$ (SGA 3 VII 3.3.1 et VIII 1), où les morphismes de transition se définissent de façon évidente (par transposition à partir des morphismes d'inclusion entre les $G(\nu)$, par exemple). La théorie de dualité des variétés abéliennes nous apprend que l'accouplement mentionné dans 5.2 définit en fait un isomorphisme

$$T_\ell(A'_K) \simeq D(T_\ell(A_K)) \quad , \tag{5.2.3.2}$$

d'où par composition un morphisme

$$T_\ell(A_K)^f \longrightarrow D(T_\ell(A'_K)^f) \quad , \tag{5.2.3.3}$$

et la formule (5.2.1) affirme que le noyau de l'homomorphisme précédent (qui à priori est un sous-pro-groupe du premier terme) n'est autre que la partie torique $T_\ell(A_K)^t$. On notera qu'il s'agit d'un isomorphisme de pro-objets, et non de systèmes projectifs : nous n'affirmons pas (et il serait faux en général) que pour tout entier ν, $T_\ell(A_K)^t(\nu)$ soit égal au noyau de $T_\ell(A_K)^f(\nu) \longrightarrow D(T_\ell(A'_K)^f)(\nu)$; ce dernier pourra être plus grand à priori. (Nous verrons cependant plus bas qu'il ne l'est pas si A_K a réduction semi-stable, ce qui est le cas en particulier, d'après les hypohtèses faites dans 5.2, lorsque $\ell = p$).

5.2.4. La démonstration de (5.2.1) ne fait que répéter, pratiquement sans changement, celle de 2.4. On note que l'accouplement induit

(5.2.4.1) $$T_\ell(A_K)^f \times T_\ell(A'_K)^f \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mK})$$

donnant naissance à (5.2.3.3) est induit par un accouplement

(5.2.4.2) $$T_\ell(A^o)^f \times T_\ell(A'^o)^f \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mS})$$

de pro-groupes de Barsotti-Tate sur S, lui-même induit par l'accouplement de pro-groupes

(5.2.4.3) $$T_\ell(A^o) \times T_\ell(A'^o) \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mS})$$

déduite de la biextension W de (A^o, A'^o) par $\mathbb{G}_{mS}$. Par suite, l'accouplement

(5.2.4.4) $$T_\ell(A_o{}^o) \times T_\ell(A'_o{}^o) \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mk}) \quad ,$$

déduit de (5.2.4.2) par passage aux fibres spéciales, n'est autre que celui déduit de la biextension W_o de $(A_o{}^o, A'_o{}^o)$ par $\mathbb{G}_{mk}$. En vertu de VIII 4.11 et de 1.5, l'annulateur gauche de l'accouplement (5.2.4.4) est donc égal à $T_\ell(T_o)$, qui n'est autre que la fibre spéciale de la partie torique $T_\ell(A^o)^t$. On conclut donc, en revenant à la définition des annulateurs gauches explicitée dans 5.2.3, à l'aide du

Lemme 5.2.5. *Soit* $u : G \longrightarrow H$ *un homomorphisme de pro-ℓ-groupes de Barsotti-Tate sur* S. *Si* $u_o : G_o \longrightarrow H_o$ *est nul, alors* u *est nul. Si* $u_o : G_o \longrightarrow H_o$ *est une isogénie* (resp. *un isomorphisme*), u *est une isogénie* (resp. *un isomorphisme*).

Nous appliquerons en effet la première assertion de 5.2.5 au morphisme composé

$$T_\ell(A^o)^t \longrightarrow T_\ell(A^o)^f \longrightarrow D(T_\ell(A'^o)^f) \quad ,$$

où le deuxième morphisme est celui déduit de l'accouplement (5.2.4.2), on trouve que ce composé est nul, donc que l'accouplement envisagé s'annule sur la partie torique à gauche. Par symétrie, il s'annule donc sur la partie torique à droite, donc il provient d'un accouplement sur les quotients, ou "morceaux abéliens"

$$T_\ell(A^o)^{ab} \times T_\ell(A'^o)^{ab} \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_m) \quad ,$$

lesquels quotients sont encore des pro-groupes de Barsotti-Tate, comme on vérifie aisément. Il reste à prouver que le morphisme correspondant à cet accouplement

$$T_\ell(A^o)^{ab} \longrightarrow D(T_\ell(A'^o)^{ab})$$

est une isogénie, ce qui résulte encore de 5.2.5.

Nous laisserons au lecteur la démonstration (facile) de 5.2.5, qui est un résultat valable sur toute base noethérienne connexe. Nous trouverons d'ailleurs plus bas (7.4.7), par une analyse un peu plus précise des biextensions W_n des (A_n^o, A'^o_n), une démonstration directe assez évidente des deux cas particuliers où nous avons eu à utiliser 5.2.5.

5.2.6. Supposons maintenant que A_K ait une réduction semi-stable sur S, de sorte que nous pouvons prendre pour ℓ n'importe quel nombre premier (distinct ou non de p). D'ailleurs, en vertu du critère galoisien de réduction semi-stable 3.5, on a pour $\ell \neq p$

$$(5.2.7) \qquad (T_\ell(A'_K)^f)^\perp \quad (= T_\ell(A_K)^t) \subset T_\ell(A_K)^f \quad .$$

Il reste à prouver, pour terminer la preuve de 5.2, que cette inclusion est valable sans restriction sur ℓ.

En effet, le membre de gauche est canoniquement isomorphe à $D(T_\ell(A'_K)/T_\ell(A'_K)^f)$, et est donc de "rang" (ou "hauteur") égal à $2n - 2\alpha - \mu = \mu$ (notations de (2.1.9), où par hypothèse $\lambda = 0$), qui est aussi celui de $T_\ell(A_K)^t$. Comme l'inclusion

$$(*) \qquad T_\ell(A_K)^t \subset T_\ell(A_K)$$

est <u>stricte</u>, dans le sens qu'elle induit déjà un monomorphisme pour tous les termes du systèmes projectifs envisagés, il s'ensuit aisément que le premier membre de (*) est maximal parmi les sous-pro-groupes de Barsotti-Tate de $T_\ell(A_K)$ ayant même rang que lui, de sorte qu'on a bien l'égalité de (5.2.7), qui équivaut à l'inclusion entre les termes extrêmes de 5.2.7 par le théorème d'orthogonalité.

5.3. Utilisant la correspondance par orthogonalité entre sous-pro-groupes de Barsotti-Tate stricts (au sens précisé plus haut) des pro-groupes duals $T_\ell(A_K)$ et $T_\ell(A'_K)$, on déduit formellement de (5.2.2) que l'accouplement (1.0.2) entre ces pro-groupes induit un accouplement

$$(5.3.2) \qquad T_\ell(A_K)^{ab} \times T_\ell(A'_K)^{ab} \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mK})$$

qui est une <u>dualité parfaite</u>, i.e. identifiant chacun des deux facteurs du premier membre au dual de l'autre (au sens de 5.2.2). (NB les exposants ab désignent les "parties abéliennes", quotient de la partie fixe par la partie torique). Il est clair d'autre part que (5.3.2) est induit par l'accouplement

$$(5.3.3) \qquad T_\ell(A^o)^{ab} \times T_\ell(A'^o)^{ab} \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mS})$$

déduit par passages aux quotients de l'accouplement (5.2.4.2). Celui-ci étant une dualité parfaite sur les fibres génériques, i.e. l'homomorphisme correspondant

$$(5.3.4) \qquad T_\ell(A^o)^{ab} \longrightarrow D(T_\ell(A'^o)^{ab})$$

étant un isomorphisme sur les fibres génériques, nous avons évidemment envie d'en déduire qu'il en est de même sur S tout entier, ou ce qui revient au même, sur les fibres spéciales. Cette déduction est valable, trivialement, si $\ell \neq p$; elle est valable également, du moins dans le cas d'inégales caractéristiques, si $\ell = p$, grâce à un théorème profond de TATE [33, th.4]. Nous allons cependant pouvoir l'établir directement, sans l'aide du théorème de Tate, plus bas (7.4.6).

Pour préciser la signification géométrique du résultat que nous désirons établir, notons que l'accouplement déduit de (5.3.3) par passage aux fibres spéciales n'est autre que l'accouplement

$$(5.3.5) \qquad T_\ell(B_o) \times T_\ell(B'_o) \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mk})$$

déduit de la biextension W_o de $(A_o^o, A_o'^o)$ par passage au quotient, B_o et B'_o

désignant respectivement les parties abéliennes de A_o^o et $A_o'^o$. Comme, en vertu de VIII 4.8, la biextension W_o provient d'une biextension W_o^{ab} de (B_o,B_o') par $\mathbf{G}_{mk}$, déterminée à isomorphisme unique près, l'accouplement (5.3.5) peut aussi s'interpréter comme déduit de la correspondance divisorielle W_o^{ab}, et l'homomorphisme correspondant

$$(5.3.6) \qquad T_\ell(B_o) \longrightarrow D(T_\ell(B_o')) \simeq T_\ell(D(B_o'))$$

(où dans le dernier terme, la lettre D désigne le schéma abélien dual) n'est autre que celui déduit par fonctorialité de T_ℓ de l'homomorphisme

$$(5.3.7) \qquad B_o \longrightarrow D(B_o')$$

défini par W_o^{ab}. Donc le fait que (5.3.5) soit une dualité parfaite signifie aussi, par le dictionnaire bien connu (cf. [5]) que le noyau de (5.3.7), qui est un groupe fini sur k en vertu de 1.5, a une composante ℓ-primaire nulle. Dire qu'il en est ainsi pour tout ℓ signifie donc que l'isogénie (5.3.7) est un isomorphisme, i.e. que la correspondance divisorielle W_o^{ab} est une dualité parfaite entre B_o et B_o' . Les considérations qui précédaient montrent seulement que le noyau de (5.3.7) est un p-groupe. Enonçons donc le résultat plus complet :

<u>Théorème</u> 5.4. <u>Soit</u> S <u>un trait, et</u> A_K <u>un schéma abélien sur</u> S <u>ayant une réduction semi-stable sur</u> S. <u>Désignons par</u> B_o, B_o' <u>les parties abéliennes des modèles de Néron de</u> A_K <u>et du schéma abélien dual</u> A_K' <u>respectivement. Alors la correspondance divisorielle canonique</u> W_o^{ab} <u>sur</u> (B_o,B_o'), <u>déduite par</u> VIII 4.8 <u>de la biextension canonique</u> W_o <u>de</u> $(A_o^o,A_o'^o)$ (<u>fibre spéciale de la biextension</u> W <u>de</u> 1.4), <u>est une dualité parfaite entre</u> B_o <u>et</u> B_o',

<u>i.e. définit un isomorphisme de chacun de ces schémas abéliens avec le dual de l'autre.</u>

La démonstration de 5.4 dans le cas général va être donnée au n° 7, comme conséquence d'une construction fort naturelle et importante due à RAYNAUD. Notons seulement ici que pour prouver 5.4, on peut supposer S complet, compte tenu de 3.3.

5.5. Pour exprimer commodément les facteurs extrêmes dans les filtrations (5.1.10) et (5.1.11), dans le cas de la réduction semi-stable, introduisons les schémas en groupes constants tordus sur S

(5.5.1) $$\underline{M}'_o = D(T_o) \quad , \quad \underline{M}_o = D(T'_o) \quad ,$$

duals des tores maximaux T_o, T'_o des fibres spéciales de A,A' (SGA 3 X 5.7). Comme S est local complet, ces schémas en groupes peuvent être considérés comme les fibres spéciales de schémas constants tordus

(5.5.2) $$\underline{M}' \ , \ \underline{M} \text{ sur } S \quad ;$$

ainsi, si le tore T_o est déployé (par exemple si k est séparablement clos) i.e. si $\underline{M}'_o$ est le groupe constant défini par le groupe ordinaire

(5.5.3) $$M' = \mathrm{Hom}_{k\text{-}gr}(T_o, \mathbb{G}_{mk}) \quad ,$$

alors $\underline{M}'$ est le groupe constant défini par M' :

$$\underline{M}' = M'_S \quad .$$

On peut d'ailleurs noter que, puisque T_o et T'_o sont isogènes (2.2.6), T'_o est déployé si T_o l'est, de sorte qu'il y a lieu d'introduire également dans ce cas

(5.5.4) $$M = \mathrm{Hom}_{k\text{-gr}}(T'_o, \mathbb{G}_{mk}) \quad ,$$

et on aura alors

$$\underline{M} = M_S \quad .$$

Ceci posé, on aura évidemment, pour tout entier n, des isomorphismes

(5.5.5) $$\underline{M}'_n \simeq D(T_n) \quad , \quad \underline{M}_n \simeq D(T'_n) \quad ,$$

où T'_n est défini en termes de A' comme T_n en termes de A (5.1.2), d'où on déduit des isomorphismes canoniques (où on pose $\mathbb{Z}_\ell(1) = T_\ell(\mathbb{G}_{mS})$) :

(5.5.6) $$T_\ell(T_n) \simeq \check{\underline{M}}'_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell(1) \quad , \quad T_\ell(T'_n) \simeq \check{\underline{M}}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell(1) \quad ,$$

et par passage à la limite sur n des isomorphismes canoniques :

(5.5.7) $$\begin{cases} T_\ell(A^o)^t = T_\ell(\hat{T}) \simeq \check{\underline{M}}' \otimes \mathbb{Z}_\ell(1) \\ T_\ell(A'^o)^t = T_\ell(\hat{T}') \simeq \check{\underline{M}} \otimes \mathbb{Z}_\ell(1) \end{cases} \quad .$$

Dans le cas de la réduction semi-stable, on en conclut par dualité, en utilisant le théorème d'orthogonalité 5.2 et la relation (5.2.2), des isomorphismes canoniques :

(5.5.8) $$\begin{cases} T_\ell(A_K)/T_\ell(A_K)^f \simeq \underline{M}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \\ T_\ell(A')/T_\ell(A'_K)^f \simeq \underline{M}'_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \end{cases} \quad .$$

On trouve de même, grâce à la même formule (5.2.2), des isomorphismes canoniques :

(5.5.9) $$\begin{cases} T_\ell(A_K)/T_\ell(A_K)^t \simeq D(T_\ell(A'_K)^f) \\ T_\ell(A'_K)/T_\ell(A'_K)^t \simeq D(T_\ell(A_K)^f) \end{cases} \quad ,$$

où on se rappelera que les groupes $T_\ell(A_K)^f$ et $T_\ell(A'_K)^f$ qui figurent au second membre sont les restrictions à η de pro-ℓ-groupes de Barsotti-Tate définis sur S, $T_\ell(A^o)^f$ et $T_\ell(A'^o)^f$ respectivement ; la lettre D désigne ici les duals au sens des pro-groupes de Barsotti-Tate, savoir $\underline{\mathrm{Hom}}(- , \mathbb{Z}_\ell(1))$. Ainsi :

Proposition 5.6. *Supposons S complet et que A_K ait réduction semi-stable sur S. Alors pour tout nombre premier ℓ (qui peut être égal à la caractéristique résiduelle de S), le pro-ℓ-groupe de Barsotti-Tate $T_\ell(A_K)^t$ est la fibre générique d'un pro-groupe de Barsotti-Tate sur S, "de type torique", donné par (5.5.7), tandis que $T_\ell(A_K)/T_\ell(A_K)^f$ est la fibre générique d'un pro-groupe de Barsotti-Tate sur S de type pro-étale, donné par (5.5.8). Enfin les groupes $T_\ell(A_K)^f$ et $T_\ell(A_K)/T_\ell(A_K)^t$ sont les fibres génériques de pro-groupes de Barsotti-Tate définis sur S, égaux respectivement à $T_\ell(A^o)^f$ et à $D(T_\ell(A'^o)^f) = \underline{\mathrm{Hom}}\,(T_\ell(A'^o)^f, \mathbb{Z}_\ell(1))$.*

5.6.1. On notera qu'il revient au même pour le revêtement étale S' de déployer $T_\ell(A_K)^t$ ou de déployer $T_\ell(A_K)/T_\ell(A_K)^f$, car cela signifie respectivement que S' déploye les groupes constants tordus $\underline{M}$ et $\underline{M}'$, or ceux-ci sont isogènes, puisque T_o et T'_o le sont. On voit en même temps qu'il existe une plus petite extension étale S' de S qui fait l'affaire.

Signalons aussi la conséquence facile suivante des définitions de 2.2.3 :

Proposition 5.7. Supposons A^o ℓ-divisible, S hensélien. Soit F_K un faisceau ℓ-adique constructible sur K qui soit "non ramifié" i.e. qui se prolonge en un faisceau ℓ-adique constant tordu F sur S, et soit $u: F_K \longrightarrow T_\ell(A_K)$ un homomorphisme de pro-groupes, alors u se factorise en un homomorphisme de F dans $T_\ell(A_K)^f$.

En effet, on aura

(5.7.1) $u = (u(\nu))_{\nu\geq 0}$, avec $u(\nu): F_K(\nu) \longrightarrow T_\ell(A_K)(\nu) = {}_{\ell^\nu}A_K$.

Par la propriété universelle de A, comme $F(\nu)$ est étale donc lisse sur S, le morphisme $u(\nu)$ provient d'un homomorphisme

$$v(\nu) : F(\nu) \longrightarrow {}_{\ell^\nu}A \quad ,$$

et par définition de la partie fixe, cet homomorphisme se factorise en

$$v(\nu) : F(\nu) \longrightarrow ({}_{\ell^\nu}A)^f \quad .$$

Comme l'image du morphisme induit sur les fibres spéciales tombe dans la partie infiniment ℓ-divisible de A_o, on conclut que $v(\nu)$ se factorise même par $({}_{\ell^\nu}A^o)^f$. Par passage à la limite sur ν, on trouve un homomorphisme

$$v: F \longrightarrow T_\ell(A^o)^f \quad ,$$

et le morphisme induit sur les fibres génériques donne évidemment la factorisation cherchée.

Remarques 5.7.2. Lorsque $\ell \neq p$, il est clair que la propriété 5.7 du sous-pro-groupe $T_\ell(A_K)^f$ de $T_\ell(A_K)$ caractérise celui-ci de façon unique, comme le plus grand sous-faisceau ℓ-adique de $T_\ell(A_K)$ qui soit "non ramifié". Lorsque $\ell = p$, l'énoncé 5.7 cesse d'être bien raisonnable, et on va donner une propriété nettement plus forte que celle énoncée dans 5.7, qui pourra alors servir de caractérisation intrinsèque de la partie fixe de $T_p(A_K)$ (en termes de la seule structure de pro-groupe de Barsotti-Tate de $T_p(A_K)$), - du moins dans le cas d'inégales caractéristiques :

Théorème 5.8. (M. RAYNAUD). *Soit A_K un schéma abélien à réduction semi-stable sur le corps des fonctions K d'un trait hensélien S. Soit ℓ un nombre premier (le cas intéressant étant celui où $\ell = p$), et considérons le pro-ℓ-groupe de Barsotti-Tate $X_\eta = T_\ell(A_K)$ et sa "partie fixe" X_η^f, qui est la fibre générique du pro-ℓ-groupe de Barsotti-Tate $X^f = T_\ell(A^o)^f$. Supposons, si $\ell = p$, qu'on ait car. $K = 0$ (de sorte que nous disposons sur S du théorème de TATE [33, th.4]). Soit F un pro-ℓ-groupe de Barsotti-Tate sur S. Alors tout homomorphisme $F_\eta \longrightarrow X_\eta$ se factorise par X_η^f*

Passant aux ind-ℓ-groupes associés aux pro-ℓ-groupes de Barsotti-Tate envisagés, l'énoncé précédent devient équivalent au suivant, grâce au théorème cité de TATE :

Corollaire 5.9. *Si F est un ind-ℓ-groupe de Barsotti-Tate, alors tout homomorphisme $u_\eta : F_\eta \longrightarrow A_\eta$ se prolonge (de façon unique) en un homomorphisme $u : F \longrightarrow A$.*

En d'autres termes, la propriété "néronienne" caractéristique (1.1.2) du modèle de Néron reste valable pour des homomorphismes de ind-schémas en groupes de Barsotti-Tate, sans hypothèse de lissité sur celui-ci. (Seul le cas des groupes ind-étales résulterait directement de la définition.)

Remarque 5.9.1. En fait, M. RAYNAUD démontre 5.9 sans supposer A_K à réduction semi-stable, et même pour tout schéma en groupes néronien A sur S (dont la fibre générique n'a pas besoin d'être un schéma abélien) ; bien sûr, il est également inutile dans la formulation 5.9 que S soit hensélien. La démonstration de RAYNAUD de ce cas plus général procède par réduction au cas particulier envisagé dans 5.8, en utilisant une propriété inédite dans la construction des modèles de Néron. Nous nous bornerons ici à donner la démonstration de RAYNAUD de 5.9.

Démonstration de 5.9. On sait [33] que F est une extension d'un groupe de Barsotti-Tate F' qui est ind-étale par un groupe de Barsotti-Tate F'' à fibre spéciale connexe, de sorte que pour tout entier n, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F''(n) \longrightarrow F(n) \longrightarrow F'(n) \longrightarrow 0 \qquad ,$$

avec F'(n) connexe et $F''(n)_o$ purement infinitésimal. L'homomorphisme donné u_η se définit par une suite d'homomorphismes

$$u_\eta(n) \ : \ F(n)_\eta \longrightarrow A_\eta \qquad ,$$

et tout revient à prolonger séparément ceux-ci en des $u(n) \ : \ F(n) \longrightarrow A$. Le lemme 5.9.2 ci-dessous nous ramène alors à prouver que l'homomorphisme $u''_\eta \ : \ F''_\eta \longrightarrow A_\eta$ induit par u_η se prolonge en $u'' \ : \ F'' \longrightarrow A$. Par suite, on peut supposer F à fibre spéciale connexe.

Nous pouvons considérer u_η comme un homomorphisme de F_η dans le ind-ℓ-groupe de Barsotti-Tate Y_η associé à $X_\eta = T_\ell(A_K)$, et considérer alors le composé

$$(*) \qquad v_\eta : F_\eta \longrightarrow Y_\eta \longrightarrow Y_\eta/Y_\eta^f \quad .$$

En vertu de 5.6 ce dernier groupe se prolonge en un groupe de Barsotti-Tate ind-étale Z sur S (savoir $\underline{M} \otimes_{\mathbb{Z}} (Q_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$). En vertu du théorème de TATE cité dans 5.8, l'homomorphisme (*) se prolonge alors en un homomorphisme

$$v : F \longrightarrow Z \quad .$$

Comme F est à fibre spéciale connexe et que Z est ind-étale, ce morphisme est nul. Donc il en est de même de v_η, donc u_η se factorise par Y_η^f. C'est ce qu'il fallait démontrer !

Reste à prouver le

Lemme 5.9.2. *Soient S un trait, A un schéma en groupes néronien sur S (1.1.2),*

$$1 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 1$$

une extension de schémas en groupes sur S, avec G'' lisse,

$$u : G' \longrightarrow A$$

un homomorphisme de groupes, et

$$v_\eta : G_\eta \longrightarrow A_\eta$$

un homomorphisme de groupes prolongeant u_η. Supposons que l'extension de G'' par A image de l'extension G par u soit représentable (*), - ce qui est le cas par exemple si G $\longrightarrow$ G'' admet une section localement pour la topologie "finie localement libre" (cf. SGA 3 IV 6.3) et si A est quasi-projectif sur S. Alors il existe un unique morphisme de groupes

$$v : G \longrightarrow A$$

prolongeant v_η et u.

(*) Des résultats inédits de M. RAYNAUD impliquent d'ailleurs que cette condition est toujours satisfaite.

En effet, la dernière hypothèse faite nous ramène au cas où $G'=A$, u = identité, et où $v_\eta : G_\eta \longrightarrow A_\eta$ est donc une projection, qu'on se propose de prolonger en une projection $v: G \longrightarrow A$. Or G est lisse comme extension de deux schémas en groupes lisses, de sorte que la conclusion résulte de la définition de la propriété néronienne de A.

Corollaire 5.10. Soient A_K un schéma abélien sur le corps des fonctions K d'un trait S, ℓ un nombre premier. Lorsque $\ell = p$, on suppose car.K = 0, pour pouvoir disposer du théorème de TATE déjà invoqué dans 5.8. Pour que A_K ait bonne réduction sur S, il faut et il suffit que le pro-ℓ-groupe de Barsotti-Tate $T_\ell(A_K)$ "ait bonne réduction sur S", i.e. se prolonge en un groupe de Barsotti-Tate sur S.

(C'est le résultat conjecturé dans [8, 4.9].)

La nécessité étant claire, il reste à prouver la suffisance ; notons d'ailleurs que le cas $\ell \neq p$ a déjà été traité (2.2.9). On peut supposer S hensélien (2.2.9). Supposons d'abord que A_K ait réduction semi-stable sur S. Alors 5.8 appliqué à F = X nous montre qu'on a $T_\ell(A_K) = T_\ell(A_K)^f$, ce qui signifie aussi que le tore maximal de A_o est nul, i.e. que A_o^o est un schéma abélien, de sorte que la conclusion résulte de (2.2.9 (iii°)). Traitons maintenant le cas général. En vertu de 2.2.9 on peut supposer évidemment S strictement local. Soit K' une extension galoisienne finie telle que $A_{K'}$ ait réduction semi-stable sur le normalisé S' de S dans K' (3.6). Si A* désigne le modèle de Néron correspondant, G = Gal(K'/K) opère sur la situation (A*,S'), donc sur

A^{*o}_{o}, et d'après ce qu'on a vu dans 4.1, il suffit de prouver que G opère trivialement sur ce dernier, ce qui impliquera en effet que A_K a réduction semi-stable, i.e. qu'on est dans le cas déjà traité. Or soit X un groupe de Barsotti-Tate sur S qui prolonge $X_\eta = T_\ell(A_K)$. En vertu du théorème d'unicité de TATE déjà invoqué, il existe un (unique) isomorphisme

$$X \times_S S' \simeq T_\ell(A^{*o})$$

qui induit l'identité sur les fibres génériques. Par transport de structure, cet isomorphisme est compatible avec les opérations de G. Or il est clair que X opère trivialement sur la fibre spéciale de $X \times_S S'$, donc il opère trivialement sur $T_\ell(A^{*o}_{o})$, d'où il résulte évidemment qu'il opère trivialement sur A^{*o}_{o}, ce qui achève la démonstration.

__Remarque__ 5.11. Une fois le théorème de TATE prouvé sans hypothèse restrictive sur car.K, les résultats précédents 5.8, 5.9, 5.10, ainsi que 5.13 plus bas, seraient évidemment établis sans une telle restriction.

Posons une définition, qui pourra être encore utile ailleurs :

__Définition__ 5.12. __Soient__ S __un trait hensélien__, ℓ __un nombre premier__, X_η __un pro-__ℓ__-groupe de Barsotti-Tate sur le point générique__ η __de__ S. __On dit que__ X a bonne réduction sur S __si__ X __se prolonge en un groupe de Barsotti-Tate sur__ S (cf. 5.10), __qu'il a__ bonne réduction virtuelle sur S, __s'il existe une filtration__ $(\mathrm{Fil}^i(X_\eta))_{i \geq 0}$ __de__ X __par des sous-groupes de Barsotti-Tate stricts__ (*) __telle que les groupes de Barsotti-Tate__ $\mathrm{Gr}^i(X_\eta) = \mathrm{Fil}^i(X_\eta)/\mathrm{Fil}^{i+1}(X_\eta)$ __aient bonne réduction sur__ S ; __si on peut choisir la filtration de sorte qu'elle soit de longueur__ $\leq n$ (__i.e. que__ n

(*) i.e. qui sont des sous-objets comme systèmes projectifs, i.e. terme à terme.

au plus parmi les Gr^i sont $\neq$ 0), on dit que X a bonne réduction virtuelle d'échelon n sur S. Enfin on dit que X a bonne réduction essentielle sur S (resp. bonne réduction virtuelle essentielle, resp. bonne réduction virtuelle essentielle d'échelon n) s'il existe une extension finie K' telle que $X_{K'}$ ait bonne réduction (resp. bonne réduction virtuelle, resp. bonne réduction virtuelle d'échelon n) sur le normalisé S' dans K'.

5.12.1. Lorsque $\ell \neq p$, de sorte que la catégorie des pro-ℓ-groupes de Barsotti-Tate sur η resp. sur S s'interprète en termes de représentations ℓ-adiques de $\pi = \pi_1(\eta)$ resp. de $\pi_o = \pi_1(S)$, on voit aussitôt que les six notions introduites s'expriment en termes de la représentation naturelle du groupe d'inertie I sur $X_\eta(\overline{K})$, par la propriété respectivement que celle-ci soit triviale, resp. unipotente, resp. unipotente d'échelon n, resp. essentiellement triviale, resp. essentiellement unipotente, resp. essentiellement unipotente d'échelon n.

5.12.2. Supposons qu'on prenne $X_\eta = T_\ell(A_K)$, où A_K est un schéma abélien sur K. On a vu dans 5.6 que si A_K a réduction semi-stable sur S, alors X_η a bonne réduction virtuelle d'échelon 2 (et on verra une réciproque dans un instant) ; donc en vertu du théorème de réduction semi-stable
e 3.6, X_η a bonne réduction essentielle virtuelle d'échelon 2. Il convient de regarder cet énoncé comme donnant la "bonne" formulation du théorème de monodromie géométrique III , dans le cas du H^1 d'un schéma propre et lisse sur K, sans exclure le cas $\ell = p$ (dont il n'avait pas été question dans loc. cit.). Il conviendrait de reformuler également le théorème

(ou plutôt, pour l'instant, la conjecture) de monodromie géométrique pour les H^i supérieurs, donné dans III , de façon à tenir compte des coefficients "p-adiques", comme il a été dit dans 0.4.

Donnons un énoncé récapitulatif des relations entre les propriétés de réduction des schémas abéliens sur K, et des groupes de Barsotti-Tate associés :

Proposition 5.13. *Soient* S *un trait hensélien,* A_K *un schéma abélien sur son corps des fractions,* ℓ *un nombre premier. Lorsque* $\ell = p$, *on suppose que* K *est de car. nulle*(cf. 5.11).

a) *Pour que* A *ait* bonne réduction sur S (2.2.9), *il faut et il suffit que* $T_\ell(A_K)$ *ait bonne réduction sur* S (5.12).

b) *Pour que* A_K *ait* bonne réduction essentielle sur S, *i.e. qu'il existe une extension finie* K' *de* K *telle que* $A_{K'}$ *ait bonne réduction sur le normalisé* S' *de* S *dans* K', *il faut et il suffit que* $T_\ell(A_K)$ *ait bonne réduction essentielle sur* S (5.12). *On peut alors prendre pour* K' *une extension finie* séparable *de* K.

c) *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

1) A *a* réduction semi-stable sur S (3.4).

2) $T_\ell(A_K)$ *a bonne réduction virtuelle d'échelon* 2 *sur* S (5.12).

3) $T_\ell(A_K)$ *a bonne réduction virtuelle sur* S.

Démonstration. Le cas a) n'est autre que 5.10 et a été mis pour mémoire.

b) La première assertion est une conséquence triviale de a) et des définitions. Pour prouver la dernière assertion dans b), on peut supposer que $\ell \neq p$, mais alors grâce à a) il suffit de prendre pour K' une extension finie séparable de K correspondant à un sous-groupe ouvert π' de $\pi = \mathrm{Gal}(\overline{K}/\overline{K})$ dont l'intersection avec le groupe d'inertie I est contenue dans le noyau de la représentation de I sur $T_\ell(A_K(\overline{K}))$, lequel est ouvert par hypothèse (cf. 5.12.1).

c) On a déjà signalé que 1) $\Longrightarrow$ 2) (5.12.2), il est trivial que 2) $\Longrightarrow$ 3), reste à prouver que 3) $\Longrightarrow$ 1). Pour $\ell \neq p$, ce n'est autre que le critère galoisien de réduction semi-stable 3.5. Pour $\ell = p$, on peut procéder ainsi. Choisissons un nombre premier $\ell' \neq p$, et appliquons à celui-ci les considérations de 4.1. Supposons S strictement local, ce qui est loisible (3.4.0), prenons une extension galoisienne finie K' de K, de groupe G, telle que $A_{K'}$ ait réduction semi-stable. Il faut prouver que la représentation de G sur les trois quotients intervenant dans (4.1.1) est triviale, ou ce qui revient au même, que la représentation somme est triviale, ou encore, que la trace de cette dernière est "triviale", i.e. constante. Or nous avons vu dans 4.3 a) que cette fonction trace est indépendante du choix de $\ell' \neq p$, et dans 6.4 plus bas nous indiquons une méthode de calcul de cette fonction en termes de $T_p(A_K)$ également. Ce calcul donne trivialement une fonction constante dans le cas où $T_p(A_K)$ a bonne réduction virtuelle, et cela achève la démonstration

<u>Remarque</u> 5.13.1. Il semble plausible que si X_η est un pro-ℓ-groupe de Barsotti-Tate sur η, qui a bonne réduction virtuelle sur S, et bonne réduction virtuelle essentielle d'échelon n, alors il a bonne réduction virtuelle d'échelon n . (C'est vrai pour $\ell \neq p$.)

Le résultat suivant, conséquence facile de 5.7 et du théorème de réduction semi-stable 3.6, m'a été signalé par J.P. SERRE :

Proposition 5.14. (Critère de bonne réduction essentielle.) Soient S un trait de corps de fonctions K, A_K un schéma abélien sur K, ℓ un nombre premier distinct de la caractéristique de K.

a) Supposons $\ell \neq p = \mathrm{car}.k$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) A_K a essentiellement bonne réduction sur S, i.e. il existe une extension finie séparable K' de K telle que $A_{K'}$ ait bonne réduction relativement au normalisé S' de S dans K'.

(ii) L'action du groupe d'inertie I sur $U_\ell = T_\ell(A(\overline{K}))$ est essentiellement triviale, i.e. est triviale sur un sous-groupe ouvert de I, i.e. se fait par l'intermédiaire d'un groupe quotient fini Γ de I.

(iii) L'action du groupe d'inertie I sur $U_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ est semi-simple.

b) Supposons $\ell = p$, alors, si $n = \dim A_K \neq 0$, l'image de I dans le groupe des automorphismes de U_ℓ n'est pas finie, plus précisément son image dans le groupe $\mathbb{Z}_\ell$ des automorphismes de $\overset{2n}{\wedge} U_\ell$ est d'indice fini. Pour que A_K ait essentiellement bonne réduction, il suffit (mais il n'est nullement nécessaire) que l'action de I sur $U_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ soit semi-simple.

Démonstration. Dans le cas $\ell \neq p$, l'équivalence de (i) et (ii) est une conséquence triviale du critère de bonne réduction 2.2.9, et (ii) implique (iii) puisque $\mathbb{Q}_\ell$ est de caractéristique nulle. L'homomorphisme $\pi = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^* \simeq \mathrm{Aut}(\overset{2n}{\wedge} U_\ell)$ est égal à χ^n, où χ est induit par le caractère

$$\mathbb{Z}_\ell^* = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_\ell(1))$$

provenant de l'action de I sur les racines ℓ^ν-èmes de l'unité, et on sait que si $\ell = p$, l'image de I par ce caractère est bien d'indice fini [33] ; le fait que l'action de I sur $U_p \otimes \mathbb{Q}_p$ puisse ne pas être semi-simple, même si A_K est une courbe elliptique avec bonne réduction, se voit dans [28, IV A 2.4]. Il reste à prouver que (quel que soit ℓ) (iii) implique (i). Pour ceci, nous utilisons le théorème de réduction semi-stable 3.6, qui nous permet de nous ramener aussitôt au cas où A_K a une réduction semi-stable sur S (puisque l'hypothèse (iii) est conservée en remplaçant K par une extension séparable finie K', i.e. I par un sous-groupe ouvert I' ( ). Lorsque $\ell \neq p$, l'action de I sur $U_\ell \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est unipotente (3.5 (v)) et semi-simple, donc triviale, et on gagne par le critère de bonne réduction 2.2.9. Donnons une démonstration valable sans restriction sur ℓ, et qui donne un résultat légèrement plus précis :

Corollaire 5.15. Les notations étant celles de 5.14, supposons que A_K ait une réduction semi-stable sur S, et que la partie fixe $(U_{\ell\mathbb{Q}_\ell})^f \stackrel{\mathrm{dfn}}{=} (U_\ell^f)_{\mathbb{Q}_\ell}$ admette un supplémentaire dans $U_{\ell\mathbb{Q}_\ell}$, stable sous I. Alors A_K a bonne réduction.

Il suffit de prouver que sous ces conditions, on a $U_\ell = U_\ell^f$, ce qui par 5.6 signifie en effet que la partie torique T_o de A_o^o est nulle, donc que A_o^o est un schéma abélien, ce qui implique bien que A est un schéma abélien (2.2.9). On peut évidemment supposer k séparablement clos. Alors l'intersection du supplémentaire postulé dans 5.15 avec U_ℓ

définit un sous-pro-ℓ-groupe F_K de $T_\ell(A_K)$, isogène à la partie cotorique $T_\ell(A_K)/T_\ell(A_K)^f$. Comme celle-ci est proétale non ramifiée en vertu de 5.6, il en est de même de F, et on conclut par 5.7 que F_K est contenu dans $T_\ell(A_K)^f$, donc que $F_K = 0$ ce qui prouve bien que U_ℓ est égal à sa partie fixe.

6. <u>Remarques sur la construction de la partie torique et la partie fixe de</u> $T_p(A)$ <u>dans le cas de réduction non semi-stable</u>.

6.1. La construction de la partie torique de $T_\ell(A_K)$ donnée dans 5.1 garde un sens dès que S est complet, sans supposer A^o ℓ-divisible i.e. (dans le cas $p = \ell$) sans supposer qu'on soit dans le cas de la réduction semi-stable (hypothèse qui avait servi seulement pour pouvoir formuler le théorème d'orthogonalité 5.2). On peut d'ailleurs construire $T_p(A_K)^t$ en supposant seulement S hensélien, en montrant que la partie torique $T_p(A_{\hat{K}})^t$ sur le complété, construit par la méthode de 5.1, provient d'un sous-pro-groupe de Barsotti-Tate de $T_p(A_K)$ (évidemment déterminé de façon unique). Plus précisément, on arrive à construire un p-pro-groupe de Barsotti-Tate $T_p(A)^t$ <u>sur</u> S et un homomorphisme $T_p(A)^t \longrightarrow T_p(A)$ de systèmes projectifs, qui soit un monomorphisme terme à terme, et qui par image inverse sur $\hat{S}$ donne les objets analogues construits par la méthode de 5.1. Ceci se voit en paraphrasant la construction de 5.1, mais au lieu de relever le tore maximal de T_o de A_o tout entier, on se borne, pour tout entier $\nu \geq 0$, à relever le sous-groupe ${}_{p^\nu}T_o$ en un sous-groupe de type multiplicatif $({}_{p^\nu}A^o)^t$ de ${}_{p^\nu}A^o$. Pour l'existence et l'unicité d'un tel relèvement, on note que le foncteur $(\mathrm{Sch})^o_{/S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$, $S' \longmapsto$ ensemble des sous-groupes finis de type multiplicatif de $A^o_{S'}$, est représentable par un schéma X de type fini sur S (cf. démonstration de SGA 3 XI 3.12 a)) qui est étale sur S en vertu de SGA 3 IX 3.6 bis ; il y a par suite une section et une seule de X sur S qui prolonge une section donnée de X_s sur s, ce qui prouve notre assertion. Ce raisonnement montre d'ailleurs, plus généralement, que pour tout sous-groupe <u>fini et de type multiplicatif</u> H_o de A_o, il y a un unique sous-groupe fini et de type multiplicatif H de A qui le prolonge ; par suite, pour tout sous-p-groupe de Barsotti-Tate H_o de A_o qui soit <u>toroïdal</u> (i.e. dont les composantes sont de type multiplicatif), il existe un unique sous-p-groupe de Barsotti-Tate H de A qui le prolonge, et qui fournit par suite un sous-p-groupe de Barsotti-Tate de ${}_{p^\infty}A_K$, ou, si on préfère, un sous-p-pro-groupe de Barsotti-Tate de $T_p(A_K)$. Ce procédé s'applique notamment au cas où H_o est le plus grand sous-p-groupe de Barsotti-Tate toroïdal de A_o, lequel s'obtient en prenant le plus grand sous-groupe p-divisible $\overline{A_o}$ de $A_o{}^o$ ($= p^N A_o{}^o$ pour N grand), et la "partie toroïdale" de ${}_{p^\infty}\overline{A_o}$ (définie par exemple grâce à SGA 3 XVII 7.2.1). On obtient ainsi un sous-groupe de Barsotti-Tate de ${}_{p^\infty}A_K$, qu'on pourrait appeler la <u>partie toroïdale</u> de ce dernier.

6.2. Reprenons le plus grand sous-schéma en groupes p-divisible $\overline{A_o}$ de $A_o{}^o$, et considérons le p-groupe de Barsotti-Tate $F_o = {}_{p^\infty}(\overline{A_o})$; il est immédiat qu'il peut être caractérisé comme le plus grand sous-p-groupe de Barsotti-Tate de A_o (ou de $A_o{}^o$). Il est naturel de se poser la question de prolonger ce groupe de Barsotti-Tate en un sous-groupe de Barsotti-Tate F de A, qui jouerait alors le rôle joué par la <u>partie fixe</u> $T_{\ell}(A)^{f}$ de (2.2.3.2) dans le cas où A^{o} est ℓ-divisible. Dans le cas semi-stable, où on a $\overline{A_o} = A_o^{\ o}$, la question se résoud par l'affirmative par la méthode de 2.2. Dans le cas général, lorsque le problème envisagé a une solution, on voit facilement qu'elle est unique, et que les sous-pro-groupes correspondants de $T_p(A_K)$ et de $T_p(A'_K)$ (qui méritent alors encore le nom de <u>partie fixe</u> des pro-groupes envisagés) satisfont encore au théorème d'orthogonalité 5.2, enfin que la partie fixe $T_p(A_K)^f$ peut encore se caractériser comme indiqué dans 5.8.

6.2.1. Montrons cependant qu'en général le problème envisagé n'a pas une solution affirmative, i.e. qu'<u>il n'est pas possible en général de définir la partie fixe</u> $T_p(A)^f$ (cas de la réduction non semi-stable). En effet, en vertu d'un théorème de relèvement de SERRE-TATE [30], lorsque S est complet, l'existence de la partie fixe équivaut à celle de relèvements infinitésimaux $\overline{A_n}$ de $\overline{A_o}$ dans les A_n, ou encore à celle d'un schéma en groupes lisse $\overline{A}$ sur S, extension d'un schéma abélien par un tore T, de fibre spéciale $\overline{A_o}$, et d'un homomorphisme formel $\hat{\overline{A}} \longrightarrow \hat{A}$ prolongeant l'inclusion sur les fibres spéciales. Donc, dans le cas où $\overline{A_o}$ est un schéma abélien i.e. où $T_o = 0$, cela équivaut à l'existence d'un schéma abélien $\overline{A}$ prolongeant $\overline{A_o}$ et d'un homomorphisme $\overline{A} \longrightarrow A$ prolongeant l'inclusion des fibres spéciales. Il suffira donc de donner un cas où $T_o = 0$, où $A_o^{\ o}$ est non unipotent et non propre, et où A_K est simple sur K.

6.2.2. Voici un exemple, dû à M. RAYNAUD, basé sur l'observation que si S est un trait, S' le normalisé de S dans une extension finie séparable K' de K, et A' un schéma abélien sur S', alors le schéma en groupes $A = \prod_{S'/S} A'/S'$ sur S est néronien, i.e. s'identifie au modèle de Néron de sa fibre générique (qui est bien un schéma abélien). La vérification de ce fait est immédiate en termes des définitions et du fait que A' lui-même est néronien sur S'. Alors $A_o = \prod_{S'_s/s}(A' \times_{S'} S'_s)/S'_s$ est une extension d'un schéma abélien, non nul si $A' \neq 0$, par un schéma unipotent connexe, non nul si $A' \neq 0$ et si S' est ramifié sur S. Il suffira donc de donner un exemple où $A' \neq 0$, S' ramifié sur S (trait local complet), et $A_K = \prod_{K'/K} A'_{K'}/K'$ est simple sur K'. Or prenons pour K' une extension quadratique ramifiée de S (il en existe toujours), pour A' une courbe elliptique sur S'. Alors A est de dimension relative 2, et dire que A_K est simple sur K signifie que l'on ne peut trouver un homomorphisme non nul $B_K \longrightarrow A_K$, où B_K est un schéma abélien de dimension 1 sur K. Or la donnée d'un tel homomorphisme revient à la donnée d'un homomorphisme non nul $B_{K'} \longrightarrow A'_{K'}$, qui sera donc nécessairement une isogénie, i.e. la condition que A_K soit simple sur K signifie que $A'_{K'}$ ne soit pas isogène à une courbe elliptique provenant de K. Mais dans le cas contraire, l'invariant j de A' serait algébriquement dépendant (sur le corps premier) du conjugué $\bar{j}$ de j par le K-automorphisme non trivial de K', et si j est choisi tel que $a = j + \bar{j} = \mathrm{Tr}_{K'/K}\, j$ soit transcendant sur le corps premier, il revient au même de dire que j est algébriquement dépendant de a. Or, pour des raisons de cardinalité, il existe un élément

$a \in V$ qui soit transcendant sur le sous-corps premier P de K, puis un élément b de V' (normalisé de V dans K') qui soit transcendant sur $P(a)$ et tel que $\mathrm{Tr}_{V'/V}\, b = 0$, et il suffit de prendre $j = a + b \in V'$. On peut d'ailleurs supposer que $b \in \underline{r}(V')$, et que l'image de a dans $k = V/\underline{m}$ est un élément donné de k, qu'on choisira distinct des valeurs exceptionnelles $j_o = 0$ et $j_o = 12^3$ (NB c'est possible même si k n'a que deux éléments, car alors les deux valeurs envisagées de j_o coïncident). Donc l'image j_o de j dans $k(s')$ est $\neq 0, 12^3$, et on sait alors qu'il existe bien une courbe elliptique sur S' d'invariant j.

6.3. Revenons au cas où on suppose seulement S hensélien sans plus. En analogie avec des définitions de 4.1 dans le cas $\ell \neq p$, on peut définir alors une filtration de $T_p(A_K)$,

$$T_p(A_K) \supset T_p(A_K)^{ef} \supset T_p(A_K)^{et} \supset 0 \tag{6.3.1}$$

par des sous-pro-groupes (stricts) de Barsotti-Tate, appelés respectivement la partie <u>essentiellement fixe</u> et la partie <u>essentiellement torique</u> de $T_p(A_K)$. Pour ceci, on choisit une extension galoisienne finie K' de K telle que $A_{K'}$ ait une réduction semi-stable sur le normalisé S' de S dans K', de sorte que la partie fixe $T_p(A_{K'})^f$ de $T_p(A_{K'}) = (T_p(A_K))_{K'}$ est définie (2.2.3), ainsi que la partie torique (6.1), qui n'est d'ailleurs autre que l'orthogonale de la partie fixe $T_p(A'_K)^f$ de $T_p(A'_K)$ (5.2). Il est clair que l'on a $T_p(A_{K'})^t \subset T_p(A_{K'})^f$ (résulte de 5.3, ou directement de la construction 6.1 de la partie torique), et que le groupe de Galois de K'/K laisse invariants ces deux sous-pro-groupes stricts de $(T_p(A_K))_{K'}$.

Donc par descente on en déduit la filtration (6.3.1) voulue. Elle ne dépend pas du choix de K', comme il résulte de la propriété 3.3 de la réduction semi-stable. De plus, on aura évidemment par descente la propriété d'orthogonalité

(6.3.2) $$T_p(A_K)^{et} = (T_p(A'_k)^{ef})^{\perp},\quad T_p(A_K)^{ef} = (T_p(A'_k)^{et})^{\perp} \quad .$$

Il serait possible de donner une caractérisation intrinsèque de la filtration (6.3.1), en termes du pro-groupe de Barsotti-Tate $X = T_p(A_K)$ sur le corps des fractions K de S, dans l'esprit de 5.8, - du moins, pour l'instant, dans le cas d'inégales caractéristiques : la partie essentiellement fixe est le plus grand sous-pro-groupe de Barsotti-Tate qui ait "essentiellement bonne réduction sur S", i.e. qui, après extension finie séparable K' de K, donne un pro-groupe de Barsotti-Tate $X_{K'}$, ayant bonne réduction sur le normalisé S' de S dans K, i.e. se prolonge en un pro-groupe de Barsotti-Tate sur S' (nécessairement unique à isomorphisme unique près, par le théorème de TATE [33, th. 4] déjà cité). La partie essentiellement torique se définit alors en termes de la partie essentiellement fixe par orthogonalité (6.3.2).

Signalons aussi la conséquence immédiate suivante de 5.8 et des définitions, qui pour $\ell = p$ se réduit d'ailleurs à 5.12 a) :

<u>Proposition</u> 6.3.3. <u>Soit</u> ℓ <u>un nombre premier</u>. <u>Si</u> $\ell = p$, <u>on suppose</u> car.K = 0 (*). <u>Pour que</u> A_K <u>ait essentiellement bonne réduction sur</u> S (5.12 a)), <u>il faut et il suffit que la partie essentiellement fixe</u> $T_\ell(A_K)^{ef}$ (4.1.1 <u>et</u> 6.3.1) <u>soit égal à</u> $T_\ell(A_K)$ <u>tout entier</u>.

(*) Hypothèse sans doute inutile, cf. 5.11.

6.4. Notons que lorsque $\ell \neq p$, nous avons mis en évidence dans 4.3 a) une fonction à valeurs entières remarquable sur le groupe d'inertie I de S, d'ailleurs indépendante du choix de ℓ, et dont la connaissance, dans le cas d'un corps résiduel parfait, suffit à reconstruire l'exposant conducteur de A (4.5), en prenant le produit scalaire, sur un quotient assez grand $\Gamma = I/I'$ de I, de la fonction précédente et du conducteur d'Artin sur Γ (cf. (4.6.2)). Il peut être intéressant d'observer que cette fonction à valeurs entières sur I peut se réconstituer également par la connaissance de $T_\ell(A_K)$ pour $\ell = p$ - du moins (pour le moment) en inégales caractéristiques. Lorsque le corps résiduel k est fini, une observation analogue s'applique à la fonction à valeurs dans $\mathbb{Q}$, définie sur le sous-groupe $\pi^!$ de π formé des éléments dont l'image dans π_o est de la forme $f_q^{\,n}$ $(n \in \mathbb{Z})$, considérée dans 4.3 b). Indiquons le principe de la vérification de ces assertions. On utilise la filtration (6.3.1), et on est réduit à attacher une fonction convenable (sur I resp. sur $\pi^!$) à un p-pro-groupe de Barsoti-Tate Y sur K qui a "essentiellement bonne réduction sur S ", au sens précisé dans 6.5. (Y sera un des trois quotients provenant de la filtration (6.3.1).) Dans le cas de 4.3 a), on se ramène au cas d'un corps résiduel parfait (ou même algébriquement clos, si on veut) par extension résiduelle convenable dans S (EGA 0_{III} 10.3.1). Prenons alors une extension galoisienne finie K' de K telle que $Y_{K'}$ ait bonne réduction sur S', d'où un groupe de Barsotti-Tate $Y_{S'}$ sur S' et une opération de G sur $Y_{S'}$ compatible avec son action sur S'. Si k' est le corps résiduel de S', G opère (de façon non nécessairement fidèle) sur k' (le corps des invariants étant k), et sur $Y_{k'}$ da façon compatible avec son action sur k'. Or, d'après la théorie de DIEUDONNÉ [16 bis], au p-pro-groupe de Barsotti-Tate $Y_{k'}$ est canoniquement associé un module M libre de type fini (de rang égal au rang de $Y_{k'}$) sur l'anneau W(k') des vecteurs de Witt sur k', et G opère évidemment sur M de façon compatible avec ses opérations sur W(k') (via ses opérations sur k'). On en déduit une opération W(k')-linéaire du sous-groupe d'inertie Γ de G sur M (qui est un quotient du groupe d'inertie I), d'où une fonction trace sur Γ donc sur I, qui est la fonction cherchée.Elle est a priori à valeurs dans W(k') (*), mais coïncide avec la fonction analogue définie en termes des T_ℓ pour $\ell \neq p$, lorsque l'opération de G sur $Y_{S'}$ s'obtient à partir d'une opération de G sur un schéma en groupes lisse et p-divisible C' sur S', en prenant $Y = T_p(C')$ (cf. [25 bis, th.7 p.737]) ; elle est donc dans ce cas à valeurs entières. On procède de façon analogue dans le cas de 4.3 b) pour définir une fonction trace sur $\pi^!$, en utilisant le procédé de la démonstration de 4.3.2 pour "linéariser" l'opération dans M définie par un élément $g \in \pi$ qui se trouve au-dessus d'un $f_q^{\ n}$ avec $n \geq 0$.

7. L'extension de Raynaud $G^\natural$ sur S attachée au schéma abélien A_K à réduction semi-stable. Dualité des schémas abéliens B,B' sur S.

7.1. Soit S un schéma noethérien spectre d'un anneau V, séparé et complet pour la topologie définie par un idéal $\underline{m}$ de V. Soit A un schéma en groupes lisse sur S, A^o sa composante neutre, et supposons que $A_o/A_o^{\ o}$ soit fini (donc fini étale) sur S_o, et que $A_o^{\ o}$ soit une extension d'un schéma abélien

(*) En fait, il est immédiat que cette fonction est toujours à valeurs dans W(k), étant invariante par Gal(k'/k).

par un tore. Nous avons posé comme d'habitude $A_n = A \times_S S_n$, où $S_n = \mathrm{Spec}(V/\underline{m}^{n+1})$. Nous nous intéresserons surtout au cas où S est un trait, et où la fibre générique A_K est un schéma abélien à réduction semi-stable sur S, A étant le modèle de Néron de A_K.

Soit T_o le tore maximal de A_o, de sorte que $B_o = A_o^o/T_o$ est un schéma abélien. La construction de 5.1 s'applique alors pour fournir un sous-tore formel $\hat{T}$ du complété formel $\hat{A}$. On sait que pour tout n, le quotient

(7.1.1) $$B_n = A_n^o/T_n$$

est représentable (SGA 3 VI_A 3.2), plus précisément c'est un schéma plat et de type fini sur S_n, dont l'image inverse sur S_o est le schéma abélien B_o. Par suite B_n est un <u>schéma abélien</u> sur S_n, et pour n variable, les B_n se déduisent les uns des autres par changement de base, donc ils définissent un <u>schéma abélien formel</u>

(7.1.2) $$\hat{B} = (B_n)_{n \geq 0} \quad .$$

Nous allons donner des conditions impliquant que ce schéma abélien est <u>algébrisable</u> (EGA III 5.4.1), plus précisément que c'est le complété formel d'un schéma abélien projectif sur S, que nous noterons alors B. En vertu de loc.cit. B est déterminé à isomorphisme unique près (comme S-schéma ; la structure de groupe de $\hat{B}$ provient alors de façon unique d'une structure de groupe de B, en vertu de loc. cit. également). Ce schéma abélien B sera alors appelé <u>la partie abélienne</u> du schéma A, et parfois noté A^{ab}.

7.1.3. La projectivité de $\hat{B}$ signifie, en vertu de EGA III 5.4.5, que l'on peut trouver un Module inversible $\underline{\hat{M}}$ sur $\hat{B}$, i.e. une suite de Modules inversibles $\underline{M}_n$ sur les B_n qui se "recollent" pour n variable, qui soit ample relativement à S i.e. qui soit tel que $\underline{M}_o$ soit ample. L'idée naturelle serait de partir d'un Module inversible ample $\underline{M}$ de G, et de montrer que pour tout n, la restriction $\underline{L}_n$ de $\underline{L}$ à G_n provient par image inverse d'un Module inversible M_n sur B_n. J'ignore si de tels M_n existent nécessairement (et en doute fort). Nous allons suivre une méthode un peu différente, en construisant une polarisation de B, i.e. un système projectif de polarisations ρ_n des B_n qui se recollent. On sait alors [5] que les doubles de ces polarisations définissent canoniquement des Modules inversibles $\underline{M}_n$ (symétriques) sur les B_n, qui par leur nature canonique se recolleront nécessairement, et fourniront le $\underline{M}$ cherché.

Nous allons interpréter un élément de $NS(B_n/S_n)$ comme une correspondance divisorielle symétrique sur (B_n,B_n) [5], i.e. comme une biextension de (B_n,B_n) par $\mathbb{G}_{m\, S_n}$. En vertu de VIII 3.5, ces biextensions correspondent biunivoquement aux biextensions de (A_n,A_n) par $\mathbb{G}_{mS}$. Pour obtenir un système cohérent de telles biextensions W_n il suffit de partir d'une

(7.1.4) W, biextension symétrique de (A,A) par $\mathbb{G}_{mS}$,

en prenant les W_n se déduisant de W par les changements de base $S_n \longrightarrow S$. Nous devons de plus supposer que l'élément de $NS(B_o)$ défini par W_o est une polarisation de B_o pour obtenir ainsi une polarisation de $\hat{B}$.

Proposition 7.1.5. Avec les notations précédentes pour $S, A, \hat{B}$, supposons que S soit normal. Alors $\hat{B}$ est algébrisable, et le schéma abélien B sur S dont il provient est projectif sur S.

On peut évidemment supposer $A=A^{o}$, et S intègre. D'après M. RAYNAUD [23 XI 1.13], l'hypothèse que S est normal implique que A est quasi-projectif sur S. Soit donc $\underline{L}$ un Module inversible sur A qui est relativement ample, et formons le Module birigidifié $\delta(\underline{L}) = \pi^{*}(\underline{L})pr_1^{*}(\underline{L})^{-1}pr_2^{*}(\underline{L})^{-1}$ sur $A\times_S A$ comme dans VIII 4.12. Comme les fibres de A_o sont de rang unipotent nul, il en est de même de celles de A (résulte facilement de 3.1), donc en vertu de VIII 7.5, $\delta(\underline{L})$ définit une biextension W de (A,A), évidemment symétrique, qui en vertu de VIII 4.13 (i.e. essentiellement en vertu de RAYNAUD [23 XI 1.11]) satisfait à la condition d'amplitude voulue en les points de S_o.

Remarque 7.1.6. On peut prouver, sans hypothèse de normalité sur S, que $\hat{B}$ est toujours algébrisable, en se ramenant au cas normal comme dans 13.5.3 a).

7.2. Notons maintenant le

Lemme 7.2.1. Soient S le spectre d'un anneau noethérien V, séparé et complet pour la topologie définie par un idéal m de V, C la catégorie des schémas en groupes A sur S, lisses de type fini sur S, tels que A/A^{o} soit un schéma en groupes étale fini sur S et que A^{o} soit une extension d'un schéma abélien B par un tore isotrivial T (SGA 3 IX 1.1), C' la catégorie des groupes dans la catégorie des schémas formels de type fini (EGA I 10.3.3) sur Specf(A), et $A \longmapsto \hat{A}$ le foncteur de C dans C' "complété formel le long de $A_o = A \times_S S_o$ ", où $S_o = \mathrm{Spec}(V/\underline{m})$. Alors :

a) Le foncteur précédent est pleinement fidèle.

b) Soit $\mathcal{A}$ un objet de C', lisse sur $\hat{S} = \mathrm{Specf}(A)$ (i.e. tel que les schémas ordinaires $A_n = \mathcal{A} \times_{\hat{S}} S_n$ sur les $S_n = \mathrm{Spec}(A/\underline{m}^{n+1})$ soient lisses). Supposons que $A_o/A_o^{\,o}$ soit un schéma en groupes étale fini sur S_o, et que $A_o^{\,o}$ soit extension d'un schéma abélien B_o par un tore isotrivial T_o . Soient $\mathcal{A}^o = (A_n^o)_{n \geq 0}$, $\mathcal{A}/\mathcal{A}^o = (A_n/A_n^{\,o})_{n \geq 0}$. Alors $\mathcal{A}/\mathcal{A}^o$ est étale fini sur $\hat{S}$, et $\mathcal{A}^o$ est de façon essentiellement unique, et fonctorielle en $\mathcal{A}$, extension d'un schéma formel abélien $\mathcal{B}$ sur S par un tore formel $\mathcal{T}$ sur S, se réduisant respectivement suivant B_o et T_o. Pour que $\mathcal{A}$ appartienne à l'image essentielle du foncteur précédent $C \longrightarrow C'$ (ou, comme nous dirons aussi, pour qu'il soit "algébrisable"), il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de $\mathcal{B}$.

7.2.1.1. Notons d'abord, sur un schéma quelconque S, que si A est un schéma en groupes lisse tel que A^o soit extension d'un schéma abélien par un tore, cette structure d'extension est essentiellement unique, et est fonctorielle en A, dans un sens évident. En effet, notre assertion se ramène aussitôt à celle-ci : tout morphisme d'un tore T dans un schéma abélien B est nul. Or il est bien connu qu'il en est ainsi sur les fibres géométriques [15], et on conclut grâce à SGA 3 IX 5.3. Appliquant ce résultat aux systèmes inductifs de schémas en groupes lisses A_n sur les S_n intervenant dans 7.2.1, on en conclut un résultat analogue pour les schémas formels en groupes sur S. D'ailleurs, on a déjà signalé dans 7.1 que si $A_o{}^o$ est une extension d'un schéma abélien par un tore, il en est de même de $A_n{}^o$. Ceci prouve donc la première assertion de b).

7.2.1.2. Supposons d'autre part que le schéma formel en groupes $\mathcal{A}$ sur S soit de la forme $\hat{A}$, avec $A \in$ ob C. Si A^o est extension d'un schéma abélien B par un tore T, on voit immédiatement qu'on a $\mathcal{B} \simeq \hat{B}$, ce qui prouve que $\mathcal{A}$ algébrisable implique $\mathcal{B}$ algébrisable. Réciproquement, supposons $\mathcal{B}$ algébrisable, i.e. qu'il provient d'un schéma abélien B, et prouvons que $\mathcal{A}$ l'est. Prouvons d'abord que $\mathcal{A}^o = (A_n{}^o)$ est algébrisable. Pour ceci, notons que les extensions $A_n{}^o$ de B_n par T_n peuvent s'interpréter, en vertu de VIII 3.7, comme des homomorphismes

$$(*) \qquad \underline{M}_n \longrightarrow B'_n \quad ,$$

où $\underline{M}_n$ est le groupe constant tordu sur S_n dual de T_n (SGA 3 X 5.7), et B'_n le schéma abélien dual de B_n. Comme le foncteur restriction à S_o, ou à un S_n quelconque, induit une équivalence de la catégorie des tores isotriviaux sur S dans celle des tores isotriviaux sur S_o (SGA 3 X 3.2), les T_n proviennent d'un tore T sur S, défini à isomorphisme unique près, dont nous désignerons par M le groupe dual; sa restriction à S_n est donc canoniquement isomorphe à $\underline{M}_n$. La propriété d'isotrivialité de T s'interprète par le fait que $\underline{M}$ est un schéma somme de schémas $\underline{M}^i$ finis sur S (SGA 3 X 5.11). Il en résulte aussitôt que les homomorphismes (*) proviennent d'un unique homomorphisme

$$(**) \qquad \underline{M} \longrightarrow B' \quad ,$$

où B' est le schéma abélien dual de B. Cet homomorphisme à son tour s'interprète comme une extension de B par T, soit A^{o}, qui fournit manifestement une algébrisation de $\mathcal{A}^{o}$.

7.2.1.3. D'autre part, comme par hypothèse A_{o}/A_{o}^{o} est un schéma en groupes fini Φ_{o} sur S, les A_{n}/A_{n}^{o} sont également des schémas en groupes Φ_{n} finis sur S (leur représentabilité résultant de), qui sont d'ailleurs nécessairement étales sur S. Il existe alors un schéma en groupes étale Φ sur S, défini à isomorphisme unique près, donnant naissance au schéma formel en groupes $\mathcal{A}/\mathcal{A}^{o}$ défini par les Φ_{n}. Or, $G = A^{o}$ étant divisible, on voit aussitôt que la catégorie des extensions de faisceaux fppf d'un groupe fini localement constant sur S, tel que Φ, par le schéma en groupes A^{o}, est canoniquement équivalente à la catégorie des torseurs sous le faisceau

$$H = \underline{\mathrm{Hom}}_{gr}(\Phi , G) \quad ,$$

l'équivalence en question étant compatible avec tout changement de base. Appliquant la même description des extensions de Φ_{n} par G_{n} en termes de torseurs sous $H_{n} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{gr}(\Phi_{n},G_{n})$, les A_{n} nous définissent un système cohérent de torseurs P_{n} sous les H_{n}. Or, G étant une extension d'un schéma abélien par un tore, on en conclut aisément que H est un schéma en groupes <u>fini et localement libre sur</u> S, d'où on conclut facilement que le foncteur $P \longmapsto \hat{P} = (P_{n})$ définit une équivalence entre la catégorie des torseurs sur S sous H, avec la catégorie des torseurs "formels" $\hat{P}$ sous $\hat{H}$, i.e. des systèmes cohérents de torseurs P_{n} sous les H_{n}. Donc les P_n définis par les extensions A_n proviennent d'un même torseur P sur S sous H. On en conclut une extension A de Φ par $G = A^o$ qui "algébrise" $\mathcal{A}$, à cela près qu'il fait encore vérifier qu'elle est représentable. Or on peut regarder A comme un torseur sur Φ, de groupe A^o_Φ, et il est immédiat que ce torseur devient trivial après l'extension de la base par le morphisme fini surjectif localement libre $P \times_S \Phi \longrightarrow \Phi$ (puisque le changement de base $P \longrightarrow S$ scindé l'extension envisagée A de Φ par A^o). On peut alors conclure par un des nombreux critères d'effectivité de descente de M. RAYNAUD [23 XI 3.1 6)].

7.2.1.4. Cela achève de prouver b), et il reste seulement à prouver l'assertion a) de pleine fidélité. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que celle-ci est contenue essentiellement dans la méthode de démonstration de b), ou, s'il le préfère, d'en chercher une démonstration directe indépendante.

7.2.1.5. On notera que la référence au délicat résultat de descente de RAYNAUD devient inutile si on suppose A^o quasi-projectif sur S, ou ce qui revient au même, B projectif sur S. Cette condition est satisfait en particulier quand on part du schéma formel en groupes $\hat{A}$ sur S, où A est comme dans 7.1.5, - ce qui est le seul cas où nous allons utiliser 7.2.1.

7.2.2. Nous allons appliquer 7.2.1 au schéma formel en groupes $\hat{A}$ envisagé dans 7.1, dans le cas favorable envisagé dans 7.1 où le schéma abélien $\hat{B}$ est algébrisable (cf. 7.1.5), et où on suppose de plus que le tore T_o sur S_o est isotrivial. On trouve donc un schéma en groupes $A^{\natural}$ sur S, appelé le <u>Groupe de Raynaud</u> de A sur S, caractérisé à isomorphisme près par un isomorphisme canonique de schémas formels en groupes sur $\mathrm{Specf}(V) = \hat{S}$:

(7.2.3) $$(A^{\natural})^{\wedge} \simeq \hat{A} \quad .$$

Il résulte de 7.2.1 que

(7.2.4) $$\Phi = A^{\natural}/A^{\natural\,o}$$

est un groupe fini étale sur S, et que la composante neutre

$$A^{\natural\,o} = A^{o\natural}$$

est munie d'une structure d'extension

(7.2.5) $$0 \longrightarrow T \longrightarrow A^{\natural\,o} \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad ,$$

où B est le schéma abélien sur S dont le complété formel est le schéma formel abélien $\hat{B}$ construit dans 7.1, et T est caractérisé (à isomorphisme unique près) comme le tore isotrivial sur S qui relève T_o. Cette structure d'extension (7.2.5) donne, par restriction aux S_n , les structures d'extension sur les $A^{\natural\,o}_n = A^o_n$ définies par (7.1.1).

7.2.6. Il résulte d'autre part immédiatement de 7.2.1 que le Groupe de Raynaud $A^{\natural}$, ainsi que la suite exacte (7.2.5), dépendent fonctoriellement de A (satisfaisant aux conditions envisagées), et que leur
.1. formation commute à tout changement de base $S' \longrightarrow S$ associé à un homomorphisme d'anneaux topologiques adiques $V \longrightarrow V'$.

7.3. Considérons maintenant, pour un nombre premier fixé ℓ, le pro-ℓ-groupe $T_{\ell}(A^o)$. Identifiant un schéma fini sur S avec le schéma formel correspondant, et définissant la "<u>partie fixe</u>" $T_{\ell}(A^o)^f$ comme d'habitude, on trouve un isomorphisme comme (5.1.5)

$$T_\ell(A^o)^f \simeq T_\ell(\hat{A}^o) \quad , \tag{7.3.1}$$

et définissant la "partie torique" comme dans (5.1.6)

$$T_\ell(A^o)^t = T_\ell(\hat{T}) \simeq T_\ell(T) \subset T_\ell(A^o)^f \simeq T_\ell(\hat{A}^o) \quad , \tag{7.3.2}$$

on trouve aussitôt, pour la "partie abélienne", un isomorphisme

$$T_\ell(A^o)^{ab} \overset{\mathrm{dfn}}{=} T_\ell(A^o)^f / T_\ell(A^o)^t \simeq T_\ell(\hat{B}) \quad . \tag{7.3.3}$$

On n'a pas encore ici utilisé l'hypothèse que $\hat{B}$ est algébrisable, hypothèse qui nous a permis de construire le schéma abélien B et l'extension de Raynaud de B par T. Comme on a évidemment un isomorphisme canonique (cas particulier de (7.3.1) appliqué au schéma abélien B !) $T_\ell(\hat{B}) \simeq T_\ell(B)$, l'isomorphisme (7.3.3) nous donne aussi :

$$T_\ell(A^o)^{ab} \simeq T_\ell(B) \quad . \tag{7.3.4}$$

Notons aussi, en passant, que (7.2.3) et (7.3.1) impliquent aussi un isomorphisme canonique

$$T_\ell(A^o)^f \simeq T_\ell(A^{\natural\, o}) \quad , \tag{7.3.5}$$

compte tenu que le deuxième membre est déjà un groupe pro-fini, i.e. identique à sa partie fixe. La suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow T_\ell(A^o)^t \longrightarrow T_\ell(A^o)^f \longrightarrow T_\ell(B) \longrightarrow 0 \quad , \tag{7.3.6}$$

qui peut en tout état de cause (sans hypothèse d'algébrisabilité sur $\hat{B}$) s'interprèter comme la suite exacte déduite par application du foncteur T_ℓ de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \hat{T} \longrightarrow \hat{A}^o \longrightarrow \hat{B} \longrightarrow 0 \quad ,$$

peut aussi être considérée comme déduite par application du foncteur T_ℓ de la suite exacte canonique de schémas en groupes ordinaires

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow A^{\natural o} \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad .$$

7.4. Supposons maintenant donné un deuxième schéma en groupes A' sur S, satisfaisant aux mêmes hypothèses que G, et supposons A, A' à fibres connexes. Soit W une biextension de (A,A') par $\mathbb{G}_{mS}$. On en déduit donc un accouplement (VIII 2.2)

(7.4.1) $$T_\ell(A) \times T_\ell(A') \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mS}) = \mathbb{Z}_\ell(1)$$

et par restriction aux parties fixes un accouplement

(7.4.2) $$T_\ell(A)^f \times T_\ell(A')^f = T_\ell(\hat{G}) \times T_\ell(\hat{G}') \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1) \quad ,$$

qu'on peut aussi interprèter comme l'accouplement défini par la biextension $\hat{W}$ de $(\hat{A},\hat{A}')$ par $\hat{\mathbb{G}}_{mS}$ déduite de W par complétion (en définissant ici, pour simplifier, une biextension de schémas en groupes formels comme une famille cohérente de biextensions W_n des (A_n,A'_n) par $\mathbb{G}_{mS_n}$). Or on sait (VIII 3.5) que W_n provient d'une biextension $W_n{}^{ab}$ de (B_n,B'_n) (où B'_n est la partie abélienne de G'_n), de sorte que (7.4.2) se factorise en

(7.4.3) $$T_\ell(A)^{ab} \times T_\ell(A')^{ab} = T_\ell(\hat{B}) \times T_\ell(\hat{B}') \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1) \quad ,$$

qui est aussi l'accouplement défini par la biextension

$$\hat{W}^{ab} = (W_n{}^{ab})$$

de $(\hat{B},\hat{B}')$ par $\hat{\mathbb{G}}_{mS}$. Lorsque $\hat{B}$, $\hat{B}'$ sont algébrisables, de sorte qu'on dispose de schémas abéliens B,B' sur S, alors en vertu de EGA IV 5.1.4 $\hat{W}^{ab}$ provient d'une biextension, définie à isomorphisme unique près,

$$W^{ab} \text{ de } (B,B') \text{ par } \mathbb{G}_{mS} \quad ,$$

et l'accouplement correspondant

$$T_\ell(B) \times T_\ell(B') \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mS}) \tag{7.4.4}$$

est canoniquement isomorphe à (7.4.3).

Désignant par DB' le schéma abélien dual de B', W^{ab} définit un homomorphisme

$$u : B \longrightarrow D(B') \quad , \tag{7.4.5}$$

dont les propriétés reflètent celles des accouplements (7.4.4) i.e. (7.4.3). On voit par exemple que l'accouplement (7.4.3) est une dualité parfaite en un point $t \in S$ si et seulement si $u_t : B_t \longrightarrow D(B')_t$ est une isogénie dont le noyau est de rang premier à ℓ . Comme ceci implique que u lui-même est une isogénie (S étant local donc connexe), et que Ker u est plat et fini sur S, donc que Ker u a même rang en tout point, on voit que la condition qu'on vient d'envisager est indépendante du point choisi t.

7.4.6. Ceci achève de prouver en particulier 5.4, puisque sous les conditions de ce théorème (où on peut supposer S complet), appliquant ce qui précède à A^o et A'^o, on a établi que l'accouplement (7.4.3) est pour tout ℓ une dualité parfaite au point générique η, de sorte qu'il en est de même au point s.

7.4.7. On voit de même par les considérations précédentes que le théorème d'orthogonalité 5.2 devient clair, sans recours au lemme 5.2.4. En effet, nous avons établi en cours de route dans 7.4 que l'accouplement (5.2.3.1)=(7.4.2) s'annule sur les parties toriques de part et d'autre, donc se factorise en un accouplement (7.4.3), dont il reste à établir qu'il est séparé <u>sur les fibres génériques</u> des pro-groupes envisagés, sachant qu'il l'est sur les fibres spéciales. Cela provient en effet du fait que si (7.4.5) induit une isogénie sur les fibres spéciales, c'est une isogénie.

7.4.8. Revenons aux conditions générales de 7.4, et supposons donné un ouvert $U \subset S-S_o$, tel que A_U et A'_U soient des <u>schémas abéliens</u>, duals l'un de l'autre par la biextension W_U . Considérons les restrictions à U de la suite exacte (7.3.6) et de la suite exacte analogue relative à A', de sorte qu'on trouve sur les pro-ℓ-groupes de Barsotti-Tate $T_\ell(A_U)$ et $T_\ell(A'_U)$ des filtrations canoniques

$$(7.4.9)\qquad \begin{cases} T_\ell(A_U) \supset T_\ell(A_U)^f \supset T_\ell(A_U)^t \supset 0 \\ \\ T_\ell(A'_U) \supset T_\ell(A'_U)^f \supset T_\ell(A'_U)^t \supset 0 \end{cases} .$$

Ceci posé, je dis que <u>ces deux filtrations sont duales l'une de l'autre</u>, relativement à l'accouplement (7.4.1) (qui est ici une dualité parfaite (VIII 3.2)), i.e. qu'on a encore la relation (5.2.2) et la relation symétrique (avec A_K, A'_K remplacés par A_U et A'_U). On a vu d'ailleurs ci-dessus que cet énoncé d'orthogonalité revient aussi à dire que la biextension W^{ab} de (B,B') par $\mathbb{G}_{mS}$ est une dualité parfaite sur U (ou ce qui revient au même si U est dense dans S, sur η). C'est une propriété qu'il suffit de vérifier en tout point η de U, et alors l'argument habituel nous ramène au cas où S est un trait de point générique η , qui est déjà connu.

La relation d'orthogonalité nous permet d'autre part d'étendre au cas présent les formules (5.5.7), (5.5.8) et (5.5.9), où on remplace l'opération de restriction au point générique η par celle de restriction à l'ouvert U ; par suite, 5.6 s'étend également au cas présent. Nous nous dispensons de réécrire ici les formules et l'énoncé précédents dans le contexte présent.

Résumons, du point de vue des modèles de Néron, les résultats obtenus concernant les parties abéliennes et leurs accouplements :

Proposition 7.5. *Soit* S *un trait complet, de corps de fonctions* K. *A tout schéma abélien* A_K *sur* K *ayant une réduction semi-stable sur* S, *le procédé de* 7.1, *appliqué à la composante neutre du modèle de Néron* A, *de* A_K *permet de définir la* partie abélienne $B = A^{ab}$ *de celui-ci, qui est un schéma abélien sur* S, *dépendant fonctoriellement de* A_K . *Pour tout autre schéma abélien* A'_K *à réduction semi-stable, on peut à toute correspondance divisorielle* W_K *sur* (A_K,A'_K), *associer une correspondance divisorielle unique* W^{ab} *sur* (A^{ab},A'^{ab}), *telle que pour tout entier* $n \geq 0$, W_n^{ab} *ait comme image inverse par* $A_n^o \longrightarrow B_n = A_n^{oab}$, $A'^o_n \longrightarrow B'_n = A'^{oab}_n$ *la biextension* W_n *de* (A_n^o,A'^o_n) *déduite de* W *par réduction, où* W *est le prolongement canonique* (1.4) *de* W_K *à* (A^o,A'^o).

<u>La formation de</u> W^{ab} <u>est compatible avec la formation d'images inverses de correspondances par des morphismes de schémas abéliens</u> $\overline{A}_K \longrightarrow A_K$, $\overline{A'_K} \longrightarrow A'_K$. <u>Si</u> W_K <u>est une dualité parfaite, il en est de même de</u> W^{ab}. <u>Si</u> W_K <u>est la correspondance divisorielle de</u> (A_K, A_K) <u>associée à une polarisation de</u> A_K, <u>alors</u> W^{ab} <u>est associé à une polarisation de</u> A^{ab}.

L'assertion de compatibilité de la formation des W^{ab} aves les images inverses est triviale, grâce à la caractérisation indiquée des W^{ab}. Le complément relatif aux polarisations a été vu dans 7.1.5 en même temps que la démonstration de l'algébrisabilité de $\hat{B}$.

7.6. Supposons toujours que S est un trait complet, A étant le modèle de Néron d'un schéma abélien A_K sur K. On pose alors

$$A_K^{\natural} = (A^{\natural})_K \qquad , \tag{7.6.1}$$

où $A^{\natural}$ est le schéma de Raynaud (7.2.2), extension successive du Groupe fini étale Φ par le schéma abélien B par le tore T. Donc $A_K^{\natural}$ est lui-même extension de Φ_K par $A_K^{\natural\,o} = A^{\natural\,o}{}_K = A^{o\,\natural}{}_K$, qui est extension du schéma abélien B_K par le tore T_K . Pour tout nombre premier ℓ , on a en vertu de (7.3.5) et (7.3.2) :

$$T_\ell(A_K{}^{\natural}) \simeq T_\ell(A_K{}^{\natural\,o}) \simeq T_\ell(A_K)^f \;,\; T_\ell(T_K) \simeq T_\ell(A_K)^t \quad . \tag{7.6.2}$$

7.6.3. On notera qu'en vertu de 3.3, la formation de $A_K{}^{\natural\,o}$ commute à tout changement de base pour un morphisme de traits complets $S' \to S$.

8. L'extension de Raynaud $A_K^{\natural\,\circ}$ dans le cas non semi-stable, et le ind-groupe $A_K^{\flat}$

8.1. Supposons toujours le trait S complet, mais ne supposons plus nécessairement que A_K ait une réduction semi-stable. Soit comme d'habitude K' une extension galoisienne finie de K telle que $A_{K'}$ ait une réduction semi-stable par rapport au normalisé S' de S dans K'. Considérons l'extension de Raynaud $A_{K'}^{\natural}$ associée à $A_{K'}$ (7.6.1). Il est clair que le groupe de Galois de K'/K opère par transport de structure sur ce schéma en groupes, d'où par descente galoisienne un schéma en groupes sur K, soit $A_{K,K'}^{\natural}$, qui dépend du choix de l'extension K'. Cependant sa composante neutre n'en dépend pas à isomorphisme canonique près grâce à 7.6.3, et on la notera simplement $A_K^{\natural\,\circ}$. On voit par descente que $A_K^{\natural\,\circ}$ est une extension

(8.1.1) $$0 \longrightarrow T_K \longrightarrow A_K^{\natural\,\circ} \longrightarrow B_K \longrightarrow 0 \quad ,$$

où T_K est un tore et B_K un schéma abélien sur K. De même, en vertu de la définition des parties essentiellement fixe et essentiellement torique de $T_\ell(A_K)$ (4.1 et 6.5), les isomorphismes (7.6.2) donnent des isomorphismes canoniques

(8.1.2) $$T_\ell(A_K^{\natural}) \simeq T_\ell(A_K)^{ef} \ , \ T_\ell(T_K) \simeq T_\ell(A_K)^{et} \quad ,$$

d'où par passage au quotient

(8.1.3) $$T_\ell(B_K) \simeq T_\ell(A_K)^{ef}/T_\ell(A_K)^{et} \quad .$$

Ceci détermine donc deux des quotients intervenant dans la filtration

$$(8.1.4) \qquad T_\ell(A_K) \supset T_\ell(A_K)^{ef} \supset T_\ell(A_K)^{et} \supset 0$$

en termes de l'extension de schémas en groupes (8.1.1). Pour déterminer le troisième quotient $T_\ell(A_K)/T_\ell(A_K)^{ef}$, on note qu'en vertu de (6.5.2) on a un isomorphisme canonique

$$(8.1.5) \qquad T_\ell(A_K)/T_\ell(A_K)^{ef} \simeq D(T_\ell(A'_K)^{et}) \quad ,$$

où $D = \underline{\mathrm{Hom}}(-, T_\ell(\mathbb{G}_m))$ désigne le dual de Cartier (au sens des pro-groupes de Barsotti-Tate), et où A'_K désigne le schéma abélien dual de A_K. Considérons alors la suite exacte du type (8.1.1)

$$(8.1.6) \qquad 0 \longrightarrow T'_K \longrightarrow A'^{o}_K \longrightarrow B'_K \longrightarrow 0$$

associée au schéma abélien A'_K sur K, et les isomorphismes du type (8.1.2) correspondants, la formule (8.1.5) nous donne donc

$$(8.1.7) \qquad T_\ell(A_K)/T_\ell(A_K)^{ef} \simeq D(T_\ell(T'_K)) \simeq \underline{M}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \quad .$$

où on a posé (en généralisant les notations introduites dans (5.5.2)) :

$$(8.1.8) \qquad \underline{M}_K = D(T'_K) \quad , \quad \underline{M}'_K = D(T_K) \quad ,$$

et où maintenant D désigne le dual de Cartier $\underline{\mathrm{Hom}}(-, \mathbb{G}_{mK})$ au sens des schémas en groupes ordinaires. Ainsi $\underline{M}_K$ et $\underline{M}'_K$ sont des Groupes constants tordus sur K, qui sur K' deviennent constants et isomorphes à des groupes de la forme $\mathbb{Z}^r$ (r=dim T = dim T').

8.2. Les conditions sont celles de 8.1. Il est clair que l'extension (8.1.1) dépend fonctoriellement du schéma abélien A_K, et que sa formation commute à tout morphisme de trait $\widetilde{S} \longrightarrow S$. Choisissant une polarisation de A_K, d'où une isogénie $A_K \longrightarrow A_{K'}$, on en déduit un homomorphisme de (8.1.1) dans (8.1.6), dont on voit aussitôt (en regardant les T_ℓ) que c'est une isogénie terme à terme. De même, utilisant 7.5 et la descente, on voit que toute biextension par $\mathbb{G}_{mK}$ de schémas abéliens A_K, $\overline{A}_K$ sur K définit une biextension de $(B_K, \overline{B}_K)$ par $\mathbb{G}_{mK}$, où B_K, $\overline{B}_K$ désignent les quotients abéliens des extensions de Raynaud qui correspondent à A_K et à $\overline{A}_K$ respectivement ; lorsque W est une dualité parfaite, il en est de même de la biextension correspondante de $(B_K, \overline{B}_K)$. En particulier, avec les notations de 7.6, les schémas abéliens B_K et B'_K sont canoniquement duals l'un de l'autre. La correspondance entre biextensions sur $(A_K, \overline{A}_K)$ et biextensions sur $(B_K, \overline{B}_K)$ a des propriétés de fonctorialité évidentes pour $A_K, \overline{A}_K$ variables, qui se déduisent par descente des propriétés analogues énoncées dans 7.5, et dont nous laissons l'énoncé au lecteur. Nous laissons également au lecteur la compatibilité de l'application précédente avec tout changement de traits $\widetilde{S} \longrightarrow S$.

8.3. Revenons au groupe $A_{K,K'}^{\natural}$, et étudions sa variance en K'. Il est clair que deux extensions isomorphes K', K'_1 de K' donnent des groupes <u>canoniquement</u> isomorphes, de sorte qu'on peut se borner aux sous-extensions K' de la clôture séparable $\overline{K}$ de K. Si alors $K' \hookrightarrow K''$ sont deux telles sous-extensions galoisiennes finies de $\overline{K}$, il résulte aussitôt de 3.3

que l'on a une <u>immersion ouverte</u> canonique

$$A^{\natural}_{K,K'} \hookrightarrow A^{\natural}_{K,K''} \quad , \tag{8.3.1}$$

permettant d'identifier le premier groupe à un sous-groupe ouvert du deuxième. Pour K' variable, on voit que les $A_{K,K'}$ forment ainsi un système inductif de groupes lisses de type fini sur K, à morphismes de transition des immersions ouvertes. Si on pose

$$\Phi_{K,K'} = A^{\natural}_{K,K'} / A^{\natural\,\circ}_{K,K'} \quad , \tag{8.3.2}$$

les $\Phi_{K,K'}$ eux-mêmes forment donc un système inductif de groupes finis étales sur K, qui sera étudié plus en détail plus bas.

Nous poserons

$$A^{\flat}_{K} = \varinjlim_{K'} A^{\natural}_{K,K'} \quad , \tag{8.3.3}$$

la limite étant prise dans la catégorie des faisceaux fppf sur K. Comme les morphismes de transition dans le système inductif envisagé dans des immersions ouvertes, il est d'ailleurs clair que cette limite est en fait représentable par un schéma en groupes (en général non quasi-compact) sur K, que nous désignerons comme de juste par le même symbole $A^{\flat}_{K}$. On notera qu'on a, pour ce schéma en groupes

$$A^{\flat\,\circ}_{K} = A^{\natural\,\circ}_{K} \ , \ A^{\flat}_{K} \,/\, A^{\flat\,\circ}_{K} \simeq \varinjlim_{K'} \Phi_{K,K'} \quad . \tag{8.3.4}$$

Ce dernier groupe sera déterminé dans 11.10 : il est canoniquement isomorphe à $\underline{M}_K \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (avec la notation (8.1.8)).

9. Définition de l'accouplement de monodromie $\underline{M}_\ell \otimes \underline{M}'_\ell \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ell S}$.

9.1. Dans le présent numéro on suppose S hensélien, et que A_K ait réduction semi-stable sur S, ou ce qui revient au même, que A'_K ait réduction semi-stable sur S (3.5.1). On dispose alors sur S de deux $\mathbb{Z}$-Modules constants tordus $\underline{M}$ et M' (5.5.2), qui sur un revêtement fini étale convenable de S (donc sur S lui-même si S est strictement local i.e. si k est séparablement clos) se déploient en des groupes constants de valeur M resp. M' isomorphes (non canoniquement) à $\mathbb{Z}^r$, r étant la dimension commune des tores maximaux de A_o et de A'_o. Nous allons considérer, pour tout nombre premier ℓ, les faisceaux ℓ-adiques correspondants

(9.1.1) $$\underline{M}_\ell = \underline{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \quad , \quad \underline{M}'_\ell = \underline{M}' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \qquad ,$$

dont la signification géométrique est explicitée par les formules (5.5.7) et (5.5.8). Dans le présent numéro, nous allons définir un accouplement canonique (dit "accouplement de monodromie")

(9.1.2) $$u_\ell : \underline{M}_\ell \otimes \underline{M}'_\ell \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \qquad ,$$

qui sera défini en termes des pro-ℓ-groupes de Barsotti-Tate $T_\ell(A^o)$ et $T_\ell(A'^o)$, et même de la fibre générique $T_\ell(A_K)$ du premier de ces groupes (sous réserve, lorsque ℓ=p, de disposer du théorème de Tate [33, th.4], i.e. pour l'instant qu'on soit alors dans le cas d'inégales caractéristiques). Lorsque $\ell \neq p$, il revient au même de dire que l'accouplement (9.1.2) est décrit en termes du π-module galoisien

(9.1.3) $$U = T_\ell(A_K)(\overline{K}) = T_\ell(A_{\overline{K}})$$

envisagé dans (2.5.3), et plus précisément, nous verrons que sa connaissance équivaut essentiellement à celle de l'action du groupe de monodromie I sur U.

9.2. <u>Cas</u> $\ell \neq p$. Plaçons nous donc d'abord dans le cas, plus simple, où $\ell \neq p$, en reprenant alors les notations introduites dans (2.5.3). Notons qu'à torsion près, la relation $V = U^I$ signifie aussi que $V^\perp$ est le module engendré par les éléments $gx - x$ ($u \in U$, $g \in I$), et qu'on a en tous cas

(9.2.1) $$gx - x \in V^\perp \quad \text{pour } x \in U,\ g \in I \quad .$$

On a donc, pour $g \in I$:

(9.2.2) $$gx = x + u(g).x \quad ,$$

où $g \longmapsto u(g)$ est un homomorphisme de U dans $V^\perp$ qui s'annule sur $V= U^I$, ou ce qui revient au même

(9.2.3) $$u \in \mathrm{Hom}(U/V\ ,\ V^\perp) \simeq (U/V)^\vee \otimes V^\perp \quad .$$

Dans le cas envisagé de la réduction semi-stable, i.e. quand on a $V^\perp \subset V$, la formule (9.2.2) exprime que l'opération g dans U est une <u>transvection</u> parallèle à $V^\perp = W$, et la composition de ces transvections n'est autre que l'addition des homomorphismes u correspondants (9.2.3). Donc l'opération du groupe d'inertie I sur U s'explicite entièrement alors par un homomorphisme de groupes

(9.2.4) $$I \longrightarrow (U/V)^\vee \otimes V^\perp \quad .$$

Or par le théorème d'orthogonalité appliqué à la fois pour A_K et A'_K on a

$$V^{\perp} = W \quad , \quad (U/V)^{\vee} \simeq W'(-1) \quad .$$

où W' est la partie torique de $U'=T_\ell(A'(\overline{K}))$, et où le (-1) désigne le twist de Tate. D'autre part, l'homomorphisme (9.2.4) se factorise par $I(\ell) \simeq \mathbb{Z}_\ell(1)$, de sorte que l'homomorphisme (9.2.4) peut s'interpréter comme un homomorphisme canonique

(9.2.5) $$u : \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow W' \otimes W(-1) \quad ,$$

ou encore comme un élément

(9.2.6) $$u \in W' \otimes W(-2) \quad .$$

Se rappelant de la définition de W et de W', comme les groupes de points à valeurs dans $\overline{K}$ des deux faisceaux ℓ-adiques constants tordus $T_\ell(A^{o})^t$ et $T_\ell(A'^{o})^t$, dont les fibres spéciales sont respectivement $T_\ell(T_o)$ et $T_\ell(T'_o)$, on trouve les isomorphismes canoniques

(9.2.7) $$\begin{cases} W \simeq T_\ell(T_o(\overline{k})) \simeq \check{M} \otimes \mathbb{Z}_\ell(1) \\ \\ W' \simeq T_\ell(T_o(\overline{k})) \simeq M' \otimes \mathbb{Z}_\ell(1) \end{cases} ,$$

M et M' désignant les groupes des caractères relativement à $\overline{k}$ de T_o et de T'_o respectivement :

(9.2.8) $$T_o = D(M) \quad , \quad T'_o = D(M') \quad .$$

Par suite, l'élément u de (9.2.6), qui exprime l'opération du groupe d'inertie I sur le module de Tate U de A_K, s'interprète comme un élément canonique de $(\check{M}'\otimes_{\mathbb{Z}}\check{M})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell$, d'ailleurs invariant par $\pi_o=\pi/I=\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, puisque par définition il est invariant par transport de structure :

$$(9.2.9) \qquad u \in ((\check{M}'\otimes_{\mathbb{Z}}\check{M})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell)^I \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\underline{M}\otimes\underline{M}',\mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(\underline{M}_\ell\otimes\underline{M}'_\ell,\mathbb{Z}_\ell) \quad .$$

C'est (à la notation u au lieu de u_ℓ près) l'élément (9.1.2) que nous voulions définir.

Pour définir (9.1.2) dans le cas général, nous aurons besoin de quelques préliminaires, que nous allons développer dans les deux sections suivantes .

9.3. Extensions panachées.

Soient $\underline{C}$ une catégorie abélienne, et

$$(9.3.1) \qquad P,\ R,\ Q$$

trois objets de $\underline{C}$. On s'intéresse à la classification des objets X de $\underline{C}$, munie d'une filtration en trois crans

$$(*) \qquad X^o=X \supset X^1 \supset X^2 \supset X^3 = 0 \quad ,$$

avec des isomorphismes donnés

$$X^o/X^1 \xrightarrow{\sim} P \quad , \quad X^1/X^2 \xrightarrow{\sim} R, \quad X^2/X^3 = X^2 \xrightarrow{\sim} Q \quad .$$

Posant

$$E = X^o/X^2 \quad , \quad F = X^1/X^3 = X^1 \quad ,$$

on voit que X donne naissance à deux extensions ordinaires

$$(9.3.2) \quad 0 \longrightarrow P \longrightarrow F \longrightarrow R \longrightarrow 0 \quad , \quad 0 \longrightarrow R \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \quad ,$$

de R par P et de Q par R respectivement. Notre point de vue sera ici de partir, en plus des objets (9.3.1), de structures d'extensions (9.3.2) supposées également données, et de considérer les structures filtrées à trois crans X correspondantes. De façon précise, nous appelerons <u>extension panachée</u> de l'extension E par l'extension F un objet X de $\underline{C}$, muni d'une filtration à trois crans (*), et d'isomorphismes donnés

$$E \simeq X^o/X^2 \quad , \quad F \simeq X^1/X^3 = X^1 \quad , \tag{9.3.3}$$

compatibles aux filtrations i.e. transformant respectivement X^1/X^2 en $\mathrm{Im}(R \longrightarrow E)$ et X^2 en $\mathrm{Im}(P,F)$, et tels enfin que l'isomorphisme $R \simeq F/P$ $(\simeq X^1/X^2)$ déduit de (9.3.3) soit égal à celui déduit de la première suite exacte (9.3.2). Pour P, Q, R et les extensions E et F fixées, les extensions panachées de E par F forment une catégorie de façon évidente, qui est en fait un groupoîde (toute flèche y est inversible). Le groupe des automorphismes d'une extension panachée X de E par F est isomorphe canoniquement au groupe $\mathrm{Hom}(Q,P)$, grâce à l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(Q,P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{\mathrm{extpan}}(X) \quad , \quad u \longmapsto \mathrm{id}_X + \overline{u} \quad , \tag{9.3.4}$$

où $\overline{u}$ est l'endomorphisme de l'objet de $\underline{C}$ sous-jacent à X composé de $X \longrightarrow Q \xrightarrow{u} P \longrightarrow X$, où les flèches extrêmes sont l'épimorphisme canonique resp. le monomorphisme canonique provenant de la structure d'extension panachée donnée sur X.

Il y aurait lieu de préciser les structures de la catégorie $\mathrm{EXTPAN}(E,F)$ des extensions panachées de E par F, en considérant celle-ci comme un "torseur" sous la "catégorie-groupe" (VII 2.5) $\mathrm{EXT}(Q,P)$ des extensions de Q par P, à l'aide d'un foncteur naturel (analogue à la composition de Brauer des extensions ordinaires)

(9.3.5) $\omega : \mathrm{EXT}(Q,P) \times \mathrm{EXTPAN}(E,F) \longrightarrow \mathrm{EXTPAN}(E,F), \quad \omega(G,X) = G\wedge X$,

qui est tel que pour tout objet X de EXTPAN(E,F), le foncteur partiel $G \longrightarrow G\wedge X$ est une équivalence de EXT(Q,P) dans EXTPAN(E,F). Contentons-nous de donner la description sommaire du foncteur ω . Pour ceci, regardons une extension panachée X de E par F comme définissant une extension ordinaire (également notée X) de Q par F (considéré comme objet de $\underline{C}$), et pour toute extension G de Q par P, désignons par $\overline{G}$ l'extension de Q par F qu'elle définit, grâce à l'inclusion $P \longrightarrow F$. On pose alors

(9.3.6) $$G\wedge X = \omega(G,X) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \overline{G}\wedge X \quad ,$$

où le signe $\wedge$ désigne la composition de Brauer dans la catégorie des extensions de Q par F. La filtration en trois crans du deuxième membre X' de (9.3.6) est claire, ainsi que le deuxième des isomorphismes du type (9.3.3) associé à X' ; pour définir le premier isomorphisme du type (9.3.3) pour X', on note que le foncteur $Y \longmapsto \widetilde{Y}$, $\mathrm{EXT}(Q,F) \longrightarrow \mathrm{EXT}(Q,R)$ déduit du morphisme donné $F \longrightarrow R$ (9.3.2) est compatible avec la composition de Brauer, donc transforme X' en un $\widetilde{X}'$ canoniquement isomorphe à $\widetilde{\widetilde{G}}\wedge\widetilde{X}$. Or le premier isomorphisme (9.3.3) nous donne un isomorphisme $\widetilde{\widetilde{X}} \simeq F$, tandis qu'il est clair qu'on a un isomorphisme canonique de $\widetilde{\widetilde{G}}$ = (extension déduite de G par le composé $P \longrightarrow F \longrightarrow R$) avec l'extension triviale, puisque le composé envisagé $P \longrightarrow R$ est nul. Il en résulte un isomorphisme canonique $\widetilde{X}' \simeq F$, ce qui précise la structure d'extension panachée de E par F sur le deuxième membre de (9.3.6). Nous laissons au lecteur le soin de définir $\wedge$ sur les flèches de EXT(Q,P) x EXTPAN(E,F), de vérifier que le foncteur (9.3.5) a bien la propriété annoncée, savoir que pour toute extension panachée fixée X, le foncteur $G \longmapsto G \wedge X$ est une équivalence de EXT(Q,P) avec EXTPAN(E,F), et de prouver la formule d'associativité

(9.3.7) $$G_1 \wedge (G_2 \wedge X) \simeq (G_1 \wedge G_2) \wedge X \quad ,$$

où $G_1 \wedge G_2$ désigne la composition de Brauer dans EXT(Q,P).

De ce qui précède, on déduit aussitôt les parties a) et b) de la

Proposition 9.3.8. Etant donné deux extensions E et F (9.3.2) dans la catégorie abélienne $\mathcal{C}$, on considère la catégorie EXTPAN(E,F) des extensions panachées de E par F. On a alors ce qui suit :

a) EXTPAN(E,F) est un groupoïde. Pour tout objet de celui-ci, le groupe des automorphismes est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Ext}^0(Q,P) = \mathrm{Hom}(Q,P)$.

b) L'ensemble Extpan(E,F) des classes à isomorphisme près d'objets de EXTPAN(E,F) est vide, ou est de façon naturelle un torseur sous le groupe $\mathrm{Ext}^1(Q,P)$.

c) On peut de façon canonique définir une classe

(9.3.9) $$c(E,F) \in \mathrm{Ext}^2(Q,P) \quad ,$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour que l'on ait $\mathrm{Extpan}(E,F) \neq \emptyset$, i.e. pour qu'il existe une extension panachée de E par F.

Il reste à prouver d). Pour ceci on note qu'une extension panachée de E par F peut aussi être décrit comme une extension X de E par P, munie d'un isomorphisme d'extensions de R par P

$$X^1 \simeq F \quad ,$$

où X^1 désigne l'image de l'extension X par le morphisme $R \longrightarrow E$ donné dans (9.3.2). Il existe donc une telle extension panachée si et seulement si il existe un élément de $\mathrm{Ext}^1(E,P)$ donc l'image dans $\mathrm{Ext}^1(R,P)$ est la classe ξ de l'extension F. Considérant alors la suite exacte des $\mathrm{Ext}^i(\ -\ ,P)$ associée à la deuxième suite exacte (9.3.2) :

$$\ldots\ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E,P) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(R,P) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^2(R,Q) \ \ldots \quad ,$$

il suffit de définir c(E,F) par la formule

$$c(E,F) = \partial\xi \quad , \quad \text{où } \xi = cl(F) \in \mathrm{Ext}^1(R,P) \quad . \tag{9.3.10}$$

Supposons maintenant que nous ayons un foncteur exact

$$r : \underline{C} \longrightarrow \underline{C}' \quad , \tag{9.3.11}$$

où $\underline{C}'$ est une deuxième catégorie abélienne. Désignons par P',Q',R',E',F' les objets de $\underline{C}'$ déduits de P,Q,R,E,F en appliquant le foncteur r, de sorte que E' est une extension de Q' par R', et F' une extension de R' par P'. Il est alors clair qu'on a commutativité à isomorphisme canonique près dans le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathrm{EXT}(Q,P) \times \mathrm{EXTPAN}(E,F) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d] & \mathrm{EXTPAN}(E,F) \arrow[d] \\ \mathrm{EXT}(Q',P') \times \mathrm{EXTPAN}(E',F') \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{EXTPAN}(E',F') \end{tikzcd} \quad , \tag{9.3.12}$$

où les flèches verticales désignent les foncteurs évidents induits par le foncteur exact r, et où ω' est la flèche analogue à ω (9.3.5), avec C remplacé par C'. On en déduit des compatibilités analogues des structures **envisagées** dans 9.3.8 avec le foncteur r, que nous laissons au soin du lecteur à expliciter.

Nous utiliserons la conséquence suivante de cette commutativité. **Supposons** que EXTPAN(E,F) ne soit pas vide, et choisissons alors un objet X dans **EXTPAN**(E,F). Alors grâce à $G' \longmapsto G' \wedge X'$ (où $X' = r(X)$), la catégorie EXTPAN(E',F') est équivalente à la catégorie EXT(Q',P'), donc un élément Y' de EXTPAN(E',F') est connu à isomorphisme près quand on connaît la classe d'isomorphie de l'élément correspondant de EXT(Q',P'), i.e. quand on connaît l'élément correspondant de $\mathrm{Ext}^1(Q',P')$, soit

$$c_X(Y') \in \mathrm{Ext}^1(Q',P') \quad .$$

Lorsqu'on remplace X par un autre objet $X_1 = H \wedge X$, où H est une extension de Q par P, on voit aussitôt que l'on obtient

$$c_{X_1}(Y') = c_X(Y) - \mathrm{cl}(H') \quad ,$$

grâce à la **formule** d'associativité (9.3.7). Par suite, pour Y' fixé, et X variable, les $c_X(Y')$ parcourent exactement une classe

(9.3.13) $$c(Y') \in \mathrm{Ext}^1(Q',P') / \mathrm{Im}\,\mathrm{Ext}^1(Q,P) \quad ,$$

qui est donc canoniquement associée à l'extension panachée Y' de E' par F'. Par construction, sa nullité est nécessaire et suffisante pour que l'extension panachée Y' soit isomorphe à la transformée par r d'une extension panachée X de E par F.

9.4. Soient S un trait hensélien, de point générique η, n un entier > 0, $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\underline{C}$ la catégorie des Λ-Modules sur S (pour le site fppf sur S, cf. VIII 0.2), $\underline{C}'$ la catégorie des Λ-Modules sur η. Soient P,R,Q des objets de $\underline{C}$, et E,F des extensions de Q par R et de R par P respectivement (9.3.2). On suppose que Q est un Module localement libre de type fini sur Λ_S, et que P soit représentable par un groupe de type multiplicatif fini sur S (SGA 3 IX), donc qu'il soit de la forme

$$P = D(Q^*) \quad ,$$

où $D = \underline{Hom}(-, \mathbb{G}_{mS})$ désigne la dualité de Cartier. On considère les restrictions de P,R,Q,E,F à η, soient P_η, R_η ...., et on suppose donnée une extension panachée (9.3) X_η de E_η par F_η. Sous ces conditions, nous allons définir canoniquement un accouplement

(9.4.1) $$c(X_\eta) : Q \otimes_\Lambda Q^* \longrightarrow \Lambda_S \quad (\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \quad .$$

Pour ceci, supposons d'abord S strictement local, de sorte que Q et Q^* sont constants, soient $Q = Q_{oS}$, $Q^* = Q^*_{oS}$, et la donnée de (9.4.1) revient à celle d'un élément

(9.4.2) $$c(X_\eta) \in \check{Q}_o \otimes \check{Q}^*_o \quad ,$$

où le signe $\vee$ désigne le dual ordinaire $Hom(-, \Lambda)$. Pour ceci, nous appliquons les considérations de9.3, en prenant pour $r: \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ le foncteur restriction. Notons d'abord qu'il existe une extension panachée de E par F : en effet, l'obstruction à l'existence d'une telle extension se trouve dans $Ext^2(Q,P)$ (9.3.8 c)), et il suffit de prouver qu'on a

$$Ext^2(Q,P) = 0 \quad .$$

Ceci est un cas particulier du

<u>Lemme</u> 9.4.3. <u>Sous les conditions précédentes, avec</u> S <u>strictement local, on a des isomorphismes</u>

a) $\quad \mathrm{Ext}^i_\Lambda(Q,P) \simeq H^i(S,\check{Q}\otimes P)$, $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(Q_\eta,P_\eta) \simeq H^i(\eta,\check{Q}\otimes P)$,

<u>d'autre part on a un isomorphisme canonique</u>

b) $$\check{Q}\otimes P \simeq D(Q\otimes Q^*) \quad ,$$

<u>enfin, pour tout groupe constant fini</u> $H = H_{oS}$ <u>sur</u> S, <u>on a</u>

c) $$H^i(S,D(H)) = H^i(\eta,D(H)_\eta) = 0 \quad \text{pour } i \geq 2 \quad ,$$

<u>et des isomorphismes canoniques</u>

d) $\quad H^1(S,D(H)) \simeq \mathbb{G}_m(S)\otimes\check{H}_o = V^*\otimes\check{H}_o$, $H^1(\eta,D(H_\eta)) \simeq \mathbb{G}_m(\eta)\otimes\check{H}_o = K^*\otimes\check{H}_o$,

<u>où le signe</u> $\vee$ <u>désigne ici</u> $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Les formules a) et b) résultent trivialement du fait que Q est un Λ_S-Module localement libre de type fini. Pour prouver c), on est évidemment ramené au cas où $H_o = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ i.e. $D(H) = \mu_m$, et alors la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de Kummer

$$0 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{m.\mathrm{id}} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

nous ramène à prouver les formules

$$H^i(S,\mathbb{G}_m) = H^i(\eta,\mathbb{G}_m) = 0 \quad \text{pour } i \geq 1 \quad .$$

Les H^i sont égaux aux $H^i_{\text{ét}}$ calculés pour le site étale [6 , th. 11.7], ils sont donc nuls pour S puisque S est strictement local. Le fait qu'ils sont nuls aussi pour η est un fait bien connu [6 , th. 1.1].

Reste à décrire des isomorphismes d). En fait, sur une base quelconque U, on a un homomorphisme canonique

$$\mathbb{G}_m(U) \otimes \check{H}_o \longrightarrow H^1(U, D(H_{oU})) \quad , \tag{9.4.3.1}$$

qu'on décrit, lorsque H_o est annulé par l'entier $m \geq 0$, à l'aide de l'homomorphisme cobord $\mathbb{G}_m(U) \xrightarrow{\partial} H^1(U, \mu_m)$ associé à la suite exacte de Kummer, en prenant le composé

$$\mathbb{G}_m(U) \otimes \check{H}_o \longrightarrow H^1(U, \mu_m) \otimes \check{H}^o \longrightarrow H^1(U, \mu_m \otimes \check{H}_o) \longrightarrow H^1(U, D(H_{oS})) \ ,$$

où la deuxième flèche se déduit de l'homomorphisme évident $\check{H}_o \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mu_m, \mu_m \otimes \check{H}_o)$, et la troisième est un cas particulier de b) (où on remplace n par m). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que (9.4.3.1) ne dépend pas du choix de l'entier m tel que $mH_o = 0$. D'autre part je dis que l'homomorphisme (9.4.3.1) est toujours injectif, et que son conoyau est nul si $\mathrm{Pic}(U) = 0$. (En fait, le conoyau est toujours isomorphe à $\mathrm{Hom}(H_o, \mathrm{Pic}(U))$, mais peu importe ici.) Pour voir ceci, on est ramené en effet au cas où H_o est de la forme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et alors l'assertion résulte aussitôt de la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de Kummer (*) ci-dessus. Ceci prouve la formule d). On en conclut aussitôt :

<u>Corollaire</u> 9.4.4. <u>Avec les notations de</u> 9.4.3 <u>on a un isomorphisme canonique</u>

e) $$H^1(\eta, D(H)_\eta) / \mathrm{Im}\, H^1(S, D(H)) \simeq \check{H}_o \quad ,$$

<u>d'où (en combinant avec</u> a) <u>et</u> b)) <u>un isomorphisme canonique</u>

$$\mathrm{Ext}^1(Q_\eta, P_\eta)/\mathrm{Im}\, \mathrm{Ext}^1(Q, P) \simeq \check{Q}_o \otimes \check{Q}^*_o \quad . \tag{9.4.5}$$

Revenant à la définition de (9.4.2) lorsque S est strictement local, on note que la relation $\mathrm{Ext}^2(Q,P) = 0$ implique la possibilité de définir un élément canonique (9.3.13), où on prend pour Y' l'extension panachée X_η donnée de E_η par F_η. La formule (9.4.5) permet d'identifier cet élément $c(X_\eta)$ à un élément de $\check{Q}_o \otimes \check{Q}^*_o$, ce qui précise la définition de (9.4.2). On trouve de plus, en vertu des considérations générales de 9.3, que l'élément en question s'interprète comme l'obstruction au prolongement de X_η en une extension panachée X de E par F.

9.4.6. La définition de (9.4.1) dans le cas S hensélien se ramène maintenant immédiatement au cas strictement local, par descente galoisienne à partir du hensélisé strict de S.

Proposition 9.4.7. *Les données* P,Q,R,E,F *sont comme ci-dessus, sauf qu'il est inutile de supposer le trait* S *hensélien. On considère le foncteur*

$$X \longmapsto X_\eta \tag{9.4.7.1}$$

de la catégorie des extensions panachées de E *par* F *dans la catégorie des extensions panachées de* E_η *par* F_η. *Pour toute extension panachée* X_η *de* E_η *par* F_η, *on considère l'accouplement*

$$c_o(X_\eta) : Q_o \otimes Q^*_o \longrightarrow \Lambda_S \tag{9.4.7.2}$$

induit par l'accouplement du type (9.4.1) *défini sur le hensélisé* S^h *de* S. *Ceci posé, le foncteur* (9.4.7.1) *est pleinement fidèle, et pour une extension panachée* X_η *de* E_η *par* F_η, X_η *appartient à l'image essentielle de ce foncteur si et seulement si l'accouplement* (9.4.7.2) *est nul.*

9.4.7.3. Cet énoncé garde un sens et reste valable lorsqu'on suppose seulement que S est un schéma noethérien régulier connexe de dimension 1 : au lieu d'un seul accouplement (9.4.7.2), il faut alors considérer un accouplement $Q_s \otimes Q_s^* \longrightarrow \Lambda_s$ pour chaque point fermé s de S. C'est sous cette forme plus générale qu'il nous sera le plus commode de prouver 9.4.7.

a) Pour toute extension panachée X, l'application

$$\mathrm{End}(X) \longrightarrow \mathrm{End}(X_\eta)$$

est bijective. Comme les deux membres sont respectivement les sections de $\underline{\mathrm{Hom}}(P,Q) = D(Q\otimes Q^*)$ sur S et sur η, l'assertion provient du fait que S est normal et que $D(Q\otimes Q^*)$ est fini sur S. De ceci résulte aussitôt que si X et Y sont deux extensions panachées, et si on sait déjà qu'elles sont isomorphes, alors

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(X_\eta, Y_\eta)$$

est bijectif.

b) Si X et Y sont deux extensions panachées, tout isomorphisme $X_\eta \xrightarrow{\sim} Y_\eta$ provient d'un isomorphisme $X \longrightarrow Y$. Grâce à a) la question est locale pour la topologie étale, ce qui nous permet de nous ramener au cas où S est strictement local. Mais dans ce cas 9.4.3 nous montre que l'application

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(P,Q) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(P_\eta , Q_\eta)$$

s'identifie à l'application

$$V^* \otimes \check{H}_o \longrightarrow K^* \otimes \check{H}_o$$

qui est injective (puisque la suite exacte $0 \longrightarrow V^* \longrightarrow K^* \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ est scindée), donc elle est injective, ce qui implique (grâce au scrite 9.3) que si X_η et Y_η sont isomorphes, il en est de même de X et de Y. On gagne donc par a).

Evidemment a) et b) impliquent que le foncteur $X \longmapsto X_\eta$ est pleinement fidèle.

c) Soit X_η une extension panachée sur η, prouvons qu'elle se prolonge à S si et seulement si les accouplements (9.4.6.2) sont nuls. Ici encore, l'unicité déjà prouvée montre que la question est locale pour la topologie étale, ce qui nous ramène encore au cas S strictement local. Alors la conclusion est vraie par construction, comme on avait signalé juste avant 9.4.6.

Ainsi la démonstration de 9.4.7 est achevée.

9.5. Supposons maintenant fixé un nombre premier ℓ, des pro-ℓ-groupes de Barsotti-Tate sur S,

(9.5.1) $$P = (P(n))_{n\geq 0}\ ,\quad R = (R(n))_{n\geq 0}\ ,\quad Q = (Q(n))_{n\geq 0}\ ,$$

et des extensions de pro-ℓ-groupes de Barsotti-Tate

(9.5.2) $$0 \longrightarrow P \longrightarrow F \longrightarrow R \longrightarrow 0\ ,\quad 0 \longrightarrow R \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0\ ,$$

définissant donc pour tout entier $n \geq 0$ des extensions de Λ_n-Modules où $\Lambda_n = \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}$:

(9.5.3) $$0 \longrightarrow P(n) \longrightarrow F(n) \longrightarrow R(n) \longrightarrow 0,\quad 0 \longrightarrow R(n) \longrightarrow E(n) \longrightarrow Q(n) \longrightarrow 0\ .$$

Nous supposerons Q de type étale et P de type multiplicatif. Supposons enfin donnée sur η un pro-ℓ-groupe de Barsotti-Tate X_η qui soit <u>extension panachée</u> de E_η par F_η, par quoi nous entendons qu'il est muni d'une filtration en trois crans (en tant que pro-ℓ-groupe de Barsotti-Tate), donnant lieu à des extensions partielles munies d'isomorphismes avec E_η et F_η respectivement. Il s'ensuit que pour tout n, $X_\eta(n)$ est muni d'une structure d'extension panachée de $E(n)_\eta$ par $F(n)_\eta$. Nous pouvons lui faire correspondre alors un accouplement du type (9.4.1) :

(9.5.4) $$c(X(n)_\eta) \; : \; Q(n) \otimes Q^*(n) \longrightarrow \Lambda_n = \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z} \quad ,$$

où les $Q^*(n)$ sont les groupes finis étales sur S définis par

$$P(n) \simeq D(Q^*(n)) \;, \quad \text{i.e.} \quad Q^*(n) = D(P(n)) \quad ,$$

D désignant encore la dualité de Cartier. Les $Q^*(n)$ forment un pro-ℓ-groupe de façon évidente, soit Q^*. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que pour n variable, les homomorphismes (9.5.4) définissent un homomorphisme de systèmes projectifs, i.e. un homomorphisme de faisceaux ℓ-adiques constants tordus sur S :

(9.5.5) $$c(X_\eta) \; : \; Q \otimes Q^* \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ell S} \quad .$$

Signalons en passant le résultat suivant (qui ne sera pas utilisé dans la suite) :

<u>Proposition</u> 9.5.6. <u>Les données</u> P,Q,R,E,F <u>sont les mêmes que ci-dessus, sauf qu'il est inutile de supposer le trait</u> S <u>hensélien.</u> <u>On considère le foncteur</u>

(9.5.6.1) $$X \longmapsto X_\eta$$

<u>de la catégorie des extensions panachées de Barsotti-Tate de</u> E <u>par</u> F

dans la catégorie des extensions panachées de E_η par F_η. Pour tout groupe de Barsotti-Tate extension panachée X_η de E_η par F_η, on considère l'accouplement correspondant

(9.5.6.2) $$Q_o \otimes Q_o^* \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ell s} \quad ,$$

induit par l'accouplement du type (9.5.5) défini sur le hensélisé de S. Ceci posé, le foncteur (9.5.6.1) est pleinement fidèle, et son image essentielle est formée des groupes de Barsotti-Tate X_η extensions panachées de E_η par F_η telles que l'accouplement (9.5.6.2) correspondant soit nul. De plus, lorsque car.K = 0 (de sorte qu'on peut appliquer le théorème de TATE [33 th. 4]), alors X_η appartient à l'image essentielle si et seulement si X_η se prolonge en un groupe de Barsotti-Tate sur S.

9.5.6.3. Nous laissons au lecteur le soin d'étendre cet énoncé au cas où on suppose seulement que S est un schéma noethérien régulier connexe de dimension 1.

La première assertion de 9.5.6 est une conséquence immédiate de 9.4.6, appliqué aux composants des groupes de Barsotti-Tate envisagés. Il reste à prouver que si un groupe de Barsotti-Tate X_η, extension panachée de E_η par F_η, se prolonge en un groupe de Barsotti-Tate X_η sur S, il se prolonge aussi comme extension panachée. Or en vertu du théorème de TATE [33], l'homomorphisme $X_\eta \longrightarrow Q_\eta$ se prolonge de façon unique en un homomorphisme

$$X \longrightarrow Q \quad .$$

Pour tout entier n, l'homomorphisme correspondant $X(n) \longrightarrow Q(n)$, étant surjectif sur les fibres génériques, est surjectif ; comme $Q(n)$ est étale sur n, donc $X(n) \longrightarrow Q(n)$ est plat, il s'ensuit que c'est un épimorphisme. Donc $X \longrightarrow Q$ est un épimorphisme composant par composant. Si donc $\overline{F}$ désigne le noyau de $X \longrightarrow Q$, il s'ensuit que $\overline{F}$ est un groupe de Barsotti-Tate et X est une extension de Q par $\overline{F}$. D'ailleurs l'isomorphisme $F_\eta \xrightarrow{\sim} \overline{F}_\eta$ se prolonge, par le théorème de TATE, en un isomorphisme $F \simeq \overline{F}$. Par suite, X apparaît comme une extension de Q par F. Considérons alors le quotient $\overline{E} = X/P$, on voit encore, par application du théorème de TATE, qu'on a un isomorphisme $E \simeq \overline{E}$. Il s'ensuit que X est une extension panachée de E par F prolongeant l'extension panachée X_η, cqfd.

Remarques 9.5.6.4. a) Bien entendu, la dernière assertion de 9.5.6 devrait être valable sans restriction sur K, puisqu'il devrait en être ainsi du théorème de Tate invoqué.

b) On peut donner une autre démonstration du critère de bonne réduction 5.10, en se ramenant comme dans 5.10 au cas où A_K est à réduction semi-stable, et en appliquant alors 9.5.6 à $T_\ell(A_K)$ considérée comme extension panachée (cf. 9.6), qui implique $u_\ell = 0$, et utilisant 11.6.2 a) plus bas qui implique que l'on a $T_\ell(A_K)^t = 0$.

9.5.8. Lorsque $\ell \neq p$, les groupes de Barsotti-Tate envisagés sur S resp. sur K s'interprètent simplement en termes de faisceaux ℓ-adiques constants tordus sur S, ou de façon équivalente, en termes de représentations de $\pi_o = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ resp. de $\pi = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur des $\mathbb{Z}_\ell$-modules libres de type fini. On constate alors que l'homomorphisme (9.5.6) est l'homomorphisme canonique qui exprime l'action du sous-groupe d'inertie $I \subset \pi$ sur $X_\eta(\overline{K})$, défini par la méthode de 9.2. Pour le vérifier, on se ramène immédiatement à la situation de 9.4, en y supposant que n est égal à une puissance de ℓ, et que R est un Λ-Module localement constant (tout comme Q et P), de sorte qu'il en est également de même de E, F et de X_η. La vérification de l'identité des deux définitions est alors laissée au lecteur.

9.6. Nous sommes maintenant en mesure de définir l'accouplement canonique annoncé (9.1.2), sans restriction sur ℓ, de telle façon que pour $\ell \neq p$ cette définition coïncide avec celle donnée dans 9.2. Pour ceci, on applique les considérations de 9.5 à la situation suivante :

$$(9.6.1)\quad \left\{\begin{array}{l} P = T_\ell(A^{\circ})^t = \check{\underline{M}}'_\ell(1)\ ,\ Q = M_\ell\ ,\ R = T_\ell(A^{\circ})^f/T_\ell(A^{\circ})^t\quad , \\ \\ \qquad\qquad F = T_\ell(A^{\circ})^f\ ,\ E = D(F') = D(T_\ell(A'^{\circ})^f)\quad , \end{array}\right.$$

où dans la dernière formule D désigne le dual de Cartier au sens des pro-ℓ-groupes de Barsotti-Tate, i.e D(Y) est le système <u>projectif</u> des D(Y(n)), pour les morphismes de transition habituels. La structure de F comme extension de R par P est claire. On a de même sur $F' = T_\ell(A'^{\circ})^f$ une structure d'extension de R' par $P' = T_\ell(A'^{\circ})^t = \check{\underline{M}}_\ell(1)$. Appliquant la dualité de Cartier, on en conclut que $E = D(F')$ est muni d'une structure d'extension de $D(P') = M_\ell$ par D(R'). Or D(R') est canoniquement isomorphe à R en vertu de 5.5 (prouvé dans 7.4.6), ce qui précise la structure de E comme extension de Q par R.

Comme extension panachée X_η de E_η par F_η, on prendra

(9.6.2) $$X_\eta = T_\ell(A_K) = X_\eta^o \supset X_\eta^1 = T_\ell(A_K)^f \supset X_\eta^2 = T_\ell(A_K)^t \supset 0 \quad .$$

L'isomorphisme d'extensions de R_η par P_η

$$X_\eta^1 \simeq F_\eta$$

est clair. L'isomorphisme d'extensions de Q par R :

$$X_\eta/X_\eta^2 \simeq F_\eta = D(F'_\eta)$$

est clair grâce au théorème d'orthogonalité 5.2.

Nous disposons donc des données requises pour définir un accouplement (9.5.6), qui ici (comme $Q^* = \underline{M}'_\ell$) prend la forme (9.1.2). Le fait que cette définition soit compatible avec celle de 9.2 résulte de 9.5.8. Les considérations de 5.8 montrent d'autre part, sous réserve de la validité du théorème de TATE [33] (donc en tous cas dans le cas où car K = 0) que l'accouplement en question peut se décrire en termes du seul ℓ-pro-groupe de Barsotti-Tate $X_\eta = T_\ell(A_K)$ sur S (puisque sa filtration en trois crans, et les extensions F et E qui prolongent X_η^1 et X_η/X_η^2, peuvent se définir canoniquement en termes du seul pro-ℓ-groupe $X = T_\ell(A_K)$.

Remarque 9.7. Ne supposons plus nécessairement que A_K ait réduction semi-stable sur le trait hensélien S, et soit K' une extension galoisienne finie de K telle que $A_{K'}$ ait réduction semi-stable sur le normalisé S' de S dans K' (3.6). Avec les notations de (8.1.3), on définit alors, par descente galoisienne à partir de l'accouplement de monodromie pour $A_{K'}$, un accouplement

$$(*) \qquad v_{\ell}^{K'} : \underline{M}_K \otimes \underline{M}'_K \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ell K} \quad .$$

Ce dernier à priori dépend du choix de K' , mais il résulte de (10.4.3) ci-dessous que l'accouplement

$$(9.7.1) \qquad u_{\ell} : \underline{M}_K \otimes \underline{M}'_K \longrightarrow \mathbb{Q}_{\ell K}$$

donné par

$$u_{\ell} = (1/e(S'/S))\, v^{K'}_{\ell}$$

n'en dépend pas, où $e(S'/S) = \mathrm{long}(V'/\underline{m}V')$. On pourra appeler encore (9.7.1) l'accouplement de monodromie pour le schéma abélien A_K sur K et le nombre premier ℓ envisagé, puisque dans le cas où A_K lui-même a réduction semi-stable, il coïncide évidemment avec la restriction à η de l'accouplement de monodromie (9.1.2). Il résulte de 10.4 plus bas que cet accouplement est en fait toujours à valeurs dans $\mathbb{Q}_K$, et est indépendant de ℓ .

On peut se demander s'il est à valeurs dans $\mathbb{Z}_K$, ce qui revient à dire que (9.7.1) est à valeurs dans $\mathbb{Z}_{\ell K}$ pour tout nombre premier ℓ . C'est le cas du moins si A_K est une courbe elliptique, le seul cas qui demande une vérification étant alors celui où $\underline{M}_K \simeq \underline{M}'_K$ est de rang 1, de sorte que $\underline{M}_K \otimes \underline{M}'_K$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}_K$, et que l'accouplement de monodromie (9.7.1) peut s'interprèter simplement comme un nombre rationnel ordinaire. On trouve grâce aux résultats de NERON [19] que celui-ci est égal à $v(j)$, j étant l'invariant absolu de A_K et v la valuation normalisée de K .

10. Propriétés de l'accouplement de monodromie. Théorème d'intégrité et de positivité

Dans le présent paragraphe, nous allons donner tout d'abord certaines propriétés formelles essentiellement triviales des accouplements de monodromie, le détail (un peu fastidieux) des vérifications étant laissé au lecteur. D'autre part, nous indiquons un théorème plus profond (10.4) concernant ces accouplements, et indiquons comment on peut se réduire pour sa démonstration à un cas spécial de jacobiennes, qui sera traité (par voie transcendante) au par. 12 (qui est d'ailleurs logiquement indépendant du par. 11).

10.1. Transport de structure. Il est clair, sur la définition donnée de l'accouplement de monodromie (9.1.2), que cet accouplement est compatible avec le transport de structure en la situation (S,A_K,A'_K).

10.2. Symétrie. Si nous partons du schéma dual A'_K de A_K et lui appliquons la construction du par. 9, nous devons introduire le schéma dual $(A'_K)'$ de A_K , qui est canoniquement isomorphe à A_K par le théorème de bidualité ([5] ou VIII 3.2). Désignons par $u_\ell^{A_K}$ l'accouplement de monodromie (9.1.2) relativement à A_K , de sorte qu'on trouve de même un accouplement

(10.2.1) $$u_\ell^{A'_K} : \underline{M}'_\ell \otimes \underline{M}_\ell \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \quad .$$

Ceci posé, je dis que ce dernier se déduit de $u_\ell^{A_K}$ par la symétrie

$$s : \underline{M}_\ell \otimes \underline{M}'_\ell \xleftarrow{\sim} \underline{M}'_\ell \otimes \underline{M}_\ell \quad ,$$

i.e. on a la formule

(10.2.2) $$u_\ell^{A'_K} = u_\ell^{A_K} \, s \quad .$$

Compte tenu de la propriété connue d'anticommutativité des accouplements φ_ξ ([5] ou VIII 2.2.11), la formule de symétrie (10.2.2) peut se reformuler de la façon suivante, en termes d'une polarisation fixée ξ de A_K, qui définit un homomorphisme $\tilde{\xi} : A_K \longrightarrow A'_K$, d'où un homomorphisme correspondant (t étant l'initiale de "torique")

(10.2.3) $$\xi_t : \underline{M} \longrightarrow \underline{M}' \quad ,$$

permettant de former l'accouplement

(10.2.4) $$\varphi^t_{\xi\ell} : \underline{M}_\ell \otimes \underline{M}_\ell \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \ , \ \varphi^t_{\xi,\ell}(x,y) = u_\ell^{A_K}(x,\xi_t(y)) \quad :$$

la forme précédente $\varphi^t_{\xi,\ell}$ est <u>symétrique</u> :

(10.2.5) $$\varphi^t_{\xi\ell}(x,y) = \varphi^t_{\xi\ell}(y,x) \quad .$$

En fait, cet énoncé est valable pour tout élément ξ du groupe de Néron-Séveri de A_K (pas nécessairement une polarisation) ; mais ce n'est que lorsque ξ est non dégénéré i.e. définit une <u>isogénie</u> $A_K \to A'_K$ donc aussi une isogénie (10.2.3), que la relation de symétrie (10.2.5) est équivalente à la relation de symétrie (10.2.2). D'ailleurs dans le cas où ξ est une polarisation, on va préciser considérablement (10.2.5) dans 10.4 b) plus bas.

Signalons enfin une troisième façon d'interpréter la relation de symétrie. Pour ceci, considérons une biextension (= correspondance divisorielle) ξ sur un couple $(A_K,\overline{A}_K)$ de schémas abéliens à réduction semi-stable sur K, qui définit un homomorphisme

$$A_K \longrightarrow \overline{A}'_K \quad ,$$

et par passage aux modèles de Néron définit donc un homomorphisme sur les tores maximaux des fibres spéciales, donc en sens inverse un homomorphisme sur les Groupes de caractères, d'où un homomorphisme

(10.2.6) $$\xi_t : \overline{M} \longrightarrow \underline{M}' \quad ,$$

où $\overline{M}$ est défini en termes de $\overline{A}_K$ comme $\underline{M}$ en termes de A_K. On peut donc former l'accouplement

(10.2.7) $$\varphi_{\xi}^{t} \ : \ \underline{M}_{\ell} \otimes \overline{\underline{M}}_{\ell} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ell} \quad , \quad \varphi^{t}(x,y) = \varphi^{t}(x,\xi_t(y)) \quad .$$

Notons en passant que pour un schéma abélien A_K à réduction semi-stable variable, le Groupe constant tordu $\underline{M}$ est un foncteur covariant en A_K, et qu'alors la formation des accouplements (10.2.7) associés aux biextensions de schémas abéliens à réduction semi-stable sur (K,S) est compatible, en un sens évident, avec la formation des images inverses de biextensions. Bien entendu, lorsque ξ est la biextension canonique ("de Weil") de (A_K , A_K'), l'accouplement (10.2.7) n'est autre que l'accouplement de monodromie (9.2.1). - Ceci posé, la relation de symétrie peut s'exprimer de la façon suivante : considérons la symétrique ${}^{s}\xi$ de ξ, qui est une biextension de $(\overline{A}_K,A_K)$, d'où un accouplement

$$\varphi_{s_\xi}^{t} \ : \ \overline{\underline{M}}_{\ell} \otimes \underline{M}_{\ell} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ell} \quad ;$$

on a alors la relation de symétrie

(10.2.8) $$\varphi_{s_\xi}^{t} = \varphi_{\xi}^{t} \circ s \quad , \quad \text{où} \quad s : \overline{\underline{M}}_{\ell} \otimes \underline{M}_{\ell} \xrightarrow{\sim} \underline{M}_{\ell} \otimes \overline{\underline{M}}_{\ell}$$

est encore l'isomorphisme de symétrie. On comparera cette relation à la relation d'antisymétrie de VIII 2.2.11.

10.3. <u>Changement de trait</u>. Soit maintenant

$$(10.3.1) \qquad g : S' \longrightarrow S$$

un morphisme dominant de traits henséliens, associé à un homomorphisme local injectif d'anneaux de valuation discrète

$$V \longrightarrow V' \quad ;$$

posons comme d'habitude

$$(10.3.2) \qquad e(S'/S) = \mathrm{long}_V V'/\underline{m}V' \quad ,$$

$\underline{m}$ étant l'idéal maximal de V. On sait alors que l'homomorphisme induit par (10.3.1) sur les parties "modérées" des groupes d'inertie

$$(10.3.3) \qquad g_* : I'_t \simeq \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell(1)(k') \longrightarrow I_t = \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell(1)(k)$$

est donné par

$$(10.3.4) \qquad g_*(x) = e(S'/S)\, x \quad ,$$

en identifiant les deux membres de (10.3.3) à l'aide des isomorphismes évidents $\mathbb{Z}_\ell(1)(k) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_\ell(1)(k')$ (I).

Notons d'autre part que, pour un schéma abélien A_K sur K à réduction semi-stable sur S, la formation des réseaux tordus $\underline{M}$, $\underline{M}'$ commute à tout changement de base $S' \longrightarrow S$ comme dessus, comme il résulte aussitôt des définitions (notamment 3.4). On peut donc considérer l'accouplement $u_\ell^{A_K}$ défini par $A_{K'}$ (K' = corps des fractions de V') comme un accouplement

$$u_\ell^{A_{K'}} : \underline{M}_{\ell S'} \otimes \underline{M}'_{\ell S'} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ell S'} \quad ,$$

et le comparer à l'accouplement $u_{\ell S'}^{A_K}$, déduit de $u_\ell^{A_K}$ par changement de base. Lorsque $\ell \neq p$, la construction des accouplements u_ℓ donnée dans 9.2, jointe à la formule (10.2.3), montre immédiatement qu'on a alors

$$u_\ell^{A_{K'}} = e(S'/S) \quad u_\ell^{A_K} \quad . \tag{10.3.5}$$

Cette formule reste en fait valable également pour $\ell = p$, comme on voit en revenant à la construction générale donnée dans 9.3 à 9.6, en se ramenant à un énoncé de compatibilité analogue à (10.3.5) pour l'isomorphisme 9.4.4 e), pour un changement de traits strictement locaux $S' \longrightarrow S$. (On notera que l'isomorphisme en question est déduit de l'isomorphisme $K^*/V^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ déduit de la <u>norme</u>, donnant donc lieu au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K^*/V^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d, "e(S'/S)"] \\
K'^*/V'^* \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$
.)

Voici un résultat plus profond concernant les accouplements de monodromie, dont on donnera une démonstration par voie transcendante au par. 12, en nous appuyant sur des résultats qui seront démontrés ultérieurement dans le Séminaire. (Nous n'utiliserons d'ailleurs pas 10.4 dans la suite du Séminaire, pas plus que les autres résultats du présent exposé.)

Théorème 10.4. *Soient* S *un trait hensélien,* A_K *un schéma abélien sur* K *à réduction semi-stable sur* S. *Considérons les réseaux* $\underline{M}$ *et* $\underline{M}'$ *associés comme dans* 9.1 (cf. 5.5.2). *Alors on a ce qui suit* :

a) *Il existe un unique accouplement*

(10.4.1) $$u : \underline{M} \otimes \underline{M}' \longrightarrow \mathbb{Z}_S$$

tel que pour tout nombre premier ℓ, $u \otimes \mathbb{Z}_\ell$ *soit l'accouplement de monodromie* u_ℓ *de* (9.1.2). *Cet accouplement est séparant.*

b) *Soit* ξ *une polarisation de* A_K , *définissant donc un homomorphisme* (10.2.3)

$$\xi_t : \underline{M} \longrightarrow \underline{M}' \quad ,$$

et considérons la forme

(10.4.2) $$\varphi_\xi^t : \underline{M} \otimes \underline{M} \longrightarrow \mathbb{Z}_S \quad , \quad \varphi^t(x,y) = u(x, \xi_t(y)) \quad .$$

Cette forme est symétrique, positive *et* non dégénérée.

Bien entendu, en termes de la fibre géométrique M_o de $\underline{M}$ en un point géométrique donné sur S, l'assertion précédente signifie que la forme correspondante

$$M_o \otimes M_o \longrightarrow \mathbb{Z}$$

est symétrique, positive et non dégénérée. Quand à l'accouplement (10.4.1), on l'appelera encore l'*accouplement de monodromie*.

10.5. Réduction de 10.4 à un cas particulier

10.5.1. L'unicité d'un u satisfaisant la condition énoncée (même pour un seul ℓ) est claire. D'autre part, l'existence signifie simplement que chaque u_ℓ applique en fait $\underline{M}\otimes\underline{M}'$ dans $\mathbb{Z}_S$, et que l'homomorphisme ainsi obtenu $\underline{M}\otimes\underline{M}' \to \mathbb{Z}_S$ est indépendant de ℓ. En fait, il suffit même de prouver l'assertion analogue pour les $u_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ et un $u_{\mathbb{Q}} : \underline{M}_{\mathbb{Q}} \otimes \underline{M}'_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}_S$.

Supposons alors qu'on ait établi l'existence après changement de base $S' \longrightarrow S$ comme dans 9.3. Alors il résulte immédiatement de (10.3.5) qu'il existe un homomorphisme

$$u : \underline{M} \otimes \underline{M}' \longrightarrow \frac{1}{e(S'/S)} \mathbb{Z}_S \subset \mathbb{Q}_S$$

compatible avec les $u_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$, d'où a). Quant à b), il est trivial alors que s'il est vrai pour $A_{K'}$, il l'est aussi pour A_K.

Par suite, nous pouvons, pour prouver 10.4, nous permettre n'importe quel changement de traits $S' \longrightarrow S$ dominant. Ceci nous permet en particulier de supposer S complet à corps résiduel algébriquement clos. Dans ce cas, $\underline{M}$ et $\underline{M}'$ sont des schémas en groupes constants, de valeur M,M' des modules libres de type fini sur $\mathbb{Z}$, et a) et b) se reformulent avantageusement en termes de ces derniers.

10.5.2. Supposons maintenant que A_K soit isomorphe à un facteur direct d'un schéma abélien $\overline{A}_K$ sur k à réduction semi-stable, et que 10.4 soit prouvé pour ce dernier. Alors il en résulte aussitôt que 10.4 est valable également pour A_K, compte tenu du comportement fonctoriel évident des réseaux $\underline{M}$,$\underline{M}'$, et des accouplements de monodromie, vis-à-vis des sommes directes de schémas abéliens à réduction semi-stable.

Il est également immédiat, grâce à 10.5.1, que la validité de 10.4 ne dépend que de la classe à isogénie près de A_K . Joint à la remarque précédente, et du "théorème de réductibilité de Poincaré" [15], ceci nous montre que si A_K est quotient d'un schéma abélien $\overline{A}_K$ pour lequel 10.4 est valable, il en est de même pour A_K .

10.5.3. Utilisons maintenant le fait bien connu [31, th. 11 (p.20)] que, quitte à faire une extension finie sur K (ce qui est loisible, grâce à 10.5.1), tout schéma abélien A_K est quotient de la jacobienne ($= \underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{X_K/K}$) d'une courbe propre, lisse et géométrique connexe X_K sur X. Compte tenu de 10.5.2, on est donc ramené à prouver 10.4 dans le cas d'une telle jacobienne.

10.5.4. D'après un théorème de ARTIN-MUMFORD [2] (déjà cité et utilisé dans V), quitte à faire encore une extension finie K' de K, on peut supposer que X_K se prolonge en un schéma projectif et plat sur S, régulier, et tel que la fibre spéciale géométrique $X_{\overline{s}}$ n'ait comme seuls points singuliers que des points singuliers quadratiques ordinaires (i.e. ici, des croisements normaux de deux branches). Dans ce cas, nous prouverons 10.4 a) dans 12.5 plus bas, en explicitant entièrement l'accouplement de monodromie (10.4.1) en termes des données géométriques de la situation, et nous vérifierons en même temps 10.4 b) dans le cas de la polarisation canonique de la jacobienne.

10.5.5. Il reste à voir que si pour un A_K donné à réduction semi-stable, 10.4 a) est vrai, et 10.4 b) est vrai pour <u>une</u> polarisation donnée ξ_o de A_K , alors cette conclusion reste vraie pour <u>toute</u> polarisation ξ de A_K . En effet, si $\widetilde{\xi}_o$, $\widetilde{\xi}$ désignent les homomorphismes

$$\widetilde{\xi}_o \ , \ \widetilde{\xi} : A_K \longrightarrow A'_K$$

définis par ξ_o , ξ , qui sont donc des isogénies, on aura

$$\widetilde{\xi} = \widetilde{\xi}_o \, \alpha = {}^t\alpha^* \, \widetilde{\xi}_o \ , \text{ avec } \alpha \in \mathrm{End}(A_K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \quad ,$$

où $\alpha \longmapsto \alpha^*$ désigne l'involution canonique de l'algèbre $\mathrm{End}(A_K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ définie par la polarisation ξ_o , et où l'exposant t dans ${}^t(\alpha^*)$ désigne le transposé (associant à un endomorphisme de A_K un endomorphisme de A'_K). D'autre part, il est connu [15, Chap V th.3] que l'on a

$$\alpha = \sum_i \beta_i^* \, \beta_i \quad , \quad \text{avec } \beta_i \in \mathrm{End}(A_K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \quad ,$$

d'où

$$\widetilde{\xi} = \sum_i {}^t\beta_i \widetilde{\xi}_o \beta_i \quad ,$$

ou encore, en termes des biextensions (= correspondances divisorielles) associées aux polarisations envisagées (VIII 4.14) :

(10.5.5.1) $$\delta(\xi) = \sum_i \delta(\xi_o) \circ (\beta_i , \beta_i) \quad .$$

D'après ce qui a été dit après (10.2.7), cette formule implique (avec les notations de (10.4.2))

(10.5.5.2) $$\varphi^t_{\xi} = \sum_i \varphi^t_{\xi_o} \, (\beta_i , \beta_i) \quad \in \mathrm{Hom}(M_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} M_{\mathbb{Q}} , \mathbb{Q}) \quad .$$

Elle implique bien que si $\varphi^t_{\xi_o}$ est symétrique et positive, il en est de même de φ^t_{ξ} .

Enfin, le fait que $\varphi^t_{\xi_o}$ soit non dégénérée équivaut évidemment à l'assertion que l'accouplement (10.4.1) est séparant (compte tenu que $\xi_{ot} : M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow M' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un isomorphisme, $\widetilde{\xi}_o$ étant une isogénie), et est donc également indépendant de la polarisation choisie. On peut d'ailleurs noter que pour vérifier que (10.4.1) est séparant, il suffit de vérifier la même assertion pour l'accouplement de monodromie u_ℓ (9.1.2) pour un nombre premier ℓ . Prenant $\ell \neq p$, on peut utiliser la description 9.2 de u_ℓ ; le fait que u_ℓ soit séparant à gauche (donc des deux côtés, pour une raison de rangs) est alors trivial.

11. Composantes connexes du modèle de Néron : relation de dualité, comportement assymptotique

11.0. Le but du présent paragraphe est l'étude du k-groupe fini étale

(11.0.1) $$\Phi_o = A_o/A_o^{\,o}$$

déjà considéré dans 1. Pour tout nombre premier ℓ, nous désignons par

$$\Phi_o(\ell)$$

la composante ℓ-primaire de ce dernier, de sorte que la connaissance de Φ_o équivaut à celle des $\Phi_o(\ell)$, grâce à la formule

(11.0.2) $$\Phi_o = \coprod_\ell \Phi_o(\ell) \quad .$$

Notons que les groupes Φ_o , $\Phi_o(\ell)$ sont déterminés respectivement par la connaissance des groupes finis ordinaires $\Phi_o(\overline{k})$, $\Phi_o(\ell)(\overline{k})$ et de l'opération naturelle de $\pi_o = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ sur ces derniers. D'autre part, il est clair que $\Phi_o(\overline{k})$ est aussi le groupe des composantes connexes du modèle de Néron de $A_{\widetilde{K}}$, où $\widetilde{K}$ est le corps des fractions de l'hensélisé strict de S relativement à la clôture séparable choisie $\overline{k}$ de k. Ceci nous permet donc, pour l'étude de Φ_o , de nous ramener au cas où S est strictement local, - les opérations de $\pi_o \simeq \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ sur $\Phi_o(\overline{k})$ se récupérant automatiquement par transport de structure. On pourrait de même se ramener au cas où S est de plus complet, grâce au changement de base $\hat{S} \longrightarrow S$, grâce au fait que la formation du modèle de Néron y commute [21, th. 3.4 b)].

11.1. Supposons donc S strictement local, de sorte que Φ_o peut s'identifier à un groupe fini ordinaire $\Phi_o(k)$, et on trouve

(11.1.1) $$\Phi_o(k) \simeq A_o(k)/A_o^{\circ}(k) \simeq A(S)/A^{\circ}(S) \simeq A(K)/A(K)^{\circ} \quad ,$$

où la première égalité provient du fait que A_o est lisse sur k, la deuxième du "lemme de Hensel" compte tenu du fait que A est lisse sur S et S hensélien, enfin la troisième provient de la relation $A(S) \xrightarrow{\sim} A(K)$ et du fait que nous posons

(11.1.2) $$A(K)^{\circ} \overset{\mathrm{dfn}}{=} A^{\circ}(S) \quad ,$$

de sorte que $A(K)^{\circ}$ apparaît comme un sous-groupe d'indice fini naturel dans A(K) (à ne pas confondre avec $A^{\circ}(K) = A(K)$!). Les isomorphismes

(11.1.1) sont évidemment fonctoriels en A, et compatibles avec le transport de structure en (S,A_K), et en particulier avec l'action d'éventuels groupes de Galois.

Supposons maintenant que ℓ soit un nombre premier $\neq p$, de sorte que A^o est ℓ-divisible, et plus précisément $\ell\, id_{A^o}$ est un morphisme étale et surjectif, de sorte que ce morphisme induit un endomorphisme surjectif de $A^o(S)=A(K)^o$, qui est donc un <u>groupe ℓ-divisible</u>. Il en résulte aussitôt que pour tout entier $n \geq 0$ premier à $p = car(k)$, on a la relation

$$(11.1.3) \qquad {}_n\Phi_o(k) \simeq {}_nA(K)/{}_nA(K)^o \quad , \quad \text{pour } (n,p) = 1 \quad .$$

Or par définition (2.2.3) de la partie fixe de ${}_nA_K$, on a

$$(11.1.4) \qquad {}_nA(K)^o = ({}_nA_K)^f(\overline{K}) \simeq T_n(A_K)^f(\overline{K}) \otimes_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad .$$

Prenant pour n une puissance de ℓ, et posant comme dans (2.5.3)

$$(11.1.5) \qquad U = T_\ell(A(\overline{K})) \text{ , d'où } T_\ell(A(\overline{K}))^f = U^I \quad ,$$

où U^I désigne le sous-module de U formé des invariants sous le groupe d'inertie I, on peut écrire (11.1.3) sous la forme

$$(11.1.6) \qquad {}_n\Phi_o(k) \simeq (U_n)^I/(U^I)_n \quad , \quad n = \ell^{r+1} \quad ,$$

où l'indice n désigne la réduction mod. n i.e. le produit tensoriel sur $\mathbb{Z}_\ell$ avec $\mathbb{Z}_\ell/n\mathbb{Z}_\ell$. Les morphismes de transition entre les groupes intervenant dans les deux membres de (11.1.6) étant évidents, on déduit de (11.1.6), par passage à la limite inductive sur les puissances de ℓ, la

Proposition 11.2. *Supposons* S *strictement local, et soit* ℓ *un nombre premier* $\neq$ p. *Alors on a un isomorphisme canonique*

(11.2.1) $$\Phi_o(\ell) \simeq (U\otimes D_\ell)^I / U^I \otimes D_\ell \quad ,$$

où U *est défini dans* (11.1.5) *et où on pose* $D_\ell = \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$.

Ainsi, le groupe $\Phi_o(\ell)$ peut s'expliciter en termes de la seule connaissance du module de Tate $U = T_\ell(A(\overline{K}))$ comme module galoisien sous l'action du groupe d'inertie I.

11.3. On va utiliser l'expression explicite (11.2.1) pour esquisser la définition d'un accouplement canonique

(11.3.1) $$\Phi_o(\ell) \otimes \Phi'_o(\ell) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad ,$$

qui est une dualité parfaite, - Φ'_o désignant comme au par. 1 le groupe de composantes connexes associé au modèle de Néron du *dual* A'_K de A_K . Il n'y a guère de doute (mais le rédacteur s'est dispensé de faire la vérification) que cet accouplement n'est autre, éventuellement au signe près, que celui défini dans (1.2.1), et le lecteur est invité à titre d'exercice d'établir la compatibilité voulue (avec le signe correct !).

Posons

$$U' = T_\ell(A'(\overline{K})) \quad , \quad T = T_\ell(1)(\overline{K}) = T_\ell(\overline{K}^*) \quad .$$

On a *un accouplement parfait* de $\mathbb{Z}_\ell$-modules libres de type fini, compatible aux actions de I :

(11.3.2) $$\varphi : U \otimes U' \longrightarrow T, \quad (T \simeq \mathbb{Z}_\ell \text{ non canoniquement}) \quad ,$$

et, en vertu de la structure connue de I (I), une suite exacte

$$(11.3.3) \qquad 1 \longrightarrow R \longrightarrow I \dashrightarrow T \longrightarrow 1 \quad ,$$

avec R un groupe pro-fini <u>premier à ℓ</u> . Si maintenant nous <u>partons</u> de données (11.3.2) et (11.3.3), et introduisons les groupes

$$(11.3.4) \qquad \Phi = (U \otimes D_\ell)^I / U^I \otimes D_\ell \ , \ \Phi' = (U' \otimes D_\ell)^I / U'^I \otimes D_\ell \ , \ (D_\ell = \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell)$$

nous allons définir une dualité parfaite

$$(11.3.5) \qquad \Phi \otimes \Phi' \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad ,$$

ce qui nous donnera en particulier l'accouplement annoncé (11.3.1). Considérons la suite exacte de I-modules

$$(11.3.6) \qquad 0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} U \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{j} U \otimes D_\ell \longrightarrow 0 \quad ,$$

et la suite exacte de cohomologie associée, en prenant la cohomologie de I définie par les <u>cochaînes continues</u> à coefficients dans les groupes topologiques envisagés :

$$(11.3.7) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & H^0(I,U) & \xrightarrow{i^0} & H^0(I,U\otimes\mathbb{Q}_\ell) & \xrightarrow{j^0} & H^0(I,U\otimes D_\ell) & \xrightarrow{\partial} & H^1(I,U) & \xrightarrow{i^1} H^1(I,U\ldots \\ & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & & \wr\| \\ & U^I & & (U\otimes\mathbb{Q}_\ell)^I \simeq U^I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & & (U\otimes D_\ell)^I & & & H^1(I,U)\otimes\ldots \end{array}$$

Il est immédiat que Φ défini par (11.3.4) n'est autre que coker j^0 , donc est canoniquement isomorphe à Ker i^1, i.e. on trouve une suite exacte canonique

$$(11.3.8) \qquad 0 \longrightarrow \Phi \longrightarrow H^1(I,U) \longrightarrow H^1(I,U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \quad ,$$

qui montre que Φ <u>est canoniquement isomorphe au sous-groupe de torsion de</u> $H^1(I,U)$.

D'autre part, de la suite exacte (11.3.3) on déduit un isomorphisme, pour tout $n = \ell^r$:

(11.3.9) $$H^1(I,T_n) \simeq \mathrm{Hom}(I,T_n) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(T,T_n) \xleftarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

(NB on fait opérer I trivialement sur T, donc sur $T_n = T/nT$) ; d'où, pour tout I-$\mathbb{Z}_\ell$-Module fini M, si

(11.3.10) $$M' = \mathrm{Hom}(M, T\otimes D_\ell)$$

désigne son "dual de Cartier", un accouplement canonique

(11.3.11) $$H^i(I,M) \otimes H^{1-i}(I,M') \longrightarrow H^1(I,T\otimes D_\ell) \simeq D_\ell \quad ,$$

où le dernier isomorphisme est déduit des isomorphismes (11.3.9) par passage à la limite inductive sur les puissances n de ℓ. Il est bien connu que ces accouplements sont des <u>dualités parfaites</u> (cf. par exemple SGA 5 I 5). Prenant dans ces accouplements M de la forme U_n , donc $M' = U'_n$, on trouve par passage à la limite un accouplement parfait

(11.3.12) $$H^o(I,\ U\otimes D_\ell) \times H^1(I,U') \longrightarrow D_\ell \quad ,$$

où le deuxième facteur du premier membre est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini. Un nouveau passage à la limite dans les accouplements (11.3.12) (pour des morphismes de transition de la forme $\ell^r.\mathrm{id}$) nous donne un deuxième accouplement parfait

(11.3.13) $$H^o(I,U\otimes\mathbb{Q}_\ell) \times H^1(I,U'\otimes\mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow D_\ell$$

de vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{Q}_\ell$. Désignant par i', j' les morphismes définis comme dans (11.3.6), avec U remplacé par U', on trouve alors aisément que les homomorphismes suivants

$$H^{o}(I, U\otimes\mathbb{Q}_{\ell}) \xrightarrow{j^{o}} H^{o}(I, U\otimes D_{\ell})$$

$$H^{1}(I, U'\otimes\mathbb{Q}_{\ell}) \xleftarrow{i'^{1}} H^{1}(I, U')$$

sont transposés l'un de l'autre, via les accouplements (11.3.12) et (11.3.13). Il en résulte aussitôt que coker j^{o} et Ker i'^{1} sont duals l'un de l'autre via un accouplement canonique à valeurs dans D_{ℓ} , qui est l'accouplement annoncé (11.3.5).

11.4. La description précédente d'un accouplement (11.3.1), via l'expression (11.2.1) pour la composante ℓ-primaire du groupe des composantes connexes, n'est valable que pour $\ell \neq p$. Supposant maintenant que A_K a réduction semi-stable sur S, nous allons encore définir des accouplements qui sont des dualités parfaites

(11.4.1) $$\Phi_{o}(\ell) \otimes \Phi'_{o}(\ell) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

sans restriction sur ℓ. Comme dans 11.4, il y aurait lieu d'établir qu'on retrouve (à un signe près peut-être qu'il conviendrait de préciser) l'accouplement défini dans (1.2.1), ce qui établirait donc la conjecture 1.3 dans le cas de la réduction semi-stable, comme dans le cas où l'on se restreint aux composantes ℓ-primaires pour $\ell \neq p$.

Pour définir (11.4.1), nous allons donner, essentiellement, une expression de $\Phi_{o}(\ell)$ en termes du groupe de Barsotti-Tate $T_{\ell}(A_K)$

sur K, qui jouera dans le cas présent le même rôle que 11.2 dans le cas traité précédemment :

Théorème 11.5. *Supposons* S *hensélien, et que* A_K *ait réduction semi-stable sur* S. *Soit* ℓ *un nombre premier, et considérons l'accouplement de monodromie* (9.1.2), *d'où un homomorphisme canonique*

$$\widetilde{u}_\ell : \underline{M}_\ell \longrightarrow \check{\underline{M}}'_\ell \quad .$$

Soit $\Phi(\ell) = \operatorname{coker} \widetilde{u}_\ell$; *alors on a un isomorphisme canonique*

(11.5.1) $$\Phi_o(\ell) \xrightarrow{\sim} \Phi(\ell) \times_S s \quad .$$

De cet énoncé résulte immédiatement la définition d'un accouplement parfait (11.4.1), puisque on trouve, en appliquant 11.5 à A'_K au lieu de A_K et utilisant (10.2.2), qu'on a aussi un isomorphisme canonique

$$\Phi'_o(\ell) \xrightarrow{\sim} \Phi'(\ell) \times_S s \quad , \quad \text{où } \Phi'(\ell) = \operatorname{coker}({}^t\widetilde{u}_\ell : \underline{M}'_\ell \longrightarrow \check{\underline{M}}_\ell) \quad .$$

Remarques 11.5.2. a) Le théorème 11.5 implique notamment que $\widetilde{u}_\ell$ est une isogénie i.e. que u_ℓ est séparant, y compris dans le cas $\ell = p$, où cette assertion n'est pas triviale sur la définition de 9.6. On notera que nous n'utilisons pas ici le théorème (nettement plus profond) 10.4, qui sera prouvé au par. suivant.

b) Utilisant 10.4, qui nous fournit un accouplement de monodromie u: $\underline{M} \otimes \underline{M}' \longrightarrow \mathbb{Z}_S$, et désignant par Φ le conoyau de l'homomorphisme correspondant

$$\widetilde{u} : \underline{M} \longrightarrow \check{\underline{M}}' \quad ,$$

on trouve une formulation équivalente de 11.5 indépendante du choix d'un ℓ, par l'isomorphisme canonique

(11.5.3) $$\Phi_o \simeq \Phi \times_S s \quad .$$

11.6. Pour définir l'isomorphisme (11.5.1), nous pouvons nous borner au cas où S est strictement local (11.0), de sorte que $\underline{M}$ et $\underline{M}'$ sont constants, de valeurs

(11.6.1) $$M = D(T_o') \quad , \quad M' = D(T_o) \quad ,$$

où T_o et T_o' sont les tores maximaux de A_o et de A_o' respectivement. Identifiant de même Φ_o à un groupe fini ordinaire, il faut définir un isomorphisme canonique entre sa composante $\Phi_o(\ell)$ et

$$\Phi(\ell) = \mathrm{coker}(\widetilde{u}_\ell : M_\ell \longrightarrow \check{M}_\ell') \quad .$$

En fait, nous allons définir directement un isomorphisme canonique

(11.6.2) $$\Phi_o(\ell) \simeq \ker(\widetilde{u}_\ell \otimes D_\ell : M_\ell \otimes D_\ell \longrightarrow \check{M}_\ell' \otimes D_\ell) \quad ;$$

comme $\Phi_o(\ell)$, est fini, et M_ℓ et $\check{M}_\ell'$ ont même rang, il en résultera d'abord que $\widetilde{u}_\ell : M_\ell \longrightarrow \check{M}_\ell'$ est une isogénie, d'où il résulte ensuite que le deuxième membre de (11.6.2) est canoniquement isomorphe à $\Phi(\ell)$:

(11.6.3) $$\Phi(\ell) = \mathrm{coker}\ \widetilde{u}_\ell \simeq \ker\ \widetilde{u}_\ell \otimes D_\ell \quad ,$$

puisqu'on peut écrire, identifiant M_ℓ par $\widetilde{u}_\ell$ à un sous-module d'indice fini dans $\check{M}_\ell'$:

$$\Phi(\ell) = V/M_\ell \quad , \quad \Phi'(\ell) = V/\check{M}_\ell' \quad ,$$

où $V = M_\ell \otimes Q_\ell \simeq \check{M}_\ell' \otimes Q_\ell$. De (11.6.2) et (11.6.3) l'isomorphisme à définir (11.5.1) résulte aussitôt par composition, de sorte que tout revient à définir l'isomorphisme canonique (11.6.2).

Ecrivant $M_\ell \otimes D_\ell$ (resp. $\check{M}_\ell \otimes D_\ell$) comme limite inductive des M_n (resp. des $\check{M}'_n$), où n parcourt les puissances de ℓ, il revient au même de définir (11.6.2), où des isomorphismes canoniques

$$(11.6.4) \qquad {}_n\Phi_o \simeq \mathrm{Ker}\,(\tilde{u}_n : M_n \longrightarrow \check{M}'_n) \quad , \quad n = \ell^{r+1} \quad ,$$

comptatibles avec les morphismes de transition évidents, pour n variable (où $\tilde{u}_n$ désigne maintenant, par abus de notations, l'homomorphisme déduit de $\tilde{u}_\ell : M_\ell \longrightarrow \check{M}'_\ell$ par réduction mod. n).

Pour ceci, considérons le schéma en groupes ${}_nA$ sur S, qui est plat et quasi-fini sur S (2.2.1), grâce à l'hypothèse de réduction semi-stable. On a une filtration canonique

$$(11.6.5) \qquad {}_nA \supset ({}_nA^o)^f \supset ({}_nA^o)^t \supset 0 \quad ,$$

où l'exposant f (resp. l'exposant t) désigne la "partie fixe" (2.2.3) (resp. la "partie torique" (5.1)) du schéma en groupe qu'il affecte ; pour la définition de la partie torique dans 5.1, on notera qu'on avait supposé S complet, ce qui est loisible ici (11.0). (On a d'ailleurs vu dans 6.1 que la construction se généralise au cas S hensélien, si on y tient ...) Soit

$$(11.6.6) \qquad {}_n\Psi = {}_nA/({}_nA^o)^f \quad ,$$

c'est un schéma en groupes plat, séparé et quasi-fini sur S (SGA 3 VI_A 3.2 et VI_B 9.2) de fibre générique

$${}_n\Psi_K = ({}_nA_K)/({}_nA_K)^f \quad ,$$

où par définition $({}_nA_K)^f = ({}_nA^o)^f_K$ désigne le r.ème composant ($n=\ell^{r+1}$) du pro-groupe de Barsotti-Tate $T_\ell(A_K)^f$. La première des relations (5.5.8) nous fournit alors un isomorphisme canonique

(11.6.7) $$ {}_n\Psi_K \simeq \underline{M}_{nK} \qquad \text{où } \underline{M}_n \overset{\text{dfn}}{=} \underline{M}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \quad . $$

En fait, on a :

<u>Lemme</u> 11.6.8. <u>Le schéma en groupes</u> ${}_n\Psi$ (11.6.6) <u>sur</u> S <u>est étale sur</u> S, <u>et l'isomorphisme</u> (11.6.7) <u>se prolonge de façon unique en un morphisme</u>

(11.6.8.1) $$ {}_n\Psi \hookrightarrow \underline{M}_n $$

<u>qui est une immersion ouverte</u>.

Pour voir que ${}_n\Psi$ est étale, il reste à vérifier en vertu de (11.6.7) qu'il l'est en les points de sa fibre spéciale, ou encore que cette dernière est étale, ce qui est trivial, la fibre en question étant ${}_nA_o/{}_nA_o{}^o \subset A_o/A_o{}^o = \Phi_o$. Il s'ensuit que ${}_n\Psi$ est un schéma normal, et comme $\underline{M}_n$ est fini sur S, l'existence d'un prolongement (11.6.8.1) en résulte aussitôt. C'est un morphisme de schémas en groupes étales sur S, donc son noyau est un groupe étale sur S, et comme ${}_n\Psi$ donc ce noyau est séparé, et sa fibre générique est le groupe unité par (11.6.7), c'est le groupe unité (3.1.3). Donc (11.6.8.1) est un monomorphisme étale, donc une immersion ouverte (EGA IV 17.9.1), ce qui prouve le lemme.

Posons maintenant

(11.6.9) $$ {}_n\Phi = ({}_nA)^f/({}_nA^o)^f \subset {}_n\Psi \qquad , $$

de sorte que ${}_n\Phi$ est un sous-schéma fini ouvert de ${}_n\Psi$, puisque $({}_nA)^f$

est un sous-schéma en groupes fini ouvert de ${}_nA$; plus précisément, on voit immédiatement qu'on a

(11.6.10) $$ {}_n\Phi \simeq ({}_n\Psi)^f \quad . $$

Composant (11.6.9) et (11.6.8.1), on trouve une immersion ouverte

(11.6.11) $$ {}_n\Phi \hookrightarrow \underline{M}_n \quad . $$

D'autre part, on a

$$ {}_n\Phi \times_S s = {}_n\Psi \times_S s = {}_nA_o / {}_nA_o^{\,o} \quad , $$

et comme $A_o^{\,o}$ est n-divisible (2.2.1), on voit immédiatement que le dernier membre s'identifie à ${}_n\Phi_o$; donc on trouve un isomorphisme

(11.6.12) $$ {}_n\Phi \times_S s \simeq {}_n\Phi_o \quad , $$

qui montre que ${}_n\Phi$ est défini (à isomorphisme unique près) comme le schéma fini étale sur S dont la fibre spéciale est ${}_n\Phi_o$. Ceci dit, pour définir l'isomorphisme cherché (11.6.4) via l'immersion ouverte (11.6.11), il suffit de prouver le

<u>Lemme</u> 11.6.13. <u>L'image de l'homomorphisme canonique</u> (11.6.11) <u>est égale au noyau de</u> $\widetilde{u}_n : \underline{M}_n \longrightarrow \underline{\check{M}}'_n$.

La compatibilité voulue des homomorphismes (11.6.11) avec les homomorphismes de transition pour n variable est d'ailleurs triviale sur les définitions, de sorte qu'avec 11.6.13, la démonstration de 11.5 sera achevée.

Pour prouver le lemme, notons que

$$K_n = \ker \tilde{u}_n$$

est aussi l'annulateur à gauche de l'accouplement canonique

$$u_n : \underline{M}_n \times \underline{M}'_n \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S \quad ,$$

dont la définition explicite est donnée dans 9.4 et 9.6, en termes des extensions

$$(11.6.14) \quad 0 \to \underset{=(_nA^o)^f}{\check{\underline{M}}'_n(1)} \to F_n \to R_n \to 0 \;,\; 0 \to \underset{=(_nA'^o)^f}{\check{\underline{M}}_n(1)} \to F'_n \to R'_n \to 0$$

(où R_n et R'_n sont duals de Cartier l'un de l'autre), et de l'extension panachée $X_{n\eta}$ de $E_{n\eta}$ par $F_{n\eta}$, fibre générique de (11.7.5), où on pose

$$(11.6.15) \qquad E_n = D(F_n) \;, \quad 0 \longrightarrow \underset{\simeq D(R'_n)}{R_n} \longrightarrow E_n \longrightarrow \underline{M}_n \longrightarrow 0 \quad .$$

Il résulte alors immédiatement de 9.4.6 que K_n est le plus grand des sous-groupes finis étales K'_n de $\underline{M}_n$ tels que l'image inverse $\overline{X}_{n\eta}$ de K'_n dans l'extension panachée $X_{n\eta}$, regardée comme extension panachée (de $\overline{E}_{n\eta}$ par $F_{n\eta}$, où $\overline{E}_n$ est le sous-groupe extension de K_n par R_n qu'on devine), se prolonge en une extension panachée de $\overline{E}_n$ par F_n. Or cette condition est évidemment remplie pour le sous-groupe $_n\Phi$ (11.6.11) de $\underline{M}_n$, puisqu'on dispose de l'extension panachée $(_nA)^f$ correspondante sur S. On a donc $_n\Phi \subset K_n$. Pour prouver l'inclusion opposée, considérons l'extension panachée $\overline{X}_n$ de $\overline{E}_n$ par F_n prolongeant l'extension panachée $\overline{X}_{n\eta}$, définie comme ci-dessus en y prenant $K'_n = K_n$. C'est donc une extension

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \overline{X}_n \longrightarrow K_n \longrightarrow 0 \quad ,$$

et on a un homomorphisme canonique

$$(*) \qquad F_n = ({}_nA^o)^f \hookrightarrow A \quad ,$$

qui sur la fibre générique est induit par l'homomorphisme canonique

$$(**) \qquad \overline{X}_{n\eta} \hookrightarrow X_{n\eta} = {}_nA_K \hookrightarrow A_K \quad .$$

Il est alors immédiat (5.9.2) que l'homomorphisme (**) se prolonge en un homomorphisme (unique)

$$(***) \qquad \overline{X}_n \longrightarrow A$$

induisant (*). Comme ce dernier applique la fibre générique dans ${}_nA$, qui est un sous-schéma fermé de A, on conclut qu'il se factorise en $\overline{X}_n \longrightarrow {}_nA$, et comme $\overline{X}_n$ est fini, il se factorise par $({}_nA)^f$. Regardant l'homomorphisme induit sur les fibres génériques, on en conclut que $\overline{X}_{n\eta} \subset ({}_nA)^f_\eta$ i.e. $K_{n\eta} \subset {}_n\Phi_\eta$ i.e. $K_n \subset {}_n\Phi$, cqfd.

Remarques 11.7. La construction faite dans 11.7 nous montre qu'on peut reconstruire à isomorphisme unique près l'extension panachée (11.6.5), et par suite aussi le sous-groupe $({}_nA)^f \supset ({}_nA^o)^f$ de ${}_nA$, par la connaissance des extensions (11.6.14) sur S et de l'extension panachée $X_{n\eta} = ({}_nA_K)$ de E_n par F_n . En effet, en vertu de 9.4 on en conclut l'accouplement $u_n : \underline{M}_n \times \underline{M}'_n \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$, et la construction qui précède nous donne $({}_nA)^f$ comme l'extension panachée $\overline{X}_n$ de $\overline{E}_n$(= image inverse de Ker $\widetilde{u}_n$ par $E_n \longrightarrow \underline{M}_n$) par F_n qui prolonge l'extension panachée $\overline{X}_{n\eta}$ induite par $X_{n\eta}$; on notera (9.4.8) que cette extension panachée $\overline{X}_n$ se trouve déterminée ainsi <u>à isomorphisme unique près</u>. On en déduit alors ${}_nA$ en recollant $\overline{X}_n$ et $X_{n\eta}$ suivant l'ouvert commun $\overline{X}_{n\eta}$.

Si on connaît donc les éléments de structure (9.6.1) et l'extension panachée $X_\eta = T_\ell(A_K)$ de E_η par F_η (ce qui revient à la connaissance des extensions (11.6.14) et de $X_{n\eta}$ pour tout n de la forme ℓ^{r+1}, $r \geq 0$), alors on sait reconstruire le système inductif (ou projectif, au choix) des extensions panachées (11.6.5).

11.8. Considérons, comme dans 8.3, la clôture séparable $\overline{K}$ de K comme limite inductive de ses sous-extensions finies K'. Pour tout tel K', nous considérons le modèle de Néron

$$A[K']$$

de $A_{K'} = A_K \otimes_K K'$, d'où un groupe fini étale

$$\Phi_0[K'] = A[K']_0, \ A[K']_0{}^0 \tag{11.8.1}$$

de composantes connexes, défini sur le corps résiduel du normalisé S[K'] de S dans K'. Supposons pour simplifier que le corps résiduel de S soit séparablement clos, de sorte qu'il en est de même de ceux des S[K']. Les groupes (11.8.1) s'identifient alors à des groupes finis ordinaires Φ[K'], et il est immédiat que pour K' variable, ceux-ci forment un système inductif, que nous nous proposons d'étudier. Nous nous intéresserons notamment au groupe

$$(11.8.2)\qquad \Psi = \varinjlim_{K'} \Phi[K'] \quad .$$

Nous savons (3.6) que pour K' assez grand, disons $K' \supset K'_o$, A[K'] est à réduction semi-stable ; donc pour les $K' \supset K'_o$, les morphismes de transition sont injectifs (3.3). D'ailleurs, avec les notations de 5.5 reprises dans le présent numéro, on aura pour $K' \supset K'_o$ un isomorphisme canonique

$$(11.8.3)\qquad \Psi[K'](\ell) \simeq \ker(\widetilde{u}[K']_\ell \otimes D_\ell : M_\ell \otimes D_\ell \longrightarrow \check{M}'_\ell \otimes D_\ell) \quad ,$$

provenant de (11.6.2) appliqué à A[K']. On vérifie de plus immédiatement que les immersions correspondantes

$$\Phi[K'](\ell) \hookrightarrow M_\ell \otimes D_\ell$$

sont compatibles avec les morphismes de transition pour K' variable, d'où par passage à la limite un monomorphisme canonique

$$(11.8.4)\qquad \Psi(\ell) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \varinjlim_{K'} \Phi[K'](\ell) \hookrightarrow M_\ell \otimes D_\ell$$

de la composante ℓ-primaire de Ψ ; d'où, en faisant la somme sur tous les ℓ :

$$(11.8.5)\qquad \Psi \overset{\mathrm{dfn}}{=} \varinjlim_{K'} \Phi[K'] \longrightarrow M \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad .$$

<u>Théorème</u> 11.9. <u>L'homomorphisme canonique</u> (11.8.5) <u>est un isomorphisme</u>.

On sait déjà que c'est un monomorphisme, il reste à prouver que c'est un isomorphisme, et pour ceci il nous faudra utiliser la caractérisation (11.8.3) de l'image de $\Phi[K'](\ell)$, et le comportement de $\widetilde{u}(K')$ pour K' variable. Ce comportement est donné par (10.3.4).

Se ramenant au cas où S est strictement local, ce qui est loisible, on est donc ramené, pour prouver 11.9, à l'énoncé bien connu suivant (qu'on appliquera à $S(K'_0)$) : si S est un trait strictement local de corps des fractions K, alors pour tout entier $n \geq 1$, il existe une extension séparable K' de K de degré multiple de n (cf. I).

Corollaire 11.10. Sous les conditions (S complet) et avec les notations de 8.3, le schéma en groupes A_K^b/A_K^{bo} ind-fini sur K des composantes connexes du schéma en groupes A_K^b est canoniquement isomorphe à $\underline{M}_K \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, où $\underline{M}_K$ est le groupe constant tordu sur K défini dans (8.1.8).

C'est une conséquence immédiate de (8.2.4) et de 11.9, compte tenu de la définition de $\underline{M}_K$.

Remarques 11.11. a) Lorsqu'on se borne aux composantes ℓ-primaires pour $\ell \neq p$, le théorème 11.9 est immédiat en termes de 11.2, et ne demande pas le recours aux considérations plus délicates de 11.6 (via 9.4). De même, lorsqu'on suppose K de caractéristique nulle, 11.9 se démontre sans utiliser (11.8.3), car il est immédiat que l'image de ${}_n\Phi(K')(\ell)$ dans $M_n = {}_n(M_\ell \otimes D_\ell)$ contient l'image du groupe ${}_nA(K')$ des points de ${}_nA$ à valeurs dans K', qui est égal à ${}_nA(\overline{K})$ donc se surjecte sur M_n pour K' assez grand. Lorsque car.K = p, il semble par contre qu'il n'y ait pas de démonstration "triviale" (i.e. n'utilisant pas 9.4) de 11.10 pour la composante p-primaire.

b) Le fait qu'on ait un isomorphisme $\Psi \simeq (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^r$, et la valeur correcte de r, avaient été conjecturés en 1964 par J.P. SERRE.

12. Modèle de Néron d'une jacobienne et formule de Picard Lefschetz

Rappelons d'abord les résultats généraux suivants de M. RAYNAUD [22, th.5 et th.7 , 22 bis] :

Théorème 12.1 (M.RAYNAUD). *Soient* S *un trait strictement local*, $f:X \to S$ *un schéma propre et plat sur* S, *à fibres de dimension* 1, *tel que l'on ait*

(12.1.1) $$f_*(\underline{O}_X) \xrightarrow{\sim} \underline{O}_S$$

et que les anneaux locaux de X *soient factoriels*. *Pour tout point maximal* x_i *de* X_o, *soient*

(12.1.2) $$d_i = \mathrm{long}\ \underline{O}_{X_o,x}\ ,\ d_i^t = \mu_i\ d_i \quad ,$$

où μ_i *est la multiplicité radicielle de* $k(x_i)$ *sur* k (EGA IV 4.7.4) (*qui est une puissance de l'exposant caractéristique de* k). *Soit* d (resp. d^t) *le pgcd des entiers* d_i (resp. d_i^t) ; *donc on a* $d = d^t$ *si* k *est parfait*. *Posons*

(12.1.3) $$P = \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} : (\mathrm{Sch})_{/S}^{\circ} \longrightarrow (\mathrm{Ab}) \quad .$$

a) *Considérons les conditions suivantes* :

1) $d^t=1$.

2) X *possède un* 0-*cycle de degré* 1.

3) *Il existe un Module inversible* L *sur* $X \times P^{\circ}$ *tel que l'homomorphisme correspondant* $P_\eta^{\circ} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X_\eta/\eta} = P_\eta$ *soit l'inclusion canonique*. (NB *on sait* (J.P. MURRE) *que* P_η *est représentable par un schéma en groupes localement de type fini sur* η , cf. p.ex. SGA 6 XII 1.5).

4) X <u>est cohomologiquement plat sur</u> S (EGA III 7.8.1) (<u>ou encore</u> : <u>cohomologiquement plat en dimension</u> 0, <u>ou encore</u> : <u>on a</u> $k \xrightarrow{\sim} H^{o}(X_{o},\underline{O}_{X_{o}})$), <u>et</u> d=1.

5) P <u>est représentable</u> (<u>ou encore</u> : <u>représentable par un schéma en groupes lisse sur</u> S).

6) P^{o} <u>est représentable</u> (<u>ou encore</u> : <u>représentable par un schéma en groupes lisse sur</u> S). (NB <u>Pour la définition de</u> P^{o}, cf. SGA 3 VI_{B} 3.1.)

7) P^{o} <u>est séparé sur</u> S, <u>i.e.</u> <u>satisfait au critère valuatif de séparation</u> EGA II 7.2.3 (<u>ou encore</u> : <u>toute section</u> s <u>de</u> P^{o} <u>sur</u> S <u>telle que</u> $s(\eta) = 0$ <u>est nulle</u>).

8) d=1 .

<u>On a alors les implications</u>

$$(12.1.4) \qquad 1) \Longleftrightarrow 2) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 4) \Longleftrightarrow 5) \Longleftrightarrow 6) \Longleftrightarrow 7) \Longrightarrow 8) \quad .$$

<u>En particulier</u>, <u>si</u> $d=d^{t}$, <u>par exemple si</u> k <u>est parfait</u>, <u>les conditions</u> 1) <u>à</u> 8) <u>sont équivalentes</u>.

b) <u>Supposons</u> $d^{t}=1$, <u>de sorte que</u> P <u>est représentable par un schéma en groupes lisse sur</u> S. <u>Alors l'adhérence schématique de la section unité de</u> P <u>est un sous-schéma en groupes</u> E <u>étale sur</u> S, <u>et si</u> I <u>est l'ensemble des composantes irréductibles réduites</u> X_{o}^{i} <u>de</u> X_{o}, <u>on obtient un isomorphisme</u>

$$(12.1.5) \qquad \mathbb{Z}^{I} \simeq \Gamma(S,E)$$

en associant à tout $i \in I$ la section S_i de P sur S (nulle en η) définie par le faisceau inversible $\underline{O}_X(X_o^i)$ sur S. (NB Comme les anneaux locaux de X sont factoriels en hypothèse, les cycles X_o^i sont bien des diviseurs, ce qui donne un sens à $\underline{O}_X(X_i^o)$ comme le faisceau inversible associé au diviseur en question (EGA IV 21.2.8.1).) On a

(12.1.6) $$P^o \cap E = \text{section nulle de } P \quad .$$

c) Sous les conditions de b), le quotient

(12.1.7) $$Q = P/E$$

est représentable par un schéma en groupes lisse et séparé sur S, et ce dernier est néronien, i.e. satisfait la propriété universelle (1.1.2) en termes de sa fibre spéciale.

d) Sous les conditions de c), supposons de plus que la fibre géométrique générique de X soit intègre. Alors on a une suite exacte canonique

(12.1.8) $$0 \longrightarrow A \longrightarrow Q \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}_S \longrightarrow 0 \quad ,$$

où deg est induit par l'homomorphisme "degré" $P \longrightarrow \mathbb{Z}_S$, et où A est un schéma en groupes lisse séparé et de type fini sur S, qui est également néronien i.e. qui est un modèle de Néron de

(12.1.9) $$A_\eta = P_\eta^o = \underline{\mathrm{Pic}}^o_{X_\eta/\eta} \quad .$$

D'autre part, l'homomorphisme composé $P^o \longrightarrow P \rightarrow Q$ induit un isomorphisme

(12.1.10) $$P^o \xrightarrow{\sim} A^o \quad .$$

12.1.11. Le cas qui nous intéressera est celui où X_η est lisse sur η, de sorte que (compte tenu de 12.1.1) la fibre géométrique générique de X est lisse et connexe (donc intègre), et où X_η possède un 0-cycle de degré 1. Alors toutes les conditions envisagées dans 12.1 (et notamment les conditions 1) à 8) de a)) sont vérifiées, d'autre part $A_\eta = P^o_\eta$ est alors un schéma abélien, et d) nous donne une construction très explicite de son modèle de Néron A. En particulier (12.1.10) nous fournit un isomorphisme

(12.1.12) $$A_o^o \simeq \underline{\mathrm{Pic}}^o_{X_o/k} \quad ,$$

qui montre en particulier que A <u>a réduction semi-stable sur S si et seulement si $\underline{\mathrm{Pic}}^o_{X_o/k}$ a un rang unipotent nul</u>. Lorsque X est régulier et que X_o <u>est séparable sur</u> k, on sait qu'il en est ainsi si et seulement si la fibre géométrique spéciale $\overline{X_o}$ n'a comme seuls points singuliers que des points quadratiques ordinaires (i.e. ayant même anneau local complété que la réunion des deux axes de coordonnées de l'espace affine $\mathbf{E}^2$ en l'origine). La vérification de ce fait, allant avec la description "bien connue" du schéma de Picard d'une courbe propre séparable sur un corps k, en utilisant EGA IV 21.8.5, est laissée au lecteur à titre d'exercice. On notera d'ailleurs que le fait que "$\overline{X_o}$ à singularités quadratiques ordinaires" implique "réduction semi-stable de $A_\eta = \underline{\mathrm{Pic}}^o_{X_\eta/\eta}$" est aussi une conséquence immédiate du "théorème de monodromie géométrique" III , compte tenu du critère galoisien de réduction semi-stable 3.5 ; mais cet argument ne donne pas l'important isomorphisme (12.1.10) et sa conséquence (12.1.12).

12.2. Pour la démonstration de 12.1, nous renvoyons à [22 bis] ; nous n'aurons besoin d'ailleurs que du cas X_η lisse sur η. Notons d'ailleurs que dans [22bis] sont démontrées des relations entre schémas de Picard et modèles de Néron sous les conditions nettement plus générales que celles de 12.1 c) et d) ; comme leur énoncé est plus technique, nous avons renoncé à les inclure dans notre rappel. Signalons seulement que b), c), d) sont des conséquences faciles de a), et que dans a) les seuls points délicats sont les implications 3) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 5) et 7) $\Longrightarrow$ 4), le plus difficile étant le premier. Ce point est trivial par contre si on suppose que X_o est séparable sur k (qui implique que X admet une section sur S puisque S est strictement local, donc que la condition 1), $d^t=1$, est vérifiée). Nous conseillons au lecteur de faire la démonstration dans ce cas particulièrement simple, en supposant de plus, au besoin, que X_η est lisse donc P^o_η un schéma abélien, ce qui permet alors de disposer du modèle de Néron A de ce dernier, et de A^o pour représenter $\underline{\mathrm{Pic}}^o_{X/S}$. Nous n'utiliserons d'ailleurs 12.1 que dans ce cas particulier, et lorsque l'on suppose de plus que $\overline{X_o}$ n'a d'autres points singuliers que des points quadratiques ordinaires, i.e. (12.1.11) que A_η est à réduction semi-stable : c'est le cas envisagé dans 12.5.4, auquel nous nous bornons à partir de maintenant.

12.3. Soit C une courbe séparable et propre sur un corps k, que nous supposons pour simplifier séparablement clos (ou même algébriquement clos, si le lecteur préfère). Si $\widetilde{C}$ est la normalisée de C, on sait que

$\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{\widetilde{C}/k}$ est de "rang réductif" nul (i.e. son tore maximal est nul), de sorte que le tore maximal de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{C/k}$ est contenu dans

$$N = \mathrm{Ker}(\underline{\mathrm{Pic}}_{C/k} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{\widetilde{C}/k}) \quad ,$$

donc est isomorphe canoniquement au tore maximal de ce dernier groupe. Or la structure de N s'explicite aisément à l'aide de EGA IV 21.8.5 : on trouve que N est canoniquement une extension d'un tore T dont on va expliciter la description, par un groupe unipotent connexe U (qui se dévisse de même, sur k, avec une suite de composition à quotients isomorphes au groupe additif G_a). D'ailleurs, si T' est le tore maximal de N, alors $T' \cap U$ est à la fois unipotent et de type multiplicatif, donc nul (SGA 3 XVII 2.4), et l'image de T' dans T est identique à T (SGA 3 XII 7.1 e)), de sorte que $T' \longrightarrow T$ est un isomorphisme. Donc T est canoniquement isomorphe au tore maximal de N, donc de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\circ}_{X/k}$.

C'est pour expliciter la structure de N qu'il sera commode de supposer k séparablement clos, de sorte que les composantes irréductibles C_i de C sont géométriquement irréductibles, et que les points non normaux de C sont radiciels sur k. Ceci dit, soit J l'ensemble des composantes irréductibles de $\widetilde{C}$, et pour tout $x \in C$, soit $J(x)$ l'ensemble des "branches" de C passant par x (i.e. des points de $\widetilde{C}$ au-dessus de x) ; soient enfin

(12.3.1) $$R(x) = \mathbb{Z}^{J(x)}/\mathrm{Im}\ \mathbb{Z} \quad ,$$

où $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^{J(x)}$ est l'application diagonale, et

(12.3.2) $$R = (\bigoplus_x R_x)/\mathrm{Im}\ \mathbb{Z}^J \quad ,$$

où il suffit évidemment d'étendre la somme à l'ensemble fini des points de C qui appartiennent à au moins deux branches de C. Donc R est un $\mathbb{Z}$-module de type fini. On a alors un isomorphisme canonique

$$(12.2.3) \qquad T \; (\simeq \text{tore maximal de } \underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{C/k}) \simeq R \otimes \mathbb{G}_{mk} \quad .$$

En d'autres termes, le groupe des caractères M de T est donné par

$$(12.2.4) \qquad M \overset{\mathrm{dfn}}{=} D(T) = \check{R} \simeq \mathrm{Ker}\,(\bigoplus_{x} \check{R}(x) \longrightarrow \mathbb{Z}^{J}) \, ,$$

où $\check{R}(x)$ peut s'interpréter aussi comme l'ensemble des fonctions à valeurs entières sur J(x) dont la somme des valeurs est nulle.

12.3.5. Nous aurons à utiliser seulement le cas où par un point x de C passent au plus deux branches (ce qui est le cas en particulier pour les points quadratiques ordinaires !). Pour un point tel que card J(x) = 2, R(x) est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$, mais l'isomorphisme dépendant du choix d'un ordre sur l'ensemble des deux branches (C',C") passant par x, ou ce qui revient au même, le choix de l'une de ses branches C' (en associant à celle-ci l'élément de R(x) image canonique de $0_{C'} + 1_{C''}$). On trouve donc alors un isomorphisme

$$(12.3.6) \qquad R = \mathbb{Z}^{I}/\mathrm{Im}\,\mathbb{Z}^{J}, \text{ donc } T \simeq \mathbb{G}_m^{\;I}/\mathrm{Im}\,\mathbb{G}_m^{\;J} \, , \; M = \mathrm{Ker}\,(\mathbb{Z}^{I} \longrightarrow \mathbb{Z}^{J}) \, ,$$

où I désigne l'ensemble des $x \in C$ appartenant à deux branches de C, et moyennant un choix de signes comme on vient de l'expliciter.

<u>Remarques</u> 12.3.7. Une façon parfois commode d'expliciter le groupe des caractères M du tore maximal T de $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{C/k}$ est la suivante : on considère le "graphe (non orienté) de dimension 1 " (N. BOURBAKI, Groupes et Algèbres

de Lie, Chap IV, Annexe) $\Gamma(C)$ dont les sommets sont les composantes irréductibles de $\widetilde{C}$, deux sommets $\widetilde{C}_i$ et $\widetilde{C}_j$ étant reliés par un ensemble d'arrêtes en correspondance bijective avec l'ensemble $\widetilde{C}_i \times_C \widetilde{C}_j$ des ensembles de deux branches distinctes de C contenues dans $\widetilde{C}_i$ resp. $\widetilde{C}_j$ passant par le même point de C, ensemble égal à $\widetilde{C}_i \times_C \widetilde{C}_j$ si $i \neq j$, à $\widetilde{C}_i \times_C \widetilde{C}_i - \Delta(\widetilde{C}_i)$ modulo symétrie ($\Delta : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C} \times_C \widetilde{C}$ étant la diagonale) si $i=j$ (donc vide si C_i est géométriquement unibranche). Ceci posé, on a des isomorphismes canoniques

$$(12.3.7) \qquad M = D(T) \xleftarrow{\ \sim\ } H_1(\Gamma(C), \mathbb{Z}) \ , \text{ donc } \check{M} = R \xrightarrow{\ \sim\ } H^1(\Gamma(C), \mathbb{Z}) \quad .$$

Nous n'aurons pas besoin de cette interprétation combinatoire de M, et allons nous borner à définir l'homomorphisme canonique

$$H_1(\Gamma(C), \mathbb{Z}) \longrightarrow M \quad ,$$

laissant au lecteur le soin de prouver que c'est un isomorphisme. Soit donc I l'ensemble des points de C appartenant a au moins deux branches de C, J (comme ci-dessus) l'ensemble des composantes irréductibles de $\widetilde{C}$ (ou de C, cela revient au même), K l'ensemble des "branches" de C en les points de I, i.e. l'image inverse de I dans $\widetilde{C}$. On a donc une application canonique

$$(12.3.9) \qquad h : K \longrightarrow I \times J \ , \quad h = (f,g) \quad ,$$

et la description (12.3.4) de M s'exprime en termes de h comme

$$(12.3.10) \qquad M \xrightarrow{\ \sim\ } \operatorname{Ker} \left(\mathbb{Z}^{(h)} : \mathbb{Z}^{(K)} \longrightarrow \mathbb{Z}^{(I \times J)}\right) \quad ,$$

car l'expression (12.3.3) de $R = \check{M}$ peut s'interprèter manifestement comme le conoyau de l'homomorphisme $\mathbb{Z}^{I\times J} \longrightarrow \mathbb{Z}^{K}$ induit par h, lequel est transposé de $\mathbb{Z}^{(h)}$. Notons d'ailleurs que le graphe $\Gamma(C)$ s'explicite aussi de façon évidente en termes de h, par $\Gamma_o = J$, $\Gamma_1=(K\times_I K-\Delta(K))$/symétrie. D'autre part, choisissant une orientation sur chacune des arrêtes de $\Gamma(C)$, et désignant par Γ_1 l'ensemble de ces arrêtes (x_i,C',C''), on a

$$(12.3.11) \qquad H_1(\Gamma(C),\mathbb{Z}) = \operatorname{Ker}\,(d: \mathbb{Z}^{(\Gamma_1)} \longrightarrow \mathbb{Z}^{(J)})$$

où l'opérateur différentiel est donné par

$$(12.3.12) \qquad d(x,C',C'') = g(C'') - g(C') \quad .$$

Ceci posé, l'homomorphisme (12.3.8) est induit par l'homomorphisme v de complexes de chaînes :

$$(12.3.13) \qquad v = (v_o,v_1) : C.(\Gamma(C)) = \left[\mathbb{Z}^{(\Gamma)} \longrightarrow \mathbb{Z}^{(J)}\right] \to \left[\mathbb{Z}^{(K)} \to \mathbb{Z}^{(I\times J)}\right]$$

donné par

$$(12.3.14) \qquad v_1(x,C',C'')=(x,C'')-(x,C'),\ v_o(\tilde{C}_j) = (0,\ \tilde{C}_j) \quad .$$

12.4. Nous nous plaçons maintenant dans le cas envisagé à la fin de 12.2. En vertu de (12.1.12) et de (12.3.6) appliqué à $C = X_o$, le groupe des caractères M du tore maximal T_o de la fibre spéciale A_o du modèle de Néron A de $A = \underline{\mathrm{Pic}}^o_{X_\eta/\eta}$ est donné par

$$(12.4.1) \qquad M = \operatorname{Ker}\,(\mathbb{Z}^{I} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^{J}) \quad ,$$

où I est l'ensemble des points singuliers de X_o, et J l'ensemble de ses composantes irréductibles, l'homomorphisme $\mathbb{Z}^{I} \longrightarrow \mathbb{Z}^{J}$ étant donné par

(12.4.2) $$d(x_i) = C'_i - C''_i \quad ,$$

C'_i et C''_i étant les deux composantes irréductibles de $\widetilde{C}$ qui correspondent aux branches passant par le point double x_i. L'opérateur d dépend du choix de l'ordre (C'_i, C''_i) qu'on se donne entre ces deux branches, et l'isomorphisme (12.4.1) dépend évidemment de ce système de choix. Cependant, si pour $i \in I$ on désigne par

(12.4.3) $$\varphi_{x_i} : M \longrightarrow \mathbb{Z}$$

le composé $M \longrightarrow \mathbb{Z}^I \xrightarrow{pr_i} \mathbb{Z}$, où le premier homomorphisme provient de (12.4.1), on constate aussitôt (en revenant à l'expression (12.3.4)) que φ_{x_i} est bien déterminé au signe près ; de façon plus précise, il dépend seulement de l'ordre pris entre les deux branches C'_i, C''_i passant par i, et change de signe quand on change cet ordre. Il s'ensuit notamment que la forme billinéaire

(12.4.4) $$\varphi_{x_i} \otimes \varphi_{x_i} \in \check{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \check{M} \simeq \mathrm{Hom}(M \otimes M, \mathbb{Z})$$

est déterminée canoniquement en termes du point singulier x_i , sans ambiguité de signe. On peut donc poser

(12.4.5) $$u = \sum_i \varphi_{x_i} \otimes \varphi_{x_i} : M \otimes_{\mathbb{Z}} M \longrightarrow \mathbb{Z} \quad ,$$

et on trouve ainsi un accouplement bien déterminé i.e. indépendant de tout choix de signes. Il est clair qu'il est <u>défini positif</u>, car c'est la restriction à $M \hookrightarrow \mathbb{Z}^I$ de la forme quadratique standart ΣX_i^2 sur $\mathbb{Z}^I$.

La notation M pour le groupe des caractères de T_o n'est pas en accord a priori avec celle des paragraphes précédents, où on écrivait M', M étant le groupe analogue relatif au schéma abélien A'_K dual de A_K. Mais comme A_K est une jacobienne, il est muni d'une polarisation ξ canonique [5], induisant un isomorphisme canonique

(12.4.6) $$\psi_\xi : A_K \xrightarrow{\sim} A'_K \quad ,$$

moyennant lequel nous identifierons A_K et A'_K, de sorte qu'il n'y a plus lieu de distinguer M et M'. En particulier, pour tout nombre premier ℓ, l'accouplement de monodromie (9.1.2) peut être considéré comme un accouplement

(12.4.7) $$u_\ell : M_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} M_\ell \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \quad .$$

Ceci posé, nous pouvons énoncer le résultat principal du présent paragraphe :

Théorème 12.5 ("Formule de PICARD-LEFSCHETZ"). Soient S un trait strictement local, X un schéma régulier, projectif et plat sur S, à fibres de dimension 1, dont la fibre géométrique générique est lisse et connexe, et la fibre géométrique spéciale n'admet comme seuls points singuliers que des points quadratiques ordinaires. Avec les notations introduites dans 12.4, pour tout nombre premier ℓ, l'accouplement de monodromie (12.4.7) est égal à l'accouplement déduit de (12.4.5) par extension des scalaires de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}_\ell$.

12.6. On notera que cet énoncé prouve 10.4 dans le cas particulier envisagé, lorsque dans 10.4 b) on prend pour ξ la polarisation canonique envisagée dans 10.4. Comme nous l'avons montré dans 10.5, ceci suffit à entraîner 10.4 dans le cas général.

12.7. Démonstration de 12.5. Cas $\ell \neq p$. Elle s'appuie de façon essentielle sur la formule de Picard-Lefschetz cohomologique dans la situation envisagée dans 12.5, formule donnant l'action du groupe de monodromie I sur

$$(12.7.1) \qquad H^1(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}_\ell) \simeq H^1(A_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathrm{Hom}(T_\ell(A_{\bar{\eta}}), \mathbb{Z}_\ell)$$

dans le cas $\ell \neq p$. Cette formule, qui sera démontrée (dans un cas d'ailleurs nettement plus général) dans un exposé ultérieur (Exp XV), est en effet essentiellement identique à l'assertion 12.5 pour le ℓ envisagé, compte tenu de la définition 9.2 de u_ℓ pour $\ell \neq p$,. Il reste alors à traiter le cas $\ell = p$. Nous le ferons par une méthode de réduction au cas de la caractéristique nulle (et où de plus X_o n'a qu'un seul point singulier), que nous allons maintenant exposer.

Remarques 12.7.2. On notera d'ailleurs que, une fois la réduction annoncée faite, les arguments habituels nous permettraient de nous ramener au cas où on a comme corps de base le corps $\mathbb{C}$ des complexes, et à invoquer alors la formule de Picard-Lefschetz sour la forme classique, - à cela près qu'il ne semble pas y avoir de référence satisfaisante de cette formule. La démonstration de la formule de Picard-Lefschetz donnée dans notre Séminaire procédera de façon analogue, par réduction au cas transcendant, justiciable de méthodes proprement transcendantes. On peut donc dire qu'en tout état de cause, la démonstration de 12.5 (donc de (10.4) que nous proposons ici est de nature transcendante. Signalons d'ailleurs que la seule autre démonstration connue de 10.4 provient de la théorie rigide-analytique [24], et à ce titre doit être regardée également comme étant essentiellement "transcendante". Il serait intéressant de trouver des démonstrations purement algébriques de ces résultats (mais il n'est nullement évident que cela soit possible !).

12.8. <u>Démonstration de</u> 12.5 : <u>réduction au cas où</u> S <u>est de caractéristique nulle</u>. Nous allons utiliser un raisonnement s'appuyant sur le même principe que la démonstration du "théorème d'action essentiellement modérée de la monodromie sur le π_1 " dans V . Notons qu'on peut supposer S complet grâce à 10.3. Soit W un p-anneau de Cohen de corps résiduel k, et choisissons un homomorphisme $W \longrightarrow V$ induisant l'identité sur les corps résiduels (EGA 0_{IV} 19.8.6). Soit $L = (x_\lambda)_{\lambda \in L}$ l'ensemble des points singuliers de X_o, et considérons le schéma formel des modules $\underline{S}$ de X_o sur W, et la "courbe universelle" $\underline{f}:\underline{X} \longrightarrow \underline{S}$ de fibre spéciale X_o (VI). On a vu dans loc. cit. que $\underline{S}$ est isomorphe au spectre d'un anneau de séries formelles $W[[T_1,\ldots,T_N]]$, et qu'on peut trouver dans $\underline{S}$ un diviseur à croisements normaux

$$(12.8.1) \qquad D = \sum_{\lambda \in L} D_\lambda \quad ,$$

dont les composantes irréductibles D_λ sont indexées par l'ensemble L précédent, chaque D_λ étant décrit par une équation de la forme $T_{i_\lambda} = 0$ (où on peut supposer, si on veut, $i_\lambda = \lambda$, si on indexe L par un ensemble d'entiers $[1,r]$), D_λ étant l'image par $\underline{f}:\underline{X} \longrightarrow \underline{S}$ de la composante D'_λ passant par le point singulier x_λ de X_o du lieu de non lissité $D' = \bigcup_{\lambda \in L} D'_\lambda$ du morphisme $\underline{f}$. Par construction même, $f: X \longrightarrow S$ est isomorphe à l'image inverse de $\underline{f}$: $\underline{X} \longrightarrow \underline{S}$ par un W-morphisme convenable $g: S \longrightarrow \underline{S}$:

(12.8.2)
$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[d, "\underline{f}"'] & X \arrow[l] \arrow[d, "f"] \\ \underline{S} & S \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd} .$$

Posons

(12.8.3) $$P = \underline{\mathrm{Pic}}^o_{\underline{X}/\underline{S}} \quad ;$$

comme la fibre spéciale de $\underline{f}$ est géométriquement réduite de dimension 1, il s'ensuit que $\underline{F}$ est cohomologiquement plat en dimension 0 (EGA III 7.8.1) et que P est formellement lisse sur S (ce dernier fait résultant de ce que $H^2(X_o,\underline{O}_{X_o}) = 0$, X_o étant de dimension 1). Pour simplifier, nous allons admettre que P <u>est représentable par un schéma en groupes sur</u> S (qui sera nécessairement un schéma en groupes lisse à fibres connexes) ; c'est là un cas particulier d'un résultat inédit de MUMFORD cité dans [22](considérablement généralisé par RAYNAUD dans la note citée, dans le cas où la base est un trait). Comme aucune démonstration des résultats de MUMFORD ni de RAYNAUD n'a été publiée, le lecteur préfèrera peut-être utiliser les résultats généraux de M. ARTIN [1], qui donnent la représentabilité de P (sous la seule hypothèse de partir d'un $\underline{f}$ propre, plat et cohomologiquement plat en dimension 0) par un "espace algébrique" au sens de ARTIN, ce qui suffirait pour notre propos. Posant

(12.8.4) $$U = \underline{S} - \operatorname{supp} D \quad ,$$

de sorte que U est le plus grand ouvert de $\underline{S}$ au-dessus duquel $\underline{X}$ soit lisse, on voit donc que

$$P|U = \underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{\underline{X}_U/U}$$

est un schéma abélien sur U, dont l'image inverse sur η par $g : \eta \longrightarrow U$ est le schéma abélien A_η sur η qu'on se propose d'étudier. Plus précisément, on a un isomorphisme canonique sur S (12.1.10) :

(12.8.5) $$P \times_{\underline{S}} S \simeq A^{o} \quad .$$

Comme la fibre spéciale $P_o = A_o{}^{o}$ est ℓ-divisible pour tout ℓ, il en est de même de P lui-même, dont toutes les fibres sont donc des extensions d'une variété abélienne par un tore. Considérons le pro-ℓ-groupe $T_\ell(P)$ sur $\underline{S}$, dont l'image inverse par g n'est autre que $T_\ell(A^{o})$. Appliquant les constructions 7.3, on définit une filtration de ce pro-groupe par une "partie fixe" et une "partie torique"

(12.8.6) $$T_\ell(P) \supset T_\ell(P)^{f} = T_\ell(\hat{P}) \supset T_\ell(P)^{t} = T_\ell(T) \supset 0 \quad ,$$

dont l'image inverse par g est la filtration analogue de $T_\ell(A^{o})$, étudiée dans les par. 2. et 5.

Considérons la restriction de cette filtration au-dessus de l'ouvert U de $\underline{S}$, sur lequel on dispose de l'autodualité canonique de P_U comme jacobienne d'un schéma en courbes lisse sur U, d'où un accouplement correspondant

$$\varphi : T_\ell(P_U) \otimes T_\ell(P_U) \longrightarrow T_\ell(\mathbb{G}_{mU}) \quad , \tag{12.8.7}$$

qui est une <u>autodualité</u> (au sens des groupes de Barsotti-Tate) de $T_\ell(B_U)$. On a vu dans 7.4.8 que pour cet accouplement, <u>$T_\ell(P_U)^f$ et $T_\ell(P_U)^t$ sont les orthogonaux l'un de l'autre</u>. De ceci résulte que

$$E_U = T_\ell(P_U)/T_\ell(P_U)^t$$

est canoniquement isomorphe au pro-groupe de Barsotti-Tate dual de $T_\ell(P_U)^f = F_U$, donc se prolonge canoniquement en un groupe de Barsotti-Tate E sur S, savoir

$$E = D(F) \ , \text{ où } F = T_\ell(P)^f \quad . \tag{12.8.8}$$

Nous sommes alors dans une situation typique d'extensions panachées (9.3), et nous pouvons reprendre les constructions de 9.4 à 9.6 (que nous nous excusons d'avoir rédigé dans le contexte éculé et pisseux d'un schéma de base réduit à un trait !) : $T_\ell(P_U)$ est une extension panachée de E_U par F_U, où E et F sont des groupes de Barsotti-Tate sur $\underline{S}$ qui sont des extensions, duales l'une de l'autre :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[rr] \arrow[d, phantom, "\wr"] & & F \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & R \arrow[r] & 0 \\
& T_\ell(P) \arrow[r, phantom, "\overset{t}{\simeq}"] & \underline{\mathrm{Hom}}(M, T_\ell(\underline{\mathbb{G}}_{m\underline{S}})) & T_\ell(P)^f & &
\end{tikzcd} \tag{12.8.9}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[rr] \arrow[d, phantom, "\wr"] & & E \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & 0 \\
& D(R) & & & M \otimes \mathbb{Z}_{\ell\,\underline{S}} &
\end{tikzcd} \quad .$$

(NB R est canoniquement autodual, comme il résulte de l'autodualité (12.8.7) et de l'énoncé d'orthogonalité signalé plus haut.) La seule différence avec loc. cit. est que l'accouplement qu'on trouve de $M_\ell \times M_\ell$ est à valeurs dans un groupe

$$(\mathbb{G}_m(U)/\mathbb{G}_m(\underline{S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell$$

qui n'est plus canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$, mais à $\mathbb{Z}_\ell{}^L$, grâce à l'isomorphisme

$$\mathbb{Z}^L \simeq \mathbb{G}_m(U)/\mathbb{G}_m(\underline{S}) \tag{12.8.10}$$

qui applique l'élément d'indice λ de la base canonique de $\mathbb{Z}^L$ en la classe de T_{i_λ} dans le deuxième membre, où T_{i_λ} est une équation du diviseur D_λ .
On trouve ainsi un accouplement canonique

$$\underline{u}_\ell : M_\ell \otimes M_\ell \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell{}^L \quad . \tag{12.8.11}$$

On vérifie de façon essentiellement triviale que l'accouplement de monodromie u_ℓ (12.4.7) sur S que nous proposons d'étudier est le composé de $\underline{u}_\ell$ avec l'homomorphisme $\mathbb{Z}_\ell{}^L \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$ provenant, par tensorisation avec Z_ℓ sur $\mathbb{Z}$, de l'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{G}_m(U)/\mathbb{G}_m(\underline{S}) & \longrightarrow & \mathbb{G}_m(\eta)/\mathbb{G}_m(S) \\
\wr\shortparallel & & \wr\shortparallel \\
\mathbb{Z}^L & & \mathbb{Z}
\end{array}$$

induit par $g : S \longrightarrow \underline{S}$ (envoyant η dans U). Cet homomorphisme est donné par un élément

(12.8.12) $(d_\lambda)_{\lambda\in L} \in \mathbb{Z}^L$, ($d_\lambda \geq 1$ pour tout $\lambda \in L$)

où pour tout $\lambda \in L$, d_λ est la multiplicité de l'image inverse dans S du diviseur D_λ sur $\underline{S}$, qui ne dépend d'ailleurs que du complété $\widehat{\underline{O}_{X,x_\lambda}}$ en tant que V-algèbre (VI). On sait de plus (VI) que pour un λ donné, on a $d_\lambda=1$ si et seulement si x est <u>régulier</u> au point x_λ . Comme dans 12.5 on a supposé X régulier, i.e. les d_λ égaux à 1, on voit donc que 12.5 sera une conséquence du lemme suivant, où X,S,g ne figurent plus :

<u>Lemme</u> 12.8.13. <u>Si</u> $\lambda \in L$, <u>le composé de</u> (12.8.11) <u>avec</u> pr_λ <u>est égal à la forme</u> $\varphi_{x_\lambda} \otimes \varphi_{x_\lambda}$ (12.4.4).

Pour prouver ce dernier énoncé, considérons le localisé strict complété $\underline{S}^\lambda$ de $\underline{S}$ en le point maximal de D, et $\underline{X}^\lambda = X\times_{\underline{S}}\underline{S}^\lambda$. Alors la fibre spéciale X_o^λ n'a qu'un seul point singulier y_λ, lequel est encore quadratique ordinaire. Dans l'accouplement de monodromie correspondant

(12.8.14) $u_\ell^\lambda : M_\ell^\lambda \otimes M_\ell^\lambda \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$,

M^λ est donc de rang 1 ou zéro. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les faits faciles suivants, qui explicitent, dans le cas particulier où nous en avons besoin, le comportement des constructions précédentes par localisation :

a) Il existe un unique sous-tore T_λ de $P\times_{\underline{S}}D_\lambda$, dont la restriction au point maximal s_λ de D_λ est le tore maximal de P_{s_λ} (lequel est de dimension C ou 1).

b) Considérons l'homomorphisme transposé $M \longrightarrow M^{\lambda}$, sur les groupes des caractères, de l'inclusion $T_{\lambda_o} \hookrightarrow T_o$ = tore maximal de P_o, et la forme $\varphi_{y_\lambda} : M^{\lambda} \longrightarrow \mathbb{Z}$, définie au signe près, définie comme dans 12.4.3 (avec X remplacé par $\underline{X}^{\lambda}$). On a alors commutativité, au signe près, dans

(12.8.15)
$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi_{x_\lambda}"'] & & M^{\lambda} \arrow[dl, "\varphi_{\lambda_\lambda}"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd} .$$

(En fait, on constate que le choix d'un ordre sur l'ensemble des deux branches de X_o passant par x_λ permet de faire un choix analogue en le point y_λ de $\underline{X}_o^{\lambda}$, et pour deux choix qui se correspondent ainsi, le diagramme précédent est commutatif.)

c) On a commutativité dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} M_\ell \otimes M_\ell \arrow[rr] \arrow[dr, "pr_\lambda \underline{u}_\ell"'] & & M_\ell^{\lambda} \otimes M_\ell^{\lambda} \arrow[dl, "u_\ell^{\lambda}"] \\ & \mathbb{Z}_\ell & \end{tikzcd} ,$$

où les notations sont celles de 12.8.13 et (12.8.14).

De ces relations résulte aussitôt que pour prouver 12.8.13, il suffit de prouver la relation analogue pour $\underline{X}^{\lambda}$:

$$u_\ell^{\lambda} = (\varphi_{y_\lambda} \otimes \varphi_{y_\lambda}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \quad ,$$

qui n'est autre que 12.5 dans le cas de $\underline{X}^{\lambda}$ sur $\underline{S}^{\lambda}$. Or $\underline{S}$ est un trait de caractéristique nulle. Cela achève donc la réduction annoncée.

Remarques 12.9. On notera que cette réduction nous réduit en même temps au cas où X_o n'a qu'un seul point singulier, qui est celui qui était considéré classiquement dans la formule de Picard-Lefschetz. Notons d'ailleurs que dans ce cas, X_o a une ou deux composantes irréductibles, ces cas correspondants respectivement à rang $M = 1$ et rang $M = 0$ (ce dernier cas étant celui où la jacobienne de la fibre générique a bonne réduction).

12.10. La démonstration donnée dans 12.8 nous fournit un résultat plus général que 12.5, valable sans supposer que X soit régulier, en introduisant les entiers $d_\lambda \geq 1$ de (12.8.12) : on trouve alors que les accouplements de monodormie se déduisent tous de l'accouplement

$$u = \sum_{\lambda \in L} d_\lambda \, \varepsilon_{x_\lambda} \otimes \varepsilon_{x_\lambda} : M \otimes M \longrightarrow \mathbb{Z} \quad . \tag{12.10.1}$$

13. Liens avec la théorie transcendante : cas analytique complexe.

Pour les notions générales relatives aux espaces analytiques, nous renvoyons à [2].

13.1. Rappels sur les groupes analytiques sur S. Soit S un espace analytique, A un espace analytique au-dessus de S, muni d'une structure de groupe commutatif au-dessus de S (i.e. A est un groupe commutatif de la catégorie des espaces analytiques au-dessus de S). On suppose

A <u>lisse</u> sur S, et on désigne par

$$\underline{E} = \underline{\mathrm{Lie}}(A/S) \tag{13.1.1}$$

le module localement libre sur S, image inverse par la section nulle du faisceau tangent relatif de A sur S. Nous admettrons ici la définition de l'homomorphisme exponentiel

$$\exp : E \longrightarrow A \quad , \tag{13.1.2}$$

où E est le fibré vectoriel analytique sur S dont le Module des sections holomorphes est $\underline{E}$. Cet homomorphisme se définit, au voisinage d'un point $s \in S$, d'abord au voisinage de la section nulle de E par les méthodes bien connues en théorie des groupes formels en car. nulle, puis se prolonge de façon évidente par multiplicativité à E tout entier. C'est un homomorphisme de groupes analytiques relatifs sur S, qui est <u>étale</u> et a comme image le sous-espace ouvert A° de A réunion des composantes neutres des fibres de A sur S. Si R est le sous-espace analytique noyau de exp, on a donc une suite exacte de groupes analytiques relatifs :

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow E \longrightarrow A^{\circ} \longrightarrow 0 \quad , \tag{13.1.3}$$

où le morphisme $E \longrightarrow A^{\circ}$ est surjectif et étale, donc R est un groupe analytique relatif <u>étale</u> sur S. C'est un sous-espace analytique de E, qui est fermé dans E si et seulement si A° est séparé sur S, i.e. la section nulle de A° est fermée dans A°.

13.1.4. Bien entendu, la suite exacte (13.1.3) est <u>fonctorielle en</u> A, et commute à tout changement de base $S' \longrightarrow S$. De cette façon on trouve une équivalence de catégories, compatible aux changements de base, entre la catégorie des groupes analytiques relatifs sur S lisses et à fibres connexes, et la catégorie des couples (E,R) d'un fibré vectoriel localement libre E sur S et d'un sous-groupe analytique R de E étale sur S.

13.1.5. Lorsque A est un groupe "<u>abéloide</u>" sur S, par quoi nous entendons qu'il est lisse, propre et séparé sur S et à fibres connexes, de sorte qu'on a en particulier $A=A^{o}$, alors R est un groupe localement constant sur S, dont le rang en chaque point s (en tant que $\mathbb{Z}$-module) est égal à 2 $\mathrm{rang}_s(E)$, et réciproquement. De cette façon on trouve l'interprétation bien connue d'un espace abéloide sur S en termes d'un "<u>système local</u>" R sur S et d'une structure de fibré vectoriel analytique <u>complexe</u> sur le fibré analytique réel $R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ défini par R.

13.2. <u>Complétion formelle le long d'une fibre</u>. Nous supposons donné désormais un point $s \in S$, et allons travailler localement au voisinage de s. Pour tout entier $n \geq 0$, désignons par S_n le n.ième voisinage infinitésimal de s dans S, et pour tout espace analytique X sur S, soit de même $X_n=X\times_S S_n$; pour n variable, le système des X_n forme alors un système inductif d'espaces analytiques sur S, qu'on dénotera par $\hat{X}$ et appelera le <u>complété formel de</u> X <u>le long de</u> X_s . Il dépend évidemment fonctoriellement de X, et sa formation commute aux limites projectives finies ; donc $X \longmapsto \hat{X}$ transforme groupes en groupes. Notons que $\hat{X}$ ne dépend en fait que de la restriction de X à un voisinage ouvert arbitraire U de S.

Lemme 13.2.1. *Les données sont celles de* 13.1, *et on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées* : a) $A = A^{o}$, b) R *est constant au voisinage de* s, *et* c) R_s *engendre l'espace vectoriel complexe* E_s . *Soit* A' *un deuxième groupe analytique lisse sur* S, *et considérons l'application*

$$u \longmapsto \hat{u} : \mathrm{Hom}_{S\text{-gr}}(A,A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{S}\text{-gr}}(\hat{A},\hat{A}') \quad ,$$

où les notations sont celles de 13.2, *et l'application analogue obtenue en se restreignant au-dessus d'un voisinage ouvert* U *variable de* s, *et passant à la limite inductive* :

$$(13.2.1.1) \qquad u \longmapsto \hat{u} : \mathrm{Hom}_{(S,s)\text{-gr}}(A,A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{S}\text{-gr}}(\hat{A},\hat{A}') \quad ,$$

(*où* (S,s) *désigne le* germe *d'espace analytique de* S *en* s). *Alors l'application précédente est* bijective.

Considérons en effet la suite exacte

$$0 \longrightarrow R' \longrightarrow E' \longrightarrow A'^{o} \longrightarrow 0$$

analogue à (13.1.3) définie par A'. Compte tenu du fait que les homomorphismes $A \longrightarrow A'$ se factorisent nécessairement par A'^{o}, et de même après les changements de base $U \longrightarrow S$ et $S_n \longrightarrow S$, on peut supposer $A' = A'^{o}$. Compte tenu du dictionnaire 13.1.4, il faut prouver que la donnée d'un germe d'homomorphisme de fibrés vectoriels $E \longrightarrow E'$, appliquant R dans R', revient à la donnée d'un système cohérent d'homomorphismes $E_n \longrightarrow E'_n$ appliquant R_n dans R'_n . Or si $\underline{O}_s$ désigne l'anneau local de S en s, la donnée d'un système cohérent d'homomorphismes $E_n \longrightarrow E'_n$ revient à la donnée d'un homomorphisme de $\hat{\underline{O}}_s$-modules

$$\hat{F} : \hat{\underline{E}}_s \longrightarrow \hat{\underline{E}}'_s$$

(où $\underline{E}_s$ et E'_s sont les $\underline{O}_s$-modules libres fibres en s des $\underline{O}_s$-Modules $\underline{E}$, $\underline{E}'$ correspondant à E,E'), tandis qu'un germe d'homomorphisme de fibrés vectoriels $E \longrightarrow E'$ revient à la donnée d'un homomorphisme de $\underline{O}_s$-modules

$$F : \underline{E}_s \longrightarrow \underline{E}'_s \quad .$$

Cela montre déjà que l'application (13.2.1.1) est injective, et pour la surjectivité, il suffit de prouver que si on a un homomorphisme $\hat{F}$ comme dessus, tel que pour tout n l'homomorphisme induit $F_n : E_n \longrightarrow E'_n$ applique R_n dans R'_n, alors $\hat{F}$ provient d'un F i.e. applique $\underline{E}_s$ dans $\underline{E}'_s$, et le germe correspondant d'homomorphismes $E \longrightarrow E'$ applique R dans R'. Or, comme par hypothèse c), $R_s = R_o$ engendre E_s, il s'ensuit par Nakayama que le groupe R_o (identifié au groupe des sections de $\hat{R}$ sur $\hat{S}$, ou, au choix, au groupe des germes de sections de R sur S) engendre $\hat{E}_s$; donc, pour prouver que $\hat{F}(\underline{E}_s) \subset \underline{E}'_s$, il suffit de prouver que $\hat{F}(R_o) \subset \underline{E}'_s$. Or on a $\hat{F}(R_o) \subset R'_o$, où R'_o est lui-même interprété comme le groupe des germes de sections de $R' \subset E'$ au voisinage de s, d'où l'inclusion annoncée, et par suite l'existence de F . De plus on voit que $F(R_o) \subset R'_o$, où R_o et R'_o sont considérés comme des groupes de germes de sections de E resp. E' . En vertu de b), R_o

engendre R au voisinage de s, d'où il résulte que $F(R) \subset R'$ au voisinage de s, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u> 13.2.2. <u>Si</u> A <u>satisfait les conditions</u> a), b), c) <u>de</u> 13.2.2, <u>il est déterminé à isomorphisme unique près au voisinage de</u> s <u>par la connaissance du</u> $\hat{S}$-<u>groupe</u> $\hat{A}$.

13.3. <u>L'extension de Raynaud analytique</u>. Nous sommes maintenant en mesure de paraphraser, en Géométrie Analytique, la construction de l'extension de Raynaud donnée dans 7 . Supposons donné A comme dans 13.1, avec $A = A_o$, et considérons $R_o = R_s$, qui est un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini. Quitte à restreindre S à un voisinage ouvert assez petit de s, interprétant R_o comme le groupe des germes de sections de R au voisinage de s, on trouve un homomorphisme

$$R_{oS} \longrightarrow R \subset E \tag{13.3.1}$$

où R_{oS} désigne le groupe analytique constant sur S de valeur R_o . Choisissant le voisinage de s assez petit pour que toute section de $\underline{O}_S$ dont le germe en s est nul soit nul, on voit que l'homomorphisme précédent est injectif. Son image est donc un sous-groupe analytique constant de R, qui est évidemment le plus grand sous-groupe constant de R, et qui s'appelle la partie <u>fixe</u> de R, et est notée R^f :

$$R_{oS} \simeq R^f \hookrightarrow R \text{ , induit un isomorphisme } R^f_s \simeq R_s \text{ .} \tag{13.3.2}$$

On pourra alors considérer le groupe quotient

$$A^{\natural} = E/R^f \tag{13.3.3}$$

et on trouve une suite exacte canonique, compte tenu de (13.1.3) :

$$(13.3.4) \qquad 0 \longrightarrow R/R^f \xrightarrow{i} A^{\natural} \longrightarrow A \longrightarrow 0 \quad .$$

On notera que R^f est toujours fermé dans E, à condition de restreindre S à un voisinage de s, et que par suite $A^{\natural}$ est séparé sur S. On notera aussi que l'homomorphisme $A^{\natural} \longrightarrow A$ est étale, donc induit un isomorphisme

$$(13.3.5) \qquad \underline{\mathrm{Lie}}(A^{\natural}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(A) = E \quad .$$

D'autre part, pour tout $n \geq 0$, l'homomorphisme canonique $A^{\natural} \longrightarrow A$ induit un isomorphisme $A_n^{\natural} \xrightarrow{\sim} A_n$ (puisque $R_n^f \xrightarrow{\sim} R_n$), donc il induit un isomorphisme

$$(13.3.6) \qquad \widehat{A^{\natural}} \xrightarrow{\sim} \hat{A} \quad .$$

Ce dernier fait montre que $A^{\natural}$ joue bien le rôle du groupe, encore noté $A^{\natural}$, que nous avions envisagé dans le par. 7 . Il a été construit ici sans faire d'hypothèse sur la fibre $A_s = A_0$, du type "extension d'un groupe abéloide par un tore", ce qui sera nécessaire cependant si nous voulons récupérer l'importante structure d'extension (7.2.3) sur $A^{\natural}$. En revanche, l'homomorphisme $A^{\natural} \longrightarrow A$ de (13.3.4) est de nature essentiellement transcendante et n'a pas de contre-partie dans la théorie purement algébrique des § 7. Nous reviendrons d'autre part au § 14 sur la question d'une interprétation purement algébrique de l'homomorphisme $i : R/R^f \longrightarrow A^{\natural}$ de (13.3.4).

Supposons d'abord qu'on se donne un sous-tore complexe

$$(13.3.7) \qquad T_0 \subset A_0 \quad ,$$

où par "tore complexe" on entend un groupe analytique isomorphe à une puissance cartésienne de $\mathbb{C}^*$. Soit

$$T = T_o \times S \tag{13.3.8}$$

le tore constant sur S de valeur T_o . Procédant comme dans 5.1, on trouve un unique homomorphisme (et même une immersion) de systèmes inductifs de groupes analytiques

$$\hat{T} \longrightarrow \hat{A}^{\natural} \quad ,$$

qui au-dessus de S_o se réduise à (13.3.7). En vertu de 13.2.2, cet homomorphisme provient d'un unique germe d'homomorphismes

$$T \longrightarrow A^{\natural} \quad , \tag{13.3.9}$$

et prenant S assez petit autour de s, on peut supposer cet homomorphisme défini au-dessus de S tout entier. L'homomorphisme correspondant

$$\underline{\mathrm{Lie}}(T) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(A^{\natural}) \simeq E$$

est injectif sur les S_n donc sur $\hat{S}$, donc sur $\underline{O}_S$ par descente plate, donc il existe un voisinage de S, qu'on peut supposer égal à S, en lequel $\underline{\mathrm{Lie}}(T)$ s'identifie à un sous-Module localement facteur direct de $\underline{E}$, que nous noterons $\underline{E}^t$; le sous-fibré correspondant de E est noté E^t:

$$\underline{\mathrm{Lie}}(T) \xrightarrow{\sim} \underline{E}^t \subset \underline{E} \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(A^{\natural}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(A) \quad , \quad E^t \subset E \quad . \tag{13.3.10}$$

De même, désignons par

$$R_o^t \subset R_o \quad \text{et} \quad R^t = R_{oS}^t \subset R_{oS} \simeq R^f \tag{13.3.11}$$

le sous-réseau de R_o défini par le sous-tore T_o de A_o , et le groupe analytique constant correspondant sur S, de sorte que l'homomorphisme

(13.3.9) correspond simplement à l'homomorphisme

$$E^t/R^t_{oS} = E^t/R^t \longrightarrow E/R_{oS} = E/R^f$$

induit par les inclusions

$$E^t \hookrightarrow E, \quad R^t \hookrightarrow R^f \quad .$$

Utilisant le fait que (13.3.9) induit une immersion sur les fibres en s, on en conclut que l'homomorphisme

$$R_o/R^t_o \longrightarrow E_o/E^t_o = (E/E^t)_o$$

est injectif, d'où il résulte aussitôt que

$$R_o/R^t_o \longrightarrow (E/E^t)_{s'}$$

est encore injectif pour s' voisin de s, ce qui implique que, quitte à rapetisser S autour de s, on peut supposer que (13.3.9) <u>est une immersion fermée</u>.

Il s'impose alors d'introduire

(13.3.12) $$B = A^\natural/T \simeq (E/E^t)/(R^f/R^t) \quad ,$$

de sorte qu'on obtient sur $A^\natural$ une structure d'extension

(13.3.13) $$0 \longrightarrow T \longrightarrow A^\natural \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad ,$$

B étant un groupe analytique relatif sur S, lisse et séparé sur S et à fibres connexes. Par contruction même, on a donc

(13.3.14) $$\underline{\mathrm{Lie}}(B) \simeq \underline{E}/\underline{E}^t \quad ,$$

et la suite exacte exponentielle pour B

(13.3.15) $$0 \longrightarrow R^f/R^t \longrightarrow E/E^t \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad .$$

On notera que

(13.3.16) $$R^f/R^t = (R_o/R_o^t)_S$$

est un groupe analytique constant sur S. Il résulte donc de 13.1.5 que B est un groupe abéloide sur S au voisinage de s si et seulement si sa fibre en s

$$B_o = A_o/T_o$$

est un groupe analytique abéloide, de sorte que A_o apparaît alors comme une extension d'un tel groupe B_o par un tore T_o . Toute façon d'écrire A_o sous forme d'une extension d'un groupe abéloide par un tore complexe (*) donne donc naissance sur A , au voisinage de s, à une unique structure d'extension (13.3.13) d'un groupe abéloide B par un tore T, induisant la structure d'extension donnée en s.

13.4. Interprétation en termes de "structures de Hodge mixtes" de DELIGNE.

Reprenons d'abord le dictionnaire 13.1.4, que nous allons reformuler d'une façon légèrement différente, mieux adaptée à l'introduction des "structures de Hodge" pertinentes à la situation. Pour ceci, soit $\mathbb{R}$ le faisceau des sections de R sur S, et introduisons le $\underline{O}_S$-Module

(13.4.1) $$\mathcal{E}(A) = \mathcal{E} = \underline{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S \quad ,$$

qui est localement libre de type fini lorsque R est localement constant. (NB Le faisceau $\mathcal{E}$ n'est pas nécessairement cohérent si R n'est pas localement constant.) L'homomorphisme (13.1.3) $\underline{R} \longrightarrow \underline{E}$ définit alors un homomorphisme canonique

(13.4.2) $\mathcal{E} = \underline{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S \longrightarrow \underline{E}$,

dont le noyau sera noté $\underline{F}(A)$ ou simplement $\underline{F}$, de sorte qu'on a une suite exacte

(13.4.3) $0 \longrightarrow \underline{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \underline{E}$.

Le cas le plus intéressant est celui où l'homomorphisme (13.4.2) est un épimorphisme, i.e. où pour tout $s \in S$, R_s engendre le vectoriel complexe E_s . Dans ce cas on trouve donc une suite exacte

(13.4.4) $0 \longrightarrow \underline{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \underline{E} \longrightarrow 0$,

et si R est localement constant, c'est là une suite exacte courte de Modules localement libres sur S. La connaissance du couple (E,R) est alors équivalente à celle du couple $(R,\underline{F})$, où R est un groupe analytique localement constant sur S à fibres des $\mathbb{Z}$-Modules libres de type fini, et $\underline{F}$ est un sous-Module localement facteur direct de $\mathcal{E} = \underline{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S$, tel que l'on ait de plus la relation

(13.4.5) $\underline{F} \cap \underline{R} = 0$.

Du point de vue des structures de Hodge, il y a lieu de regarder $\mathcal{E}$ comme filtré par la "filtration de Hodge"

(13.4.6) $\mathrm{Fil}^1(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, $\mathrm{Fil}^0(\mathcal{E}) = \underline{F}$, $\mathrm{Fil}^{-1}(\mathcal{E}) = 0$.

Notons que la suite exacte (13.4.3) dépend encore fonctoriellement du groupe analytique A sur S, et qu'elle commute aux changements de base quelconques.

Revenant alors aux conditions de 13.3, nous posons

(13.4.7) $\mathcal{E}^f = \underline{R}^f \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S \quad , \quad \mathcal{E}^t = \underline{R}^t \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S \quad ,$

ces Modules étant définis dans un voisinage convenable de s (qu'on peut supposer égal à S), et définissent donc une filtration de $\mathcal{E}$ (appelée la <u>filtration par le poids</u>)

(13.4.8) $\mathcal{E} \supset \mathcal{E}^f \supset \mathcal{E}^t \supset 0 \quad ,$

où il y a lieu de regarder $\mathcal{E}^t$, $\mathcal{E}^f$ et $\mathcal{E}$ respectivement comme de poids -2, -1 et 0 (il s'agit donc d'une filtration croissante). On notera que comme R^t, $\mathcal{E}^t$ dépend du choix d'un sous-tore T_o de $A_o = A_s$. On notera que comme R^f et R^t sont localement constants, <u>$\mathcal{E}^f$ et $\mathcal{E}^t$ sont localement libres</u>, et que l'on peut aussi les interpréter comme

(13.4.9) $\mathcal{E}^f = \mathcal{E}(A^\natural) \quad , \quad \mathcal{E}^t = \mathcal{E}(T) \quad .$

La fonctorialité de la suite exacte (13.4.3) en A variable, appliquée aux homomorphismes

$$T \longrightarrow A^\natural \longrightarrow A \quad ,$$

nous montre alors aussitôt que $\underline{F}(A^\natural)$ et $\underline{F}(T)$ s'identifient respectivement à

(13.4.10) $\underline{F}(A^\natural) \simeq \underline{F}^f \overset{\text{dfn}}{=} \underline{F} \cap \mathcal{E}^f \ , \ \underline{F}(T) = \underline{F}^t = \underline{F} \cap \mathcal{E}^t = 0 \quad ,$

le = 0 provenant du fait immédiat que pour un tore T, on a $\underline{F}(T) = 0$, la suite exacte du type (13.4.3) devenant ici $0 \to 0 \to \mathcal{E}(T) \to \underline{\mathrm{Lie}}(T) \to 0$.
On voit donc en même temps que l'homomorphisme composé

$$\mathcal{E}^t \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \underline{E}$$

induit un isomorphisme

(13.4.11) $$\mathcal{E}^t \xrightarrow{\sim} \underline{E}^t \ (\simeq \underline{\mathrm{Lie}}(T)) \quad .$$

<u>Supposons maintenant que</u> R_s <u>engendre l'espace vectoriel complexe</u> E_s , ce qui est le cas en particulier dans le cas favorable 13.3.16 où A_s est une extension d'un groupe abéloide par un tore complexe T_o . Alors, quitte à restreindre S à un voisinage convenable de s, on trouve que l'homomorphisme canonique du type (13.4.2) (avec A remplacé par $A^{\natural}$)

$$\mathcal{E}^f = \mathcal{E}(A^{\natural}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(A^{\natural}) \simeq \underline{E}$$

est un épimorphisme, et a fortiori (13.4.2) est un épimorphisme. On a donc des suites exactes (13.4.4) et

(13.4.12) $$0 \longrightarrow \underline{F}^f \longrightarrow \mathcal{E}^f \longrightarrow \underline{E} \longrightarrow 0 \quad ,$$

ce qui montre en particulier que l'on a

(13.4.13) $$\underline{F} + \mathcal{E}^f = \mathcal{E} \quad ,$$

puisque $\mathcal{E}/\underline{F} \simeq \underline{E}$. De plus, comme $B = A^{\natural}/T$ est un quotient de A, il satisfait à la condition de surjectivité analogue, i.e. donne naissance à une suite exacte du type (13.4.4) :

(13.4.14) $$0 \longrightarrow \underline{F}(B) \longrightarrow (B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(B) \longrightarrow 0 \quad ,$$

dont l'interprétation est immédiate en termes des Modules déjà introduits. On a en effet par (13.3.12)

(13.4.15) $$\begin{cases} \mathcal{E}(B) \simeq (\underline{\mathbf{R}}^f/\underline{\mathbf{R}}^t) \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S \simeq \mathcal{E}^f/\mathcal{E}^t & , \\ \\ \underline{\mathrm{Lie}}(B) \simeq \underline{E}/\underline{E}^t & , \end{cases}$$

d'où on conclut, grâce à (13.4.11) et à la relation $\underline{F} \cap \mathcal{E}^t = 0$ (13.4.10), que $\underline{F}(B) = \mathrm{Ker}\ (\mathcal{E}^f/\mathcal{E}^t \longrightarrow \underline{E}/\underline{E}^t)$ est isomorphe à $\underline{F}^f$ par l'homomorphisme

(13.4.16) $$\underline{F}^f \simeq \underline{F}(A^{\natural}) \xrightarrow{\sim} \underline{F}(B) \quad .$$

Récapitulons alors les propriétés obtenues de la filtration "par le poids" (13.4.8), et ses relations avec la "filtration de Hodge" (13.4.6) de $\mathcal{E}$ défini par le sous-Module $\underline{F}$ de $\mathcal{E}$, dans le cas favorable 13.3.16 où A_s est une extension d'un groupe analytique abéloide B_o par un tore T_o (qu'on utilisera pour définir R^t, de sorte que B est un groupe analytique abéloide sur S) :

Proposition 13.4.17. Sous les conditions précédentes, les filtrations sur $\mathcal{E} = \underline{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S$ "de Hodge" et "par le poids" :

(13.4.17.1) $$\mathcal{E} \supset \underline{F} \quad , \quad \mathcal{E} \supset \mathcal{E}^f \supset \mathcal{E}^t \supset 0$$

satisfont aux conditions suivantes :

a) La filtration par le poids provient, par tensorisation $\otimes_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S$, d'une filtration analogue sur $\underline{R}$

$$\underline{R} \supset \underline{R}^f \supset \underline{R}^t \supset 0 \quad ,$$

où $\underline{R}^f$ et $\underline{R}^t$ sont des groupes analytiques localement constants sur S, de valeur des $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini (savoir $R^f_o = R_s = \pi_1(A_s)$ et $R^t_o = \pi_1(T_o)$).

b) On a les relations

(*) $$\underline{F} \cap \mathcal{E}^t = 0 \ , \ \underline{F} + \mathcal{E}^f = \mathcal{E} \quad .$$

En d'autres termes, la filtration de $\mathcal{E}^t$ induite par la filtration de Hodge (avec les conventions de degrés (13.4.6)) est concentrée en degré -1, celle de $\mathcal{E}/\mathcal{E}^f$ induite par la filtration de Hodge est concentrée en degré 0.

c) Considérons la filtration de

$$\mathcal{E}^{ab} \overset{dfn}{=} \mathcal{E}^f/\mathcal{E}^t \simeq (\underline{R}^{ab})\otimes_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S \quad , \text{ où } \underline{R}^{ab} = \underline{R}^f/\underline{R}^t \quad (\text{cf. a})) \quad ,$$

induite par la filtration de Hodge de $\mathcal{E}$, donc définie par le sous-Module $\underline{F}^{ab}$ de $\mathcal{E}^{ab}$ image de

$$\underline{F}^f \overset{dfn}{=} \underline{F}\cap\mathcal{E}^f \longrightarrow \mathcal{E}^{ab} \quad ,$$

(la flèche étant un monomorphisme grâce à la première relation (*)). Alors le couple $(\underline{\mathbf{R}}^{ab}, \underline{F}^{ab} \subset \underline{\mathbf{R}}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S = \mathcal{E}^{ab})$ est isomorphe au couple $(\underline{R}(B), \underline{F}(B))$ associé à un **groupe abéloide** sur S, comme expliqué après (13.4.4) (où donc $B \simeq \mathcal{E}^{ab}/(F^{ab} + R^{ab})$, les symboles non soulignés désignant les groupes analytiques sur S correspondants).

Remarque 13.4.18. Dans la terminologie de DELIGNE [4], la conclusion de la proposition précédente, lorsqu'on se restreint au-dessus d'un ouvert U de S sur lequel R est localement constant, exprime que R, muni des deux filtrations (13.4.17.1) de $\mathcal{E} = \underline{\mathbf{R}}\otimes_{\mathbb{Z}} \underline{O}_S$, est une "famille analytique de structures de Hodge mixtes sur U ". La situation qu'on vient d'expliciter a servie de modèle aux conjectures de DELIGNE sur la théorie de Néron en dimensions supérieures, énoncées dans [9, 9.8 à 9.13]. Il y a cependant un trait important de la théorie algébrique étudiée au par. 7 qui manque dans la description 13.4.17, lorsqu'on suppose que A est un groupe abéloide au-dessus d'un ouvert U complémentaire d'une partie analytique Z rare de S (mettons $Z = \{s\}$, lorsque dim S = 1), de sorte que (13.1.5) $R|U$ est un système local sur U : c'est que le système local R/R^t sur U devrait être <u>constant</u>, et plus précisément, qu'il devrait être dual au système local R'^f, où R' est le groupe analytique étale sur S qui correspondrait (comme R à A) à un groupe analytique convenable A' sur S, tel que $A'|U$ soit le groupe abéloide "dual" de $A|U$. (L'analogue algébrique de cet énoncé, avec les notations du par. 5, est la dualité de $T_\ell(A_K)/T_\ell(A_K)^t$ avec $T_\ell(A'_K)^f$ (5.5.9), résultant du <u>théorème de dualité</u> 5.2.) J'ignore si un tel énoncé est valable, sous les seules hypothèses de 13.4.17, ni même si l'action de $\pi_1(U,t)$ sur R_t est unipotente ($t \in U$) ; et il ne semble pas que les méthodes naïves utilisées dans le présent paragraphe permettent de démontrer un tel résultat, même sous l'hypothèse supplémentaire où on suppose que $A|U$ soit munie d'une "polarisation" i.e. d'un faisceau inversible ample sur chaque fibre. C'est ce que savent démontrer cependant les "semi-simple group people", semble-t-il, du moins pour S non singulier de dimension 1, cf. le rapport [9]. Dans le numéro qui suit, nous allons montrer que tout marche bien en faisant des hypothèses d'algébricité relative sur A, et faire en même temps le lien avec la construction du par. 7 .

13.5. <u>Cas d'une situation relativement algébrique</u>. Nous supposons maintenant que A provient d'un schéma en groupes relatif sur S, lisse, séparé et à fibres des extensions de schémas abéliens par des tores. Nous désignerons ce schéma relatif par la même lettre A. (Nous nous autorisons cet abus de notation grâce au fait que le foncteur $G \mapsto G^{an}$, qui va de la catégorie des schémas en groupes relatifs du type envisagé vers la catégorie des groupes analytiques sur S, est pleinement fidèle, comme il serait facile à établir grâce aux résultats du type CAGA relatifs [10].) Pour tout ce qui concerne la notion de schéma relatif, et les relations entre schémas relatifs sur S et espaces analytiques sur S, nous renvoyons à [10] (cf. aussi [2, Exp. 15]). Si $\underline{O}$ désigne l'anneau local de S en s, le schéma relatif A est connu au voisinage de s par la connaissance du schéma ordinaire $A_{\underline{O}}$ sur Spec($\underline{O}$), déduit de A par localisation en s. Il est clair alors que le complété formel de $A_{\underline{O}}$ le long de sa fibre spéciale (isomorphe à $A_s = A_o$) est isomorphe au complété formel du groupe analytique A le long de A_s (13.2), en identifiant les $A_n = A\times_S S_n$ à des schémas algébriques sur S, par l'abus de notations introduit ci-dessus. Dans le cas favorable où $\hat{A}$, regardé comme schéma formel en groupes sur $\hat{\underline{O}}$, est algébrisable (7.2.1), ce qui est le cas en particulier si S est normal en s et A quasi-projectif sur S (7.1.5) on obtient donc un schéma en groupes $A^{\natural}_{\hat{\underline{O}}}$ sur Spec($\hat{\underline{O}}$), extension d'un schéma abélien $B_{\hat{\underline{O}}}$ par un tore. Pour simplifier, nous supposons que $B_{\hat{\underline{O}}}$ est projectif sur $\hat{\underline{O}}$ (ce qui est bien le cas, on le sait, si $\underline{O}$ donc $\hat{\underline{O}}$ est normal). On va alors prouver :

Proposition 13.5.1. *Sous les conditions précédentes, le groupe analytique $A^{\natural}$ de (13.3.3) provient, au voisinage de s, d'un schéma en groupes relatif déterminé à isomorphisme unique près, extension d'un schéma abélien relatif projectif sur S par un tore, et si $A^{\natural}_{\underline{O}}$ est le schéma en groupes qu'il définit sur $\underline{O} = \underline{O}_{S,s}$, alors le schéma en groupes $A^{\natural}_{\underline{O}} \otimes_{\underline{O}} \hat{\underline{O}}$ est canoniquement isomorphe avec sa structure d'extension à l'extension de Raynaud $A^{\natural}_{\hat{\underline{O}}}$ introduite précédemment.*

Ce dernier fait résultera immédiatement de la première assertion, compte tenu de 7.2.1, puisque $A^{\natural}_{\underline{O}} \otimes_{\underline{O}} \hat{\underline{O}}$ a comme complété formel le long de la fibre spéciale $\widehat{A_{\underline{O}}}$, en vertu de (13.3.6). Pour prouver l'algébricité de $A^{\natural}$ au voisinage de s, procédant comme dans 7.2.1, on est ramené aussitôt à prouver celle du quotient abélien B de $A^{\natural}$, ce qui va résulter du

Lemme 13.5.2. *Soient B un groupe analytique abéloide sur l'espace analytique S, s un point de S tel que le complété $\hat{B}$ le long de la fibre B_s soit algébrisable, i.e. tel que les $B_n = B \times_S S_n$ soient algébrisables, et que $\hat{B}$, regardé maintenant comme schéma formel sur $\hat{\underline{O}}_{S,s}$, soit algébrisable, i.e. provienne d'un schéma abélien $B_{\hat{\underline{O}}}$ sur $\hat{\underline{O}}$. Supposons de plus que $B_{\hat{\underline{O}}}$ soit projectif sur $\hat{\underline{O}}$. Alors B est projectif sur S au voisinage de s.*

L'hypothèse signifie qu'il existe une polarisation de l'espace analytique formel $\hat{B}$, i.e. une suite de polarisations p_n des B_n qui se "recollent". La conclusion signifie qu'il existe une polarisation p de B au-dessus d'un voisinage de s. Or soit P l'espace analytique sur S des polarisations relatives de B sur S, qui représente le foncteur

$$S' \longmapsto \text{ensemble des polarisations de } B_{S'} \text{ sur } S'$$

sur la catégorie des espaces analytiques S' sur S, lequel est un sous-foncteur ouvert du foncteur $\underline{NS}_{B/S}$ de Néron-Sévéri de S. Des arguments standarts des plus simples, que nous nous dispensons d'expliciter ici, montrent que $\underline{NS}_{B/S}$, et par suite aussi P, est représentable par un espace analytique <u>net</u> (i.e. non ramifié) sur S. L'hypothèse s'exprime alors en disant qu'il existe une section <u>formelle</u> p de P sur S en s. Comme P est net donc localement quasi-fini sur S, il s'ensuit [2, Exp. 18, n°1] que toute section formelle de P sur S en s provient d'une section analytique au voisinage de s, i.e. d'une polarisation de B au-dessus d'un voisinage de s, d'où la conclusion annoncée.

<u>Remarques</u> 13.5.3. a) Si on omet dans 13.5.2 l'hypothèse que $B_{\hat{\underline{O}}}$ est projectif sur S, on peut encore conclure que B est algébrisable au voisinage de s. Pour ceci on utilise un résultat inédit (dû indépendamment à M. ARTIN et P. DELIGNE, en utilisant la théorie des faisceaux $\underline{T}^i$ de VI 2), affirmant que si X propre sur S est tel que $X_{\text{réd}}$ est algébrisable, il en est de même de X. Ceci nous ramène au cas où S est réduit. D'autre part, lorsque S est normal, donc $\hat{\underline{O}}$ est normal, on sait que tout schéma abélien sur $\hat{\underline{O}}$ est projectif sur $\hat{\underline{O}}$ (cf. par exemple [23]), et 13.5.2 s'applique. Pour obtenir le cas S réduit quelconque, on procède par descente non plate à partir du normalisé S' de S, grâce au résultat (délicat) suivant, que nous ne prouverons pas ici : un morphisme propre de schémas noethériens $f : S' \longrightarrow S$ qui est un épimor-

phisme (i.e. tel que $\underline{O}_S \longrightarrow f_*(\underline{O}_{S'})$ soit injectif) est un <u>morphisme de descente effective</u> pour la catégorie fibrée des schémas abéliens relatifs.

b) Il semble que la méthode de démonstration de 13.5.2 doive permettre aussi de prouver le résultat analogue pour tout espace analytique B propre sur S. Plus délicate sans doute est la question de savoir si, pour un espace analytique X propre sur S, tel que le complété formel $\hat{X}$ le long de X_s soit algébrisable, X est algébrisable sur S au voisinage de s. Signalons seulement qu'il y a lieu ici de prendre la notion d'algébrisabilité relative de X sur S dans un sens plus large que dans [10], en entendant par là qu'au voisinage de s, X provient d'un <u>espace algébrique</u> sur $\underline{O}_{S,s}$ au sens de M. ARTIN [1].

13.5.4. Plaçons-nous dans les conditions de 13.5.1. Choisissons par ailleurs, pour tout entiers $n > 0$, l'isomorphisme standart de groupes sur $\mathbb{C}$

$$\mu_{n\mathbb{C}} \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_C , \quad m \longmapsto \exp(2i\pi m/n) \quad ,$$

ce qui nous donne, par passage à la limite sur les puissances d'un nombre fixé ℓ, un isomorphisme canonique de faisceaux ℓ-adiques sur $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{Z}_\ell(1)_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{Z}_{\ell\mathbb{C}} \quad ,$$

que nous utiliserons pour identifier les deux membres.

De la suite exacte (13.1.3), on déduit, en appliquant la suite exacte des $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\, , -)$, un isomorphisme canonique

(13.5.5) $$ {}_nA^{\circ} \simeq \underline{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad , $$

qui donne, pour n parcourant les puissances d'un nombre premier ℓ donné, un isomorphisme de systèmes projectifs de groupes sur S

(13.5.6) $$ T_{\ell}(A^{\circ}) \simeq \underline{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\ell} \quad , $$

où $\mathbb{Z}_{\ell}$ est considéré comme le système projectif des $\mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}$. Dans le cas envisagé ici où A provient d'un schéma en groupes séparé sur S, on voit alors immédiatement que les $\underline{E} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peuvent être considérés comme des schémas relatifs, ce qui donne un sens au symbole $(\underline{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\ell})_{\underline{O}}$ (alors que $R_{\underline{O}}$ n'en aurait pas en général !), et on obtient un isomorphisme canonique

(13.5.7) $$ T_{\ell}(A_{\underline{O}}) \simeq (\underline{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\ell})_{\underline{O}} \quad . $$

Il résulte alors immédiatement des constructions du par. 2 et de 13.3 que l'isomorphisme précédent transforme partie fixe en partie fixe, partie torique en partie torique :

(13.5.8) $$ T_{\ell}(A_{\underline{O}})^{f} \simeq (\underline{E}^{f} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\ell})_{\underline{O}} \ , \ T_{\ell}(A_{\underline{O}})^{t} \simeq (\underline{E}^{t} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\ell})_{\underline{O}} \quad . $$

Si A' est un groupe analytique relatif sur S satisfaisant aux mêmes hypothèses que A, et si $W_{\underline{O}}$ est une biextension de $(A_{\underline{O}}, A'_{\underline{O}})$ par $\mathbb{G}_{m\underline{O}}$, définissant donc au-dessus d'un voisinage de s une biextension de (A,A') par $\mathbb{G}_{mS}$ (en travaillant maintenant avec la notion au sens analytique complexe, obtenue en travaillant dans le site des espaces analytiques au-dessus de S, pour une topologie convenable ...), alors d'après VIII 2.2 W définit des accouplements

$$(13.5.9)\qquad (\underline{R}\otimes\mathbb{Z}_{\ell}) \times (\underline{R}'\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_{\ell}) \simeq T_{\ell}(A)\times T_{\ell}(A') \to \mathbb{Z}_{\ell}(1)_S \simeq \mathbb{Z}_{\ell S}\ ,$$

et il est encore clair que l'accouplement correspondant

$$(13.5.10)\qquad T_{\ell}(A_{\underline{0}}) \times T_{\ell}(A'_{\underline{0}}) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ell}(1)_S$$

n'est autre que celui associé, par loc. cit., à la biextension $W_{\underline{0}}$ de $(A_{\underline{0}},A'_{\underline{0}})$. Il n'est d'ailleurs pas difficile de voir que, à condition de se restreindre à un voisinage de s, les accouplements (13.5.9) proviennent d'un accouplement unique (ne dépendant plus de ℓ)

$$(13.5.11)\qquad \underline{R} \otimes \underline{R}' \longrightarrow \mathbb{Z}\quad .$$

Tout ceci posé, les résultats algébriques concernant les $T_{\ell}(A_{\underline{0}})$ peuvent alors être utilisés pour obtenir des conclusions sur le faisceau $\underline{R}$. On trouve ainsi que l'accouplement (13.5.11) est nul sur $\underline{R}^{t} \times \underline{R}'^{f}$ et sur $\underline{R}^{f} \times \underline{R}'^{t}$ (7.4.8), et que dans le cas où S est non singulier de dimension 1, et que, dans $U = S-\{s\}$, A et A' sont deux schémas abéliens relatifs duals l'un de l'autre par W, $\underline{R}_U^{t}$ et $\underline{R}'^{f}_U$ ainsi que $\underline{R}_U^{f}$ et R'^{t}_U sont exactement l'annulateur l'un de l'autre sur un voisinage assez petit de s (7.4.8). Il en résulte alors, compte tenu que (13.5.11) est une dualité parfaite sur U, que l'on a une dualité sur U entre $\underline{R}/\underline{R}^{t}$ et $\underline{R}'^{f}$, ce qui implique en particulier que $\underline{R}/\underline{R}^{t}$ est constant, et a fortiori que l'action de $\pi_1(U,t)$ sur $\underline{R}_t$ est unipotente d'échelon 2. On voit de même qu'on a sur U une dualité parfaite entre $\underline{R}/\underline{R}^{f}$ et $\underline{R}'^{t}$; comme ce dernier est également isomorphe au tore dual du réseau M_S sur S, où M est le groupe défini dans (5.5.4), on trouve un isomorphisme canonique

(13.5.12) $\underline{R}_U/\underline{R}_U^f \simeq M_U$,

et l'homomorphisme i de (13.3.4) peut s'écrire comme un homomorphisme

(13.5.13) $i : M_U \longrightarrow A^{\natural}$,

qu'on retrouvera dans un contexte un peu différent au par. suivant.

14. Liens avec la théorie transcendante : cas rigide-analytique. L'homomorphisme canonique $\underline{M}_K \longrightarrow A_K^{\natural o}$.

14.1. Nous supposons connu ici les fondements de la théorie des espaces rigide analytiques, pour lesquels on pourra consulter [12] [13] [34].

Soit S un trait complet, A_K un schéma abélien sur son corps des fractions. On a construit alors dans 8.1, par descente à partir de l'extension de Raynaud dans le cas semi-stable, une extension $G_K = A_K^{\natural o}$ (8.1.1)

(14.1.1) $0 \longrightarrow T_K \longrightarrow G_K \longrightarrow B_K \longrightarrow 0$

d'un schéma abélien B_K par un tore T_K . Considérant le schéma abélien dual A'_K , on a de même une extension $G'_K = A'^{\natural o}_K$

(14.1.2) $0 \longrightarrow T'_K \longrightarrow G'_K \longrightarrow B'_K \longrightarrow 0$,

où B'_K s'identifie d'ailleurs au schéma abélien dual de B_K (8.2). On désigne, comme dans (8.1.8), par $\underline{M}_K$ et $\underline{M}'_K$ les réseaux sur K duals de T'_K et de T_K respectivement :

(14.1.3) $\underline{M}_K = D(T'_K)$, $\underline{M}'_K = D(T_K)$.

Donc les structures d'extension (14.1.2) et (14.1.1) peuvent s'interpréter respectivement (VIII 3.7) comme équivalant à la donnée d'homomorphisme

(14.1.4) $$\underline{M}_K \xrightarrow{p_K} B_K \ , \ \underline{M}'_K \xrightarrow{p'_K} B'_K \quad .$$

Soient $W_K^{\natural}$ la biextension de (B_K, B'_K) par $\mathbb{G}_{mK}$ qui définit la dualité canonique entre ces schémas abéliens (8.2), et E_K la biextension de $(\underline{M}_K, \underline{M}'_K)$ par $\mathbb{G}_{mK}$ image inverse de $W_K^{\natural}$ par les homomorphismes (14.1.4). Notons qu'on vérifie immédiatement que les trivialisations de E_K correspondent biunivoquement, de façon canonique, aux homomorphismes

(14.1.5) $$i : \underline{M}_K \longrightarrow G_K$$

qui relèvent $p_K : \underline{M}_K \longrightarrow B_K$, ou, symétriquement, aux homomorphismes

(14.1.6) $$i' : \underline{M}'_K \longrightarrow G'_K$$

qui relèvent $p'_K : \underline{M}'_K \longrightarrow B'_K$.

Ceci posé, désignant par un exposant ^{an} les groupes rigide-analytiques sur K associés aux groupes algébriques envisagés [13], on définit dans [24] une suite exacte canonique

(14.1.7) $$0 \longrightarrow \underline{M}_K^{an} \xrightarrow{i^{an}} G_K^{an} \xrightarrow{e} A_K^{an} \longrightarrow 0 \quad ,$$

dans laquelle l'homomorphisme i^{an}, qui peut aussi s'interpréter comme un homomorphisme $i : \underline{M}_K \longrightarrow G_K$ pour des schémas en groupes ordinaires, relève l'homomorphisme p (14.1.4), i.e. est de la forme envisagée dans (14.1.5). Cette suite exacte est l'analogue rigide-analytique de la suite exacte (13.3.4). Elle dépend de façon fonctorielle de A_K , et sa formation est compatible avec tout changement de traits $S' \longrightarrow S$. Ce dernier fait montre d'ailleurs que, pour définir et étudier (14.1.7), on est ramené par descente finie au cas où A_K a une réduction semi-stable. Dans ce cas, les schémas en groupes $T_K, G_K, B_K, \underline{M}_K$, ... sont les fibres génériques de schémas en groupes T, G, B, M ... sur S, G étant une extension du schéma abélien B par le tore T (par. 7). On peut alors considérer le complété formel $\hat{G}$ de G le long de sa fibre spéciale, et par construction on a un isomorphisme canonique (7.2.6)

$$\hat{G} \xrightarrow{\sim} \widehat{A^o} \qquad , \tag{14.1.8}$$

d'où par passage aux "fibres génériques" (qui sont des groupes ridige-analytiquessur K) un isomorphisme canonique

$$\hat{G}^{an} \xrightarrow{\sim} \widehat{A^o}^{\,an} \qquad . \tag{14.1.9}$$

On a d'autre part des homomorphismes canoniques (qui sont des immersions ouvertes rigide-analytiques, mais pas en général des isomorphismes)

$$\hat{G}^{an} \hookrightarrow G_K^{\,an} \quad , \quad \widehat{A^o}^{\,an} \hookrightarrow A_K^{\,an} \qquad . \tag{14.1.10}$$

Ceci dit, l'homomorphisme e de (14.1.7) est caractérisé de façon unique par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{G}^{an} & \longrightarrow & \widehat{A^o}^{\,an} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_K^{an} & \longrightarrow & A_K^{an} \end{array} \qquad , \tag{14.1.11}$$

où les flèches non nommées sont celles de (14.1.9) et (14.1.10).

Remarques 14.1.12. a) On notera que l'unicité de e rendant commutatif le diagramme précédent est immédiate, l'espace rigide-analytique G_K^{an} étant connexe. L'existence de e, par contre, n'est nullement triviale, et nous nous contentons à ce sujet de renvoyer à la note citée de M. RAYNAUD. D'autre part, la définition donnée dans loc. cit. de l'homomorphisme i^{an} est également de nature transcendante, bien qu'il puisse être interprété comme étant un objet de nature essentiellement algébrique (14.1.5) (une fois la construction de G lui-même, donc de G_K, acquise (ce qui se fait par les constructions de géométrie formelle du par. 7)). Je n'en connais aucune description purement algébrico-géométrique, mais proposerai plus bas (14.4) une caractérisation "arithmétique", qu'on obtiendra en se ramenant à une situation de type fini sur l'anneau $\mathbb{Z}$. Il semble donc que l'homomorphisme (14.1.5) soit, du point de vue de la géométrie algébrique, un élément de structure plus caché que ceux rencontrés au cours des paragraphes précédents.

b) Comme expliqué plus haut, l'homomorphisme i est canoniquement associé à une trivialisation bien déterminée de la biextension E_K de $(\underline{M}_K, \underline{M}'_K)$, ou encore à un homomorphisme bien déterminé (14.1.6) relevant p'_K. On montre alors que ce dernier n'est autre que l'homomorphisme qui intervient dans la suite exacte

(14.1.13) $$0 \longrightarrow \underline{M}'^{an}_K \xrightarrow{i'^{an}} G'^{an}_K \longrightarrow A'^{an}_K \longrightarrow 0$$

analogue à (14.1.7), associée au schéma abélien dual A'_K de A_K (à moins que ce ne soit l'opposé ???).

14.2. Relations de l'homomorphisme $i:\underline{M}_K \longrightarrow \mathfrak{G}_K$ avec la monodromie. Soit n un entier > 0. On déduit alors de la suite exacte (14.1.7), via la suite exacte des $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, -)$ sur le site des espaces rigide-analytiques au-dessus de K, une suite exacte canonique (compte tenu du fait que $\underline{M}_K^{an}$ est sans torsion et G_K^{an} est n-divisible) :

$$0 \longrightarrow {}_nG_K^{an} \longrightarrow {}_nA_K^{an} \longrightarrow \underline{M}_{K,n}^{an} \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $\underline{M}_{K,n} \overset{dfn}{=} \underline{M}_K/n\underline{M}_K$. Comme tous les termes qui interviennent dans cette suite exacte proviennent de schémas en groupes finis sur K, cette suite exacte peut se réécrire comme provenant d'une suite exacte

(14.2.1) $$0 \longrightarrow {}_nG_K \longrightarrow {}_nA_K \longrightarrow \underline{M}_{K,n} \longrightarrow 0 \quad .$$

Pour n variable, ces suites exactes se comportent comme il convient, et on trouve, par passage à la limite sur les puissances d'un nombre premier ℓ, une suite exacte analogue

(14.2.2) $$0 \longrightarrow T_\ell(G_K) \longrightarrow T_\ell(A_K) \longrightarrow \underline{M}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 0 \quad .$$

Or on a déjà une telle suite exacte par voie purement algébrique, grâce à la première formule (8.1.2) et à (8.1.7), qui donnent

(14.2.3) $$T_\ell(G_K) \xrightarrow{\sim} T_\ell(A_K)^{ef} \subset T_\ell(A_K) \ , \ T_\ell(A_K)/T_\ell(A_K)^{ef} \simeq \underline{M}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell \quad .$$

Ceci posé, je dis que <u>les homomorphismes</u> (14.2.3) <u>provenant de la théorie algébrique ne sont autres que ceux déduits de la suite exacte</u> (14.2.2) <u>provenant de la théorie transcendante</u>. Pour le premier homomorphisme, correspondant au premier homomorphisme de (14.2.2), notre assertion résulte aussitôt, par réduction à la situation semi-stable, de la commutativité de (14.1.11), compte tenu que les flèches verticales y définissent des isomorphismes sur les T_ℓ, et que T_ℓ appliqué aux flèches horizontales donne respectivement la flèche envisagée dans (14.2.3) et dans (14.2.2). Nous admettrons la compatibilité annoncée, concernant les deux isomorphismes obtenus entre $T_\ell(A_K)/T_\ell(A_K)^{ef}$ avec $\underline{M}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell$; notons d'ailleurs que cette compatibilité (pour un ℓ donné) suffit déjà à caractériser de façon unique, par voie transcendante, l'homomorphisme (14.1.5) intervenant dans (14.1.7), interprété comme un isomorphisme de $\underline{M}_K^{an}$ avec Ker e. On peut dire aussi que l'homomorphisme e de (14.1.7) permet d'identifier les $T_\ell(A_K)/T_\ell(A_K)^{ef}$ aux ℓ-adifiés $\underline{R}_K \otimes \mathbb{Z}_\ell$ d'un même réseau $\underline{R}_K$ = Ker e sur K, et que cette "stucture entière" sur le système des pro-ℓ-groupes précédents est compatible, dans un sens évident, avec la structure entière provenant des formules (8.1.7) (théorème d'orthogonalité 5.2), ce qui définit alors de façon canonique un isomorphisme

$$i : \underline{M}_K \simeq \text{Ker } e \quad .$$

Comme l'homomorphisme i (14.1.5) permet de réconstituer la structure d'extension habituelle de $T_\ell(A_K)$, qui est (14.2.2), donc aussi sa structure d'extension panachée décrite dans 9.6, grâce à la suite exacte

$$0 \longrightarrow T_\ell(T_K) \longrightarrow T_\ell(G_K) \longrightarrow T_\ell(B_K) \longrightarrow 0$$

$\underline{M}_K^{\prime} \otimes \mathbb{Z}_\ell(1)$

déduite de (14.1.1), il permet également dans le cas semi-stable de réconstituer **les** accouplements de monodromie (9.1.2)

(14.2.4) $$u_\ell : \underline{M} \otimes \underline{M}' \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \quad ,$$

ceux-ci ayant été définis précisément en termes d'extensions panachées dans 9.6. Contentons-nous d'indiquer le résultat de la traduction de la construction de 9.6. Pour ceci, notons que dans le cas semi-stable, p_K et p'_K proviennent d'homomorphismes

$$p : \underline{M} \longrightarrow B \quad , \quad \underline{M}' \longrightarrow B' \quad ,$$

où B, B' sont deux schémas abéliens sur S duals l'un de l'autre, d'où par image inverse par (p,p') une biextension E de $(\underline{M}, M')$ par $\mathbb{G}_{mS}$, dont la fibre générique est la biextension E_K déjà envisagée dans 4.1. Ceci dit, supposant pour simplifier $\underline{M},\underline{M}'$ constants de valeurs M, M'. Pour tout couple $(m,m') \in M \times M'$, $E_{m,m'}$ est un torseur sous $\mathbb{G}_{mS}$, donc correspond à un Module inversible $L_{m,m'}$ sur l'anneau V de S, qui admet donc une base u_o définie modulo multiplication par une unité de V. Par suite on trouve une application canonique de "valuation"

$$\underline{v} : \quad E_{m,m'}(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

en associant à toute base u de $L_{m,m'} \otimes_V K$, donné par $u = \lambda u_o \quad (\lambda \in K^*)$ l'élément

$$\underline{v}(u) \; = \; \underline{v}(\lambda) \in \mathbb{Z} \quad ,$$

où $\underline{v}$ dans le deuxième membre désigne la valuation associée à V (normalisée de la façon habituelle, de sorte que son groupe de valeurs soit $\mathbb{Z}$) ;

l'entier obtenu ne dépend évidemment pas du choix de u_o . Si alors φ est une trivialisation de E, on peut considérer l'application correspondante

$$(14.2.5) \qquad (m,m') \longmapsto \underline{v}(\varphi(m,m')) : M \times M' \longrightarrow \mathbb{Z} \quad .$$

Ceci posé, on trouve que l'<u>homomorphisme de monodromie</u> (14.2.4) <u>est à valeurs dans</u> $\mathbb{Z}$, <u>et n'est autre que l'homomorphisme</u> (14.2.5) <u>où</u> φ <u>est le splittage de</u> E_K <u>associé à l'homomorphisme</u> i (14.1.5).

<u>Remarques</u> 14.2.6. On retrouve en particulier (via la théorie transcendante rigide-analytique), le fait que l'accouplement de monodromie est entier et indépendant de ℓ (10.4 a)), prouvé par une autre méthode (également transcendante) dans 12.5. D'après M. RAYNAUD, la théorie rigide-analytique permet également de retrouver l'assertion de positivité 10.4 b) (qui est également contenue dans 12.5).

<u>Remarques</u> 14.2.7. Considérons $\underline{M}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ comme une extension de $\underline{M}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par $\underline{M}_K$, et utilisons l'homomorphisme (14.1.5) i : $\underline{M}_K \longrightarrow G_K$, on en déduit une extension A_K^b

$$(14.2.8) \qquad 0 \longrightarrow G_K \longrightarrow A_K^b \longrightarrow \underline{M}_K \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad .$$

Notons d'ailleurs que la donnée d'une telle extension, grâce au fait que G_K est un groupe divisible, équivaut à la donnée d'une famille d'extensions de la forme (14.2.2) (savoir celles déduites de (14.2.8) par application des T_ℓ), et i étant un monomorphisme, les extensions en question définissant (14.2.8) ne sont autres que les extensions

(14.2.2) provenant de la suite exacte (14.2.1). Comme ces dernières extensions sont définies par voie purement algébrique, il en est de même de l'extension (14.2.8) ; en fait, la caractérisation qu'on vient d'en donner montre aussitôt que cette extension est canoniquement isomorphe au groupe, noté également A_K^b, introduit dans (8.2.3), compte tenu de l'isomorphisme 11.11 du Groupe des composantes connexes de ce dernier avec $\underline{M}_K \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

14.3. Application à une caractérisation arithmétique de $i : \underline{M}_K \longrightarrow G_K$. La caractérisation que nous avons en vue repose sur l'observation que pour tout nombre premier ℓ, l'extension (14.2.2) de $\underline{M}_K \otimes \mathbb{Z}_\ell$ par $T_\ell(G_K)$ déduite de i est connue par voie purement algébrique, en particulier on connaît l'image de i par l'homomorphisme canonique

$$\text{(14.3.1)} \qquad \mathrm{Hom}(\underline{M}_K, G_K) \longrightarrow \prod_\ell \mathrm{Ext}^1(\underline{M}_K \otimes \mathbb{Z}_\ell \,,\, T_\ell(G_K)) \quad .$$

Dans le cas (auquel on peut toujours se ramener par descente) où $\underline{M}_K$ est constant, de valeur M, l'homomorphisme précédent peut s'interpréter comme l'homomorphisme

$$\text{(14.3.2)} \qquad \mathrm{Hom}(M, G_K(K)) \longrightarrow \prod_\ell \mathrm{Hom}(M, H^1(K, T_\ell(G_K))$$

déduit de l'homomorphisme canonique

$$\text{(14.3.3)} \qquad G_K(K) \longrightarrow \prod_\ell H^1(K, T_\ell(G_K)) \quad ,$$

provenant des homomorphismes cobords dans les suites exactes de Kummer

$$0 \longrightarrow {}_nG_K \longrightarrow G_K \xrightarrow{n} G_K \longrightarrow 0 \quad .$$

(L'homomorphisme (14.3.1) pourrait d'ailleurs s'interpréter en tous cas comme l'homomorphisme cobord analogue à (14.3.3), relatif au groupe tordu $\check{\underline{M}}_K \otimes G_K = \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{M}_K, G_K)$.) Le noyau de (14.3.3) est manifestement formé des éléments de $G_K(K)$ qui sont <u>divisibles par</u> n <u>pour tout entier</u> $n \geq 1$, ou, comme nous dirons, qui sont <u>infiniment divisibles</u>. Ceci détermine donc déjà i modulo un élément Hom(M,g), où g est le sous-groupe de $G_K(K)$ formé des éléments infiniment divisibles de $G_K(K)$:

$$g = \bigcap_{n \geq 1} n\, G_K(K) \qquad .$$

Or on a le résultat suivant :

<u>Lemme</u> 14.3.4. <u>Soient</u> V <u>un anneau de valuation discrète dont le corps résiduel</u> k <u>est de</u> car. $p > 0$ <u>et de type fini sur le corps premier</u>, G_K <u>un schéma en groupes de type fini sur</u> K, <u>de rang unipotent nul si</u> car K = 0. <u>Alors le groupe</u> g <u>des éléments infiniment divisibles de</u> $G_K(K)$ <u>est réduit à zéro</u>, <u>i.e.</u> (<u>si</u> G_K <u>est divisible</u>) <u>l'homomorphisme</u> (14.3.3) <u>est injectif</u>.

Quitte à faire une extension finie K' sur K et de remplacer V par son normalisé dans K', on peut supposer que G_K admet une suite de composition dans les quotients successifs sont de l'un des types suivants : groupe fini constant, variété abélienne, $\mathbb{G}_{mK}$, $\mathbb{G}_{aK}$. On est donc réduit aussitôt au cas où $\mathbb{G}_K$ lui-même est de l'un des types précédents. Le cas d'un groupe constant fini, ou du groupe $\mathbb{G}_{aK}$, est trivial. Dans le cas d'un schéma abélien, il peut être considéré comme la fibre générique de son modèle de Néron G, de sorte que dans ce cas, on est ramené à montrer que si G est un schéma de type fini sur S, alors le sous-groupe de $G(S)$ formé des points infiniments divisibles est réduit à zéro. Or il en est ainsi pour le groupe $G(k)$, comme il résulte aussitôt du dévissage habituel de G_o et du théorème de MORDELL-WEIL [16] (disant que le groupe $G_o(k)$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini si G_o est un schéma abélien sur le corps de type fini k). Donc g est contenu dans le noyau $G(S)^{(1)}$ de $G(S) \longrightarrow G(k)$. Comme le noyau de $G(S)^{(1)} \longrightarrow \mathbf{G}(V/\underline{m}^{n+1})$ se dévisse en groupes isomorphes à des vectoriels sur k, (en supposant S complet, ce qui est loisible) qui sont donc annulés par p, on voit que g est contenu dans le noyau de l'homomorphisme précédent quel que soit n, donc qu'il est nul. Le cas où $G_K = \mathbb{G}_{mK}$ se ramène au cas précédent, en observant que dans ce cas $G_K(K) \longrightarrow K^*$ est une extension de $\mathbb{Z}$ (qui n'a pas d'éléments infiniment divisibles sauf zéro) par $V^* = \mathbb{G}_m(S)$, qui satisfait la même condition d'après ce qu'on vient de voir.

Remarques 14.3.4.1. On notera qu'il est essentiel dans 14.3.4 de faire intervenir la divisibilité par tous les entiers ≥ 1, et non seulement les puissances d'un nombre premier fixé ℓ ; ou encore qu'il faut regarder le noyau de l'homomorphisme (14.3.3), sans se borner au second membre à un seul facteur $H^1(K, T_\ell(G_K))$. En effet, si G_K provient du schéma en groupes lisse G sur S et si S est hensélien, tout élément du noyau de $G(S) \longrightarrow G(k)$ est infiniment ℓ-divisible pour tout $\ell \neq p$! l'argument établissant 14.3.4 montre que le sous-groupe de $G_K(K)$ formé des éléments infiniment p-divisibles (i.e. le noyau de $G_K(K) \to H^1(K,T_p(G_K))$ si G_K est p-divisible) est un groupe <u>fini</u>.

14.3.5. Les réflexions qui précédent nous montrent donc que lorsque le corps résiduel k est un corps de car. $p > 0$, de type fini au sens absolu, alors l'homomorphisme i (14.1.5) est connu entièrement par la connaissance de son image par (14.3.1), i.e. par la connaissance des extensions (14.2.2). Pour en déduire un principe de caractérisation de i dans le cas général où on ne fait pas de restriction sur k, notons qu'au par. 7 nous avons pu construire le schéma G sur S sous des conditions nettement plus générales que celles où S est un trait complet et qu'on dispose d'une variété abélienne à réduction semi-stable sur son corps des fractions. Notamment, désignons plus généralement par S le spectre d'un anneau noethérien normal V, séparé et complet pour une topologie $\underline{m}$-adique, et considérons un schéma en groupes lisse et quasi-projectif A sur S, à fibres connexes. Nous supposons que $A_o = A\times_S S_o$ ($S_o = \mathrm{Spec}(V/\underline{m})$) est une extension d'un schéma abélien B_o par un tore isotrivial T_o, et que $A|U$ est un schéma abélien, où $U \subset S - S_o$ est un ouvert non vide. On a alors dans 7.22 construit un schéma G sur S, extension d'un schéma abélien B par un tore T, G étant caractérisé à isomorphisme unique près par l'isomorphisme (14.1.8)

$$(14.3.5.1) \qquad \hat{G} \xrightarrow{\sim} \hat{A}$$

sur les complétés formels le long de G_o et de A_o . On en déduit, pour tout nombre premier ℓ, un isomorphisme (7.3.5)

$$(14.3.5.2) \qquad T_\ell(G) \xrightarrow{\sim} T_\ell(A)^f \quad ,$$

d'où par restriction à U une structure d'extensions de pro-ℓ-groupes de Barsotti-Tate

$$(14.3.5.3) \qquad \begin{array}{l} 0 \longrightarrow T_\ell(G_U) \longrightarrow T_\ell(A_U) \longrightarrow T_\ell(A_U)/T_\ell(A_U)^f \longrightarrow 0 \quad . \\ \qquad\quad \wr\| \\ \qquad T_\ell(A_U)^f \end{array}$$

Supposons donné un deuxième groupe G' sur S, satisfaisant aux mêmes hypothèses que A, et une biextension W de (A,A') par $\mathbb{G}_m$ qui, sur U, induise une dualité entre les schémas abéliens A_U et A'_U . (En fait, en vertu de VIII 7.1, la donnée de W équivaut à celle d'une telle dualité entre A_U et A'_U). Alors W définit des accouplements

$$(14.3.5.4) \qquad T_\ell(A_U) \times T_\ell(A'_U) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1) \quad ,$$

donnant lieu au théorème d'orthogonalité (7.4.8) : $T_\ell(A_U)^f$ est l'orthogonal de $T_\ell(A'_U)^t = T_\ell(T'_U)$, où T est la partie torique de l'extension de Raynaud $G' = A'^\natural$ associé à A', - de sorte qu'on trouve encore un isomorphisme

$$(14.3.5.5) \qquad T_\ell(A_U)/T_\ell(A_U)^f \simeq \underline{M}_U \otimes \mathbb{Z}_\ell \quad ,$$

où $\underline{M} = D(T')$ est le réseau sur S dual du tore T' . Donc (14.3.8) et (14.3.10) nous donnent une structure d'extension

$$(14.3.5.6) \qquad 0 \longrightarrow T_\ell(G_U) \longrightarrow T_\ell(A_U) \longrightarrow \underline{M}_U \otimes \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 0 \quad .$$

Ceci posé, nous pouvons énoncer la

Conjecture 14.4. Les conditions étant celles qu'on vient d'expliciter dans 14.3.5, il existe un homomorphisme

(14.4.1) $$i : \underline{M}_U \longrightarrow G_U$$

tel que, pour tout nombre premier ℓ, l'extension (14.3.5.6) soit isomorphe à l'extension déduite de i comme expliqué pour (14.2.2). De façon plus précise, il existe une et une seul façon d'associer, à toute situation du type envisagé dans 14.3.5, un homomorphisme (14.4.1) satisfaisant à la condition précédente, et de telle façon que la formation de i soit compatible avec tout changement de base $S' \longrightarrow S$, associé à un homomorphisme continu $V \longrightarrow V'$ d'anneaux noethériens adiques.

14.4.2. Il semble que l'existence de i, compatible avec les changements de base, résulte de la théorie rigide-analytique de M. RAYNAUD, compte tenu du fait qu'il est en train de développer celle-ci dans un cadre plus général que celui énoncé dans 14.1, en se plaçant comme ici sur des anneaux noethériens adiques généraux. D'ailleurs, pour prouver l'existence et l'unicité énoncée dans 14.4, on est ramené aussitôt au cas où on se borne à des S tels que S_o soit un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$: en effet, V est limite inductive filtrante sous-anneaux V_i de type fini sur $\mathbb{Z}$; qu'on peut supposer normaux grâce à NAGATA (EGA IV 7.8), et pour i grand la situation (A,A',W) provient d'une situation analogue sur un V_i, ou encore sur le séparé complété de V_i pour la topologie définie par $m_i = \underline{m} V_i$, ce qui fournit la réduction annoncée.

14.4.3. Notons maintenant que $S-S_o$ est un schéma de Jacobson (EGA IV 10.5.8), donc pour voir que deux solutions i, i' du problème posé, pour une situation (A,A',W) donnée, sont égales, il suffit de prouver que ces homomorphismes sont égaux en tout point fermé η de U. Or introduisant le normalisé S' de l'adhérence de η dans S, S' est un trait complet, et on peut appliquer, à l'image inverse sur S' de la situation envisagée sur S, le résultat d'unicité de 4.3, compte tenu que le corps résiduel de S' est fini. L'unicité étant ainsi établie, elle implique la compatibilité de la formation de i au changement de base, sous réserve d'existence.

Remarques 14.5. Il resterait à formuler avec la généralité souhaitable, et à établir, une compatibilité entre l'homomorphisme i introduit dans 14.4 par une méthode rigide-analytique et l'homomorphisme analogue (13.5.13) de la théorie analytique complexe ; ou mieux, d'en trouver une généralisation commune !

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin, Algebraization of formal moduli I (à paraître).

[2] H. Cartan, Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique, Séminaire ENS 1960/61.

[3] P. Deligne, D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus. Pub. Math. n°36 (1969).

[4] P. Deligne, travail en préparation sur théorie de Hodge (à paraître dans Pub. Math. 1970).

[5] M. Demazure, J. Giraud, M. Raynaud, Schémas abéliens, Séminaire Orsay 1967/68, à paraître.

[6] A. Grothendieck, Le Groupe de Brauer III, dans Dix Exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland Pub. Cie.

[7] A. Grothendieck, Crystals and the De Rham cohomology of schémes, (notesby I. Coates and O. Jussila), in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Noth Holland Pub. Cie.

[8] A. Grothendieck, Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens, Inventions math. 2, p.59-78 (1966).

[9] P.A. Griffiths, Report on variation of Hodge structures (à paraître).

[10] M. Hakim, Topos annelés et schémas relatifs, à paraître dans Grundlehren der Math, Springer, (1970).

[11] J.I. Igusa, Abstract vanishing cycle theory, Proceedings of the Japan Academy, Vol 34 n°9 (1958) p.589-593.

[12] R. Kiehl, Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildnngen ... Inventions Math. 2, p.191-214 (1967).

[13] R. Kiehl

[14] S.L. Kleiman, Algebraic cycles and the Weil conjectures, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland Pub. Cie.

[15] S. Lang, Abelian varieties, Interscience Publishers n° 7 (1959).

[16] S. Lang et A. Néron, Rational points of abelian varieties over function fields, Amer. Jour. Math. vol. 81, n°1, p.95-118 (1959).

[16bis] U.I. Manin, Théorie des groupes formels commutatifs, Uspechi Mat. Naouk, t. XVIII, p.4-90, (1963).

[17] D. Mumford, Geometric invariant theory, Ergebnisse der Mathematik ..., 34, Springer (1965).

[18] D. Mumford, Abstract Theta functions, Advanced Science Seminar in Alg. Geom. Bowdoin College 1967 (notes by H. Pittie).

[19] A. Néron, Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, Pub. Math. 21 (1964), p5-128.

[20] M. Raynaud, Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et et cohomologie des variétés abéliennes, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland Pub. Cie.

[21] M. Raynaud, Modèles de Néron, C.R. Acad. Sci. Paris, t.262, p.413-416 (février 1966).

[22] M. Raynaud, Spécialisation du foncteur de Picard, C.R. Ac. Sc. t.264, p941-943 et p.1001-1004.

[22bis] M. Raynaud, Spécialisation du foncteur de Picard, à paraître aux Pub. Math.

[23] M. Raynaud, Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes, thèse, Paris 1968 (à paraître dans Lecture Notes, Springer 1970).

[24] M. Raynaud

[25] M. Rosenlicht, Some basic theorems on algebraic groups, Amer. Jour. Math., vol. 78, n°2, p.401-443 (1956).

[25bis] J.P. Serre, Quelques propriétés des variétés abéliennes en car. p, Amer. J. Math. vol.80, 1958, p.715-739.

[26] J.P. Serre, Corps locaux, Act. Sci. Ind. 1296 (1962) Herman Paris.

[27] J.P. Serre, Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos, Bull. Soc. Math. France, vol.89, 1961, p.105-154.

[28] J.P. Serre, Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves, Benjamin Inc (1968).

[29] J.P. Serre, J. Tate, Good reduction of abelian varieties, Annals of Math. vol 88, n°3 (1968), p.492-517.

[30] J.P. Serre, J. Tate, Elliptic curves and formal groups (notes du Summer Institute on Alg. Geom., Woods Hole 1964).

[31] J.P. Serre, Morphismes universels et variété d'Albanese, in Sém. Chevalley 1958/59, Exp.10.

[32] J. Tate, WC-groups over p-adic fields, Séminaire Bourbaki n°156, 1957.

[33] J. Tate, p-divisible groups, Proceedings of a conference on local fields, Driebergen (1966), Springer.

[34] J. Tate, Rigid analytic spaces (miméographié par l'IHES).